



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Вариационный принцип и канонические переменные в магнитной гидродинамике,
Докл. АН СССР, 1970, том 194, номер 6, 1288–1289

<https://www.mathnet.ru/dan35748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

12 мая 2025 г., 22:05:57



В. Е. ЗАХАРОВ, Е. А. КУЗНЕЦОВ

**ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ**

(Представлено академиком Р. З. Сагдеевым 22 XII 1969)

Б. И. Давыдовым ⁽¹⁾ сформулирован вариационный принцип для гидродинамики идеальной жидкости и показано, что каноническими переменными являются пары (λ, μ) и (ρ, Φ) , где

$$v = \frac{\lambda}{\rho} \nabla \mu + \nabla \Phi.$$

В настоящей работе аналогичная задача решена для магнитной гидродинамики идеальной жидкости (м.г.д.).

Рассмотрим уравнения м.г.д.:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v + (v \nabla) v \right) = - \nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]; \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \rho v = 0; \quad (2)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot } [v, \mathbf{H}]; \quad (3)$$

$$\omega = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varepsilon) = \int dp / \rho.$$

Здесь ω — энтальпия, ε — внутренняя энергия.

Произведем замену переменных:

$$v = \frac{1}{\rho} [\mathbf{H}, \text{rot } S] + \nabla \Phi. \quad (4)$$

При любых ρ, v, \mathbf{H} из формулы (4) можно восстановить S и Φ , причем неоднозначно, с точностью до прибавления к Φ скаляра Φ_0 , к S — вектора S_0 , удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{\rho} [\mathbf{H}, \text{rot } S_0] + \nabla \Phi_0 = 0.$$

После подстановки формулы (4) в уравнение (1) получим

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v \nabla) \Phi - \frac{v^2}{2} + \omega(\rho) \right\} + \left[\frac{\mathbf{H}}{\rho}, \text{rot} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} - [v, \text{rot } S] + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \right\} \right] = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v \nabla) \Phi - \frac{v^2}{2} + \omega(\rho) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} - [v, \text{rot } S] + \Delta \Psi = 0 \quad (7)$$

вместе с уравнениями (2), (3). В уравнении (7) Ψ — произвольная функция координат и времени.

В силу формулы (5) любое решение системы (2), (3), (6), (7) порождает некое решение системы уравнений м.г.д. (1) — (3). В предположении о единственности решения Коши для системы (1) — (3) и системы (2),

(3), (6), (7) верно и обратное — любому решению системы (1) — (3) можно сопоставить некий класс решений системы (2), (3), (6), (7). Для этого достаточно по набору значений \mathbf{v} , \mathbf{H} , ρ в некоторый момент времени t_0 построить всевозможные наборы величин \mathbf{S} , Φ , удовлетворяющих формуле (4), и взять их в качестве начальных условий для (2), (3), (6), (7).

Таким образом, система уравнений (2), (3), (6), (7) эквивалентна системе уравнений м.г.д.

Выберем Ψ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (8)$$

Очевидно, это дает

$$\Psi = + \frac{1}{\Delta} \operatorname{div} [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{S}] + \Psi_0,$$

где Ψ_0 — произвольное решение уравнения Лапласа $\Delta \Psi_0 = 0$. В частном случае, когда при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{v} \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \rho_0$, $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_0$, величину Ψ_0 удобно выбрать так, чтобы $\partial \mathbf{S} / \partial t \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Очевидно, тогда $\Psi_0 = - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_0, \mathbf{r})$.

Рассмотрим функционал

$$E = \int \left\{ \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \Psi \operatorname{div} \mathbf{H} \right\} d\mathbf{r}. \quad (9)$$

Непосредственным варьированием этого функционала убеждаемся, что уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \Phi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\delta E}{\delta \rho}; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \mathbf{S}}; \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = - \frac{\delta E}{\delta \mathbf{H}} \quad (10)$$

совпадают с уравнениями (2) (6), (3), (8). Таким образом, переменные (ρ, Φ) и (\mathbf{H}, \mathbf{S}) являются парами канонически сопряженных величин, а функционал E — гамильтонианом.

Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int \left\{ \left(\mathbf{S}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} d\mathbf{r} - E$$

и построим функционал действия

$$S = \int \mathcal{L} dt,$$

минимизация которого задает вариационный принцип для уравнений м.г.д. Заметим, что для реального движения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, и функционал E совпадает с полной энергией жидкости.

В случае несжимаемой жидкости величина Φ исключается с помощью уравнения непрерывности

$$\Delta \Phi = - \operatorname{div} \frac{1}{\rho_0} [\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{S}].$$

Каноническими переменными являются (\mathbf{H}, \mathbf{S}) , а гамильтониан имеет вид

$$E = \int \left\{ \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \Psi \operatorname{div} \mathbf{H} \right\} d\mathbf{r}.$$

Поступило
27 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. И. Д а в ы д о в, ДАН, 69, № 2, 165 (1949).