И. Л. Гуревич, Некоторые задачи об истечении газа из сосуда с криволинейными стенками, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1970, выпуск 7, 111–115

https://www.mathnet.ru/kukz494

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 7 *Труды семинара по краевым задачам* *1970*

И. Л. ГУРЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ СОСУДА С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

В работах [1], [2] изучалась аппроксимация уравнений дозвукового движения газа, основанная на замене функции Чаплыгина ее приближенным выражением $(As+B)^4$. В этом случае основные формулы имеют следующий вид:

$$q=\frac{As+B}{ae^{-s}+be^{s}};\quad P=\frac{1}{q};\quad Q=a(As+B+A)e^{-s}-$$
$$-b(As+B-A)e^{s};$$
$$dx=P\vartheta\cos\theta d\Phi-Q\frac{\sin\theta}{\vartheta}d\Psi+\Psi\left(\cos\theta P\frac{d\vartheta}{ds}d\theta+\frac{Q}{\vartheta}\sin\theta d\vartheta\right);$$
$$dy=P\vartheta\sin\theta d\Phi+Q\frac{\cos\theta}{\vartheta}d\Psi+\Psi\left(\sin\theta P\frac{d\vartheta}{ds}d\theta-\frac{Q}{\vartheta}\cos\theta d\vartheta\right);$$
$$\Psi=\psi(As+B);\quad \vartheta=As+B;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\Psi}{\partial s};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial s}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta};\tag{1}$$
$$d\varphi=\vartheta d\Phi-\frac{d\vartheta}{ds}\Psi d\theta;\qquad d\psi=\frac{1}{\vartheta}d\Psi-\frac{d\vartheta}{\vartheta^2}\Psi.$$

Здесь q — скорость; θ — угол вектора скорости с осью x; x, y — координаты в физической плоскости; φ, ψ — потенциал скорости и функция тока; Φ, Ψ — действительная и мнимая части аналитической функции $W(\omega)$; ϑ, P, Q — вспомогательные функции; A, B, a, b — известные постоянные; $\omega=\theta+is$.

В дальнейшем используется выражение для кривизны линии тока, вытекающее из (1):

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{ae^{-s}+be^{s}}\left|\frac{d\theta}{d\Phi}\right|.\tag{2}$$

Принятая аппроксимация дает результаты лучшие, чем аппроксимация Чаплыгина ($A=0$), если в течении отсутствуют нулевые скорости.

Примером может служить истечение газа из сосуда конечной ширины, стенки которого имеют непрерывную касательную. Очевидно, что для расчета такого течения достаточно определить аналитические функции $W(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$, где $\zeta=\xi+i\eta$ — параметрическое комплексное переменное. Характерной особенностью задач об истечении является то, что заранее неизвестны области изменения W и ω.

Ниже коротко излагаются постановки некоторых задач и результаты их исследования. Полагается, что ось x направлена параллельно асимптотическому направлению струи на бесконечности, $s=0$ на границе струи, $\psi=0$ на верхней стенке, $\psi=Q$ на нижней.

§ 1. Симметричный сосуд образован прямолинейными параллельными стенками, оканчивающимися дугами оружности. Ширину сосуда на ∞ обозначим через L_1, радиус дуги — через R, центральный угол — через m.

Такая задача рассматривалась в [3] в аппроксимации Чаплыгина, и мы применяем в основном метод работы [3]. В качестве области изменения ζ берется верхний единичный полукруг. Длина дуги граничной полуокружности обозначается через ε и отсчитывается от точки (1, 0). Бесконечно удаленным точкам струи и сосуда соответствуют точки (0, 0) и $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$, точкам схода струи с верхней и нижней стенок — точки $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\pi$, точкам сопряжения полупрямых и дуг окружностей — точки $\varepsilon=\varepsilon^*$ и $\varepsilon=\pi-\varepsilon^*$, причем $0<\varepsilon^*<\pi/2$.

Представляя W в виде $W(\zeta)=\frac{QB}{\pi}\ln\left[-\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})\right]+W_1(\zeta)$ и учитывая (2), можно получить граничные условия для системы функций $\omega(\zeta)$ и $W_1=\Phi_1+i\Psi_1$:

$$\Psi_1=0,\ s=0\quad \text{при}\quad |\zeta|\leqslant 1,\ \eta=0;$$

$$\Psi_1=0,\ \frac{d\theta}{d\varepsilon}=-\frac{1}{R}\left(\frac{QB}{\pi}\operatorname{tg}\varepsilon+\frac{d\Phi_1}{d\varepsilon}\right)\ \text{при}\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon^*;$$

$$\Psi_1=QAs,\ \theta=0\quad \text{при}\quad \pi/2<\varepsilon\leqslant\pi-\varepsilon^*;$$

$$\Psi_1=0,\ \theta=0\qquad \text{при}\quad \varepsilon^*\leqslant\varepsilon<\pi/2;$$

$$\Psi_1=QAs,\ s(\varepsilon)=s(\pi-\varepsilon)\ \text{при}\ \pi-\varepsilon^*\leqslant\varepsilon\leqslant\pi.$$

$W_1(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ продолжаются на единичный круг, затем, выражая $s(\varepsilon)$ через $\frac{d\theta}{d\varepsilon}$ по формуле Дини, а $\Phi_1(\varepsilon)$ — через $\Psi_1(\varepsilon)$ по формуле обращения Гильберта, и используя (3), приходим к нелинейному интегральному уравнению относительно $s(\varepsilon)$ на сегменте $[0,\pi/2]$:

$$s(\varepsilon)=\frac{\lambda}{4(a+b)}\int_0^{\varepsilon^*}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2}}\right|(ae^{-s}+be^{s})\times$$

$$\times\left[\operatorname{tg}\varepsilon_1+\frac{A}{B}\int\limits_0^{\pi/2}s\,(\varepsilon_2)\,\frac{1+\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2}{(\cos\varepsilon_2+\cos\varepsilon_1)^2}\,d\varepsilon_2\right]d\varepsilon_1, \qquad (4)$$

где $\lambda=\dfrac{4Q\,(a+b)\,B}{\pi^2R}$.

Оказывается, что при достаточно малых значениях λ уравнения можно решать методом последовательных приближений, если на нулевое приближение принять $s\equiv 0$. Пренебрегая величинами порядка λ^2, найдены в первом приближении $s(\varepsilon)$, $\theta(\varepsilon)$, коэффициент сжатия струи и длина хорды, стягивающей граничную круговую дужку. Эти параметры выражаются рядами, члены которых связаны простыми рекуррентными соотношениями.

§ 2. Нижняя стенка сосуда представляет собой полупрямую, а верхняя образована параллельной ей полупрямой, заканчивающейся дугой окружности. Параметр ζ изменяется в таком же полукруге. Точкам схода соответствуют концы диаметра, бесконечно удаленной точке струи — точка (0, 0), точке сопряжения верхней полупрямой с дугой окружности — точка $\varepsilon=\varepsilon^*$, бесконечно удаленной точке сосуда — точка $\varepsilon=\varepsilon_0$, причем $0<\varepsilon^*<\varepsilon_0<\pi$.

Представляя W в виде $W(\zeta)=\dfrac{QB}{\pi}\ln\left[\cos\varepsilon_0-\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})\right]+$ $+\,W_1(\zeta)$ и учитывая (2), получаем граничные условия для $W_1(\zeta)=\Phi_1+i\Psi_1$ и $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1=0,\ s=0 && \text{при } |\xi|\leqslant 1,\ \eta=0;\\
\Psi_1=0,\ &\frac{d\theta}{d\varepsilon}=-\frac{1}{R}\left(\frac{QB}{\pi}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon-\cos\varepsilon_0}+\frac{d\Phi_1}{d\varepsilon}\right) && \text{при } 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon^*;\\
&\Psi=0,\quad \theta=0 && \text{при } \varepsilon^*\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0;\\
&\Psi=AQs(\varepsilon),\quad \theta=0 && \text{при } \varepsilon_0<\varepsilon<\pi.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Продолжение W и ω на единичный круг с последующим использованием формул Дини и Гильберта и условий (5) приводит к уравнению относительно $s(\varepsilon)$ на множестве $[0,\varepsilon^*]\cup$ $\cup[\varepsilon_0,\pi]$:

$$s(\varepsilon)=\frac{\lambda}{2(a+b)}\int\limits_0^{\varepsilon^*}\ln\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2}}\right|(ae^{-s}+be^{s})\times$$

$$\times\left[\frac{\sin\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_1-\cos\varepsilon_0}+\frac{A}{B}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\pi}s\,(\varepsilon_2)\,\frac{1-\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2}{(\cos\varepsilon_2-\cos\varepsilon_1)^2}\,d\varepsilon_2\right]d\varepsilon_1, \qquad (6)$$

где $\lambda=\dfrac{2QB\,(a+b)}{\pi^2R}$.

Доказывается сходимость метода последовательных приближений при достаточно малых значениях λ. В первом приближении определяются основные параметры течения.

§ 3. Рассматривается обратная задача об истечении из симметричного сосуда, когда задано распределение скорости по стенке в виде функции $q(l)$, где l — расстояние по стенке от точки схода. Как это обычно делается в обратных задачах, нетрудно получить зависимость $s=F(\Phi)$ при $\Psi=0$, т. е. на верхней стенке.

Соответствие точек в физической плоскости и на границе параметрического полукруга такое же, как в первой задаче, но отсутствует параметр ε^*. Применяя представление $W(\zeta)=$ $=\frac{QB}{\pi}\ln\left[-\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})\right]+W_1(\zeta)$, формулируем граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1=0,\ s=0 && \text{при}\quad |\xi|\leqslant 1,\ \eta=0;\\
&\Psi_1=0,\ s=F(\Phi) && \text{при}\quad 0\leqslant\varepsilon<\pi/2;\\
&\Psi_1=AQs(\varepsilon),\ s(\varepsilon)=s(\pi-\varepsilon) && \text{при}\quad \pi/2<\varepsilon\leqslant\pi.
\end{aligned}\qquad(7)$$

После продолжения на нижний полукруг по формуле Гильберта выражаем $\Phi_1(\varepsilon)$ через $\Psi_1(\varepsilon)$, что приводит к следующему уравнению относительно $\Phi(\varepsilon)$ на полусегменте $[0,\pi/2]$:

$$\Phi(\varepsilon)=-\frac{AQ}{\pi}\sin\varepsilon\int_0^{\pi/2}\frac{F[\Phi(\varepsilon_1)]}{\cos\varepsilon_1+\cos\varepsilon}d\varepsilon_1+\frac{QB}{\pi}\ln\cos\varepsilon. \qquad (8)$$

Ядро уравнения имеет неинтегрируемую особенность при $\varepsilon=\varepsilon_1=\pi/2$. В предположении достаточной гладкости функции $F(\Phi)$ методом Лере — Шаудера доказывается существование решения уравнения (8) в классе функций с логарифмической особенностью при $\varepsilon=\pi/2$. При дополнительных ограничениях на $F(\Phi)$ получена сходимость метода последовательных приближений.

§ 4. Ставится обратная смешанная задача: на участках стенок симметричного сосуда, примыкающих к свободным линиям тока, задано распределение $q(l)$, а остальные части стенок образуются параллельными полупрямыми. Область изменения ζ — верхняя полуплоскость. Бесконечно удаленным точкам сосуда и струи соответствуют начало координат и бесконечно удаленная точка в плоскости ζ, концам полупрямых — точки $(\pm 1, 0)$, точкам схода — $(\pm h, 0)$.

Параметр h должен определяться в ходе решения задачи. Как и в обратной задаче, получаем зависимость $s=F(\Phi)$ при $1\leqslant\xi\leqslant h$, $\eta=0$.

Записывая $W(\zeta)$ в виде $W(\zeta)=\frac{QB}{\pi}\ln\zeta+W_1(\zeta)$, выводим граничные условия на оси $\eta=0$:

$\Psi_1=0,\ s=0$ при $-\infty<\xi\leqslant -h,\quad h\leqslant\xi<\infty;$

$$\begin{array}{lll} \Psi_1 = 0,\ \theta = 0 & \text{при } 0 < \xi \leqslant 1; & \\ \Psi_1 = AQs,\ \theta = 0,\ s(\xi) = s(-\xi) & \text{при } -1 \leqslant \xi < 0; & (9) \\ \Psi_1 = 0,\ s = F(\Phi) & \text{при } 1 \leqslant \xi < h; & \\ \Psi_1 = AQs,\ s(\xi) = s(-\xi) & \text{при } -h \leqslant \xi \leqslant -1. & \end{array}$$

Функция $s(\varepsilon)$ при $0 < \xi \leqslant 1$ выражается по формуле Келдыша — Седова с учетом (9), причем условия ограниченности вблизи $\xi = 1$ выполняются автоматически. Применяя затем формулу обращения Гильберта для выражения $\Phi_1(\xi)$ через $\Psi_1(\xi)$ и используя (9) и только что полученную формулу, после некоторых преобразований получаем уравнение для функции $\Phi(\xi)$ на сегменте $[1, h]$

$$\Phi(\xi) = c + \frac{QB}{\pi}\ln\xi - \frac{AQ}{\pi}\int_1^h F[\Phi(t)] \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{\xi + t} - \frac{1}{\pi(\xi + t)}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\ln\frac{\xi(t-1)}{t(\xi+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\pi(\xi - t)}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\ln\frac{\xi(t+1)}{t(\xi+1)}\right\} dt. \tag{10}$$

Параметр c, как и h, должен определяться вместе с решением уравнения. При определенных ограничениях на $F(\Phi)$ доказывается существование и единственность значений параметров c и h и решения уравнения (10). Доказательство опирается на принцип сжатых отображений и теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sauer R. Unterschallströmungen um Profile bei quadratisch approximierter Adiabate. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch. Math. — naturw. Klasse, № 9, 1951.
2. Тумашев Г. Г., Фомин В. М., Шешуков Е. Г. Приближенный метод решения задач о течениях газа с дозвуковой скоростью, ИВУЗ, Авиационная техника, 1967, № 2.
3. Бунимович А. И. Об истечении с большими дозвуковыми скоростями. Ученые записки МГУ, т. III, вып. 152 (Механика), 1951.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.