



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Kozlov, Global control over Lyapunov exponents of linear systems in the nondegenerate case, *Izv. IMI UdGU*, 2006, Issue 3, 63–64

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 18, 2025, 13:33:32



УДК 517.926+517.977

© А. А. Козлов

**О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА  
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ**

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами. Если управление  $u$  в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи  $u = U(t)x$ , где  $m \times n$ -матрица  $U$  также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной, то (1) переходит в однородную замкнутую систему с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

и показателями Ляпунова [1, с. 245]  $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$ . В системе (2) матрица  $U$  (коэффициент обратной связи) может, в свою очередь, рассматриваться как новый управляющий параметр. Таким образом, естественно возникает задача глобального управления характеристическими показателями Ляпунова, в которой требуется построить для системы (1) такую обратную связь  $u = U(t)x$ , которая обеспечила бы равенства  $\lambda_i(A + BU) = \mu_i, i = \overline{1, n}$ , где  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$  — заранее заданные вещественные числа. Эта задача является обобщением широко известной задачи о назначении спектра на случай нестационарных систем.

Существуют различные трактовки такого обобщения, см. например [2, с. 41], [3, с. 303–305]. Одна из них предложена Е. Л. Тонковым и заключается в использовании свойства равномерной полной управляемости [4, 5] системы (1). В [6] при условии равномерной полной управляемости системы (1) была доказана глобальная управляемость показателей системы (2) в том случае, когда матрица  $B$  кусочно равномерно непрерывна.

Если матрица  $B(t)$  квадратная и является обратимой при всех  $t \geq 0$ , причем  $B^{-1}(t)$  ограничена на всей положительной полуоси, то, независимо от характера непрерывности матрицы  $B$ , система (2), замкнутая управлением  $\tilde{U}(t) = B^{-1}(t)(\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) - A(t))$ , преобразуется к виду

$$\dot{x} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

при этом, очевидно, будут справедливы равенства  $\lambda_i(A + B\tilde{U}) = \mu_i, i = \overline{1, n}$ .

В докладе рассматривается вопрос о снятии условия кусочной равномерной непрерывности матрицы  $B$  в доказательстве глобальной управляемости показателей системы (2).

Введем необходимые обозначения. Пусть  $M_n$  — пространство вещественных матриц размерности  $n \times n$  со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на  $M_n$  евклидовой нормой в  $\mathbb{R}^n$ ;  $E \in M_n$  — единичная матрица.

Для произвольной матрицы  $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n$  обозначим через  $(H)_k \in M_k$  ее ведущую главную подматрицу [7, с. 479] порядка  $k$ , т.е. матрицу, составленную из элементов, стоящих в первых  $k$  столбцах и строках.

Зафиксируем число  $\rho > 0$  и положим  $H(\rho) := \{H \in M_n : \det(H)_i \geq \rho, i = \overline{1, n}\}$  — множество матриц  $H \in M_n$ , для определителей всех ведущих главных подматриц которых выполняется неравенство  $\det(H)_i \geq \rho, i = \overline{1, n}$ .

В дальнейшем матричное управление  $U$  будем считать *допустимым*, если оно является кусочно-непрерывной и ограниченной на числовой прямой функцией со значениями в  $M_n$ .

**Т е о р е м а 1.** Если для системы (1) существуют такие числа  $\sigma > 0$  и  $\alpha > 0$ , что при всех  $t_0 \geq 0$  выполнено неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det B(\tau)| d\tau \geq \alpha,$$

то существует такая величина  $\theta = \theta(\rho) > 0$ , что при любом  $t_0 \geq 0$  для всякой матрицы  $H \in \mathbf{H}(\rho)$  найдется допустимое управление  $U$ , при любом  $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$  удовлетворяющее оценке  $\|U(t)\| \leq \theta \|H - E\|$  и обеспечивающее для матрицы Коши системы (2) с этим управлением выполнение равенства

$$X_U(t_0 + \sigma, t_0) = X(t_0 + \sigma, t_0)H,$$

где  $X(t, s)$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$  — матрица Коши системы (2) с нулевым управлением.

**Т е о р е м а 2.** Если выполняются условия теоремы (1), то для любых вещественных чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$  существует такое допустимое управление  $U$ , что для показателей Ляпунова системы (2) с этим управлением имеют место равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

В доказательстве этих теорем используются методы, предложенные в [6].

### Список литературы

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука. 1966. 576 с.
2. Смирнов Е. Я. Стабилизация программных движений. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1997. 308 с.
3. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси. 1999. 409 с.
4. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
5. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Т. 5. № 1. С. 102–119.
6. Попова С. Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир. 1989. 655 с.

Козлов Александр Александрович  
Институт математики НАН Беларуси,  
Республика Беларусь, Минск  
e-mail: kozlova@tut.by