В. Н. Родионов, А. М. Мандель, Г. А. Кравцова, Ограничение спектра масс фермионов в PT-симметричных системах и их применение в изучении темной материи, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 3, 473–488

DOI: 10.4213/tmf9563

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 198, № 3
март, 2019

© **2019 г. В. Н. Родионов*, А. М. Мандель†, Г. А. Кравцова‡**

ОГРАНИЧЕНИЕ СПЕКТРА МАСС ФЕРМИОНОВ В PT-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИЗУЧЕНИИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Сформулированы принципиальные положения неэрмитовой модели с γ_5-расширением массы фермионов, которые часто игнорируются при исследованиях этого вопроса. Последовательный подход к решению данной проблемы требует применения условия $m \leqslant M$, где M ограничивает весь спектр масс фермионов. Аналогичный подход был предложен в геометрической модели, которую можно рассматривать как первую PT-симметричную неэрмитову модель с γ_5-расширением массы. В обеих теориях возникают экзотические частицы. Подробное рассмотрение свойств этих частиц позволяет предположить, что они являются возможными кандидатами на роль составляющих темной материи. Также обсуждается простейшая оценка максимально возможного значения массы фермионов M.

Ключевые слова: ограничение спектра масс, две области PT-симметрии, парадокс двух масс, экзотические частицы.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9563

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время мы все чаще сталкиваемся с фундаментальными проблемами в физике, которые ранее считались практически решенными. Это можно отнести к таким достоверно установленным фактам, как, например, существование нейтринных осцилляций [1] и, следовательно, существование ненулевой массы нейтрино [2]. Более того, до сих пор не существует корректного объяснения некоторых результа-

*Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия. E-mail: rodyvn@mail.ru

†Московский государственный технологический университет “Станкин”, Москва, Россия. E-mail: arkadimandel@mail.ru

‡Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: gakr@chtc.ru

тов точных измерений масс нейтрино [3][1]. Еще одна серьезная проблема в теории – это необходимость объяснения природы темной материи. Данные факты диктуют необходимость минимального расширения Стандартной модели (СМ), которое широко обсуждается в литературе.

Модель с псевдоэрмитовым γ_5-расширением массы представляет собой одну из таких попыток. Эта модель интересна не только сама по себе, но также и тем, что она аккумулирует в себе последние достижения квантовой физики[2]. В дополнение к обычной эрмитовой массе m_1 модифицированное уравнение Дирака в данной модели содержит псевдоэрмитову компоненту $m_2\gamma_5$. Важно, что модифицированное уравнение Дирака получается стандартным способом, который использовал сам Дирак: нахождением квадратного корня из оператора Клейна–Гордона [14], [15].

Удивительно, что это уравнение полностью совпадает (вплоть до обозначений) с уравнением, полученным ранее Кадышевским [16] и его коллегами [17] в геометрической модели с фундаментальной массой. Как известно, идея о конечности массового спектра элементарных частиц впервые была предложена Марковым в 1965 г. [18]. Это ограничение было связано с планковской массой $M_{\text{Plank}} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19}$ ГэВ, где G – гравитационная постоянная, $\hbar$ – постоянная Планка и c – скорость света, и имело вид [18]

$$m \leqslant M_{\text{Plank}}. \tag{1}$$

Частицы с максимальной массой, которые автор назвал максимонами, занимают особое место среди элементарных частиц. В частности, концепция максимонов составляла основу марковского сценария ранней Вселенной.

Тем не менее условие (1) было первоначально чисто феноменологическим и не учитывалось при построении теории. В конце 1970-х годов Кадышевский предложил геометрический подход, в котором условие конечности массы в самом деле включалось в теорию [16]. В этом подходе марковская концепция максимальной массы рассматривалась как новый фундаментальный физический принцип квантовой теории поля (КТП) [17]. Условие конечности спектра масс частиц было постулировано в предлагаемой теории в виде

$$m \leqslant M, \tag{2}$$

где параметр максимальной массы (фундаментальная масса) представлял собой новую физическую константу. Эта величина рассматривалась как радиус кривизны пятимерного гиперболоида, поверхность которого является реализацией искривленного четырехмерного импульсного пространства. Используя для этого пространство анти-де Ситтера, легко получить соотношение

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2, \tag{3}$$

откуда следует, что неравенство (2) автоматически выполняется на массовой поверхности свободной частицы $p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ (здесь и ниже $c = \hbar = 1$).

---

[1] В частности, см. результаты Троицкого эксперимента, в котором систематически воспроизводился отрицательный квадрат масс нейтрино в центральной точке области распределения энергии нейтрино. Конечный результат Троицкого эксперимента можно представить в виде $m_{\text{nu}}^2 = -0.67 \pm 1.89_{\text{stat}} \pm 1.68_{\text{syst}}$ [4].

[2] В частности, было установлено, что эрмитовость квантовых операторов является достаточным, но не необходимым условием действительности спектра собственных значений гамильтониана [5], [6], что стимулирует интерес к такого рода моделям (см., например, работы [7]–[13]).

Важно, что в геометрической модели, содержащей ограничения на фермионные массы, можно наблюдать некие новые частицы, названные “экзотическими фермионами”. Было немедленно высказано предположение о том, что появление новых фермионов можно отнести исключительно к развитию геометрических представлений.

Но оказалось, что геометрический подход не является единственным способом получения экзотических частиц в теории [7]–[10]. Действительно, развитие псевдоэрмитовой PT-симметричной квантовой теории, упомянутой выше, показало, что эти частицы возникают как следствие конечности спектра масс элементарных частиц. Таким образом, максимальная масса существует в обеих теориях. Поскольку теория с максимальной массой претендует на роль расширения СМ, необходимы ее экспериментальные доказательства. Очевидно, что только эксперимент может показать, истинна ли эта теория. Таким образом, обнаружение максимальной массы приобретает большую актуальность.

Одна из возможностей обнаружения максимонов связана с поиском темной материи в космических лучах. Мы доказываем, что максимоны (и экзотические частицы) могут являться важной частью темной материи. Заметим, что несколько исследовательских групп в мире уже ищет следы темной материи в космических лучах. Самым амбициозным проектом такого рода является детектор IceCube [19], расположенный на Антарктическом щите Южного полюса. Аппаратура, используемая в этом проекте, состоит из более чем пяти тысяч высокочувствительных датчиков. Таким образом, в целом детектор имеет объем, равный кубическому километру льда в Антарктиде, и исследователи надеются, что этот галактический эксперимент действительно поможет исследовать источники космических лучей, расположенные в дальнем космосе.

Другое направление поиска в астрофизических экспериментах связано с гигантскими магнитными полями, создаваемыми пульсарами и магнетарами. Речь идет о процессах распространения фермионов в магнитных полях с интенсивностью порядка 10^{15}–10^{16} Г [20] (см. также статьи [21], [22]). В частности, их можно связать с результатами экспериментов по изучению внутренней структуры сверхновых звезд и процессов формирования черных дыр, а также всплесков гамма-излучения. Современные теории предполагают, что электромагнитные взаимодействия в этих объектах гарантируют ускорение частиц до экстремально высоких энергий. Согласно некоторым астрофизическим оценкам эти энергии могут достигать значений 10^6–10^9 ГэВ [19]. Вполне вероятно, что массы новых частиц, которые можно рассматривать в качестве кандидатов на роль составляющих темной материи, также попадают в этот диапазон.

Проведение лабораторных экспериментов для прямого поиска максимонов, которые могут быть связаны с новыми физическими явлениями, возможно при энергиях в несколько ТэВ. Заметим, что это требование является центральным пунктом в исследовательской программе для Большого адронного коллайдера (БАК) в ЦЕРН [23]. Однако совершенно ясно, что прямой эксперимент по поиску частиц с максимальной массой M ограничен возможностью создания сверхмощных ускорителей. Таким образом, косвенный поиск существования экзотических частиц очень важен, поскольку их обнаружение может привести к открытию и максимальной массы как таковой. Заметим, что свойства экзотических частиц в корне отличаются от соответствующих характеристик их обычных партнеров, известных в СМ. Мы утверждаем, что косвенные эксперименты с низкими энергиями могут также позволить обнаружить экзотические частицы и, следовательно, существование максимальной массы. Псевдоэрмитова теория с γ_5-расширением массы дает возможность таких расчетов. В частности, этот поиск возможен благодаря вычислению энергетического спектра нейтральных фермионов, обладающих аномальными магнитными моментами (АММ). Магнитное взаимодействие с такими объектами может значительно усиливаться пропорционально вкладу их неэрмитовых компонент массы [21], [22].

По нашим оценкам максимальная масса может иметь порядок $M = 2 \cdot 10^{14}$ ГэВ [24]. Но если предположить, что магнитный момент нейтрино несколько больше (см., например, работу [25]), то оценка максимальной массы может находиться в области астрофизических наблюдений ($M \sim 10^8$ ГэВ, см. работу [24]).

Очевидно, дальнейшее развитие теории, которая начиналась с геометрической формулировки, предложенной Кадышевским, может дать конкретные рекомендации для будущих экспериментов с электромагнитными полями [21], [22], [26], ориентированных на поиск экзотических фермионов [10] в обычном импульсном пространстве. В частности, лабораторные эксперименты с низкоэнергетическими поляризованными нейтрино, распространяющимися в магнитном поле, можно провести уже в ближайшее время. Возможно, прецизионные эксперименты по измерению масс нейтрино (такие, например, как Троицкий эксперимент с тритием [3], [27]), в которых изучаются слабо возбужденные потоки нейтрино в сильных магнитных полях [21], [22], прольют свет и на тайну отрицательных значений квадратов масс нейтрино [24].

Еще одно чрезвычайно важное направление исследований связано с разработкой новых приложений неэрмитова подхода к нерелятивистскому пределу модифицированных уравнений Дирака. В этом случае возникает необычная ситуация с определением релятивистских и нерелятивистских параметров массы частицы. В результате перехода к нерелятивистскому пределу мы имеем в случае экзотических частиц две существенно разные массы (парадокс двух масс).

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы исследуем неэрмитовые системы с γ_5-расширением массы. Мы изучаем модифицированные уравнения Дирака, полученные обычным методом Дирака, и показываем, что они полностью совпадают (с точностью до обозначений) с аналогичными уравнениями, полученными Кадышевским в его геометрическом подходе, разработанном для пространства де Ситтера. Этот факт не может быть случайным, и он имеет подтверждение среди прочих выводов нашей псевдоэрмитовой модели.

В разделе 3 мы рассматриваем верхний предел спектра масс фермионов в неэрмитовой модели и нерелятивистский предел модифицированного уравнения Дирака в электромагнитном поле. Псевдоэрмитово расширение обычного уравнения Дирака может содержать не только небольшие, но и значительные различия между значениями релятивистской массы m и нерелятивистской массы m^*. Мы показываем, что m и m^* равны только в пределе обычного уравнения Дирака.

В разделе 4 обсуждается упомянутый “парадокс двух масс” m и m^*, который возникает в данной модели в случае экзотических частиц. Важно, что релятивистская и нерелятивистская массы обладают совершенно разными свойствами. Это различие отсутствует только тогда, когда антиэрмитова масса $m_2 \to 0$. Наш подход обеспечивает выход из этой сложной ситуации путем предположения, что различие наблюдаемых массовых параметров, характеризующих фермионы, является ключевым фактором в псевдоэрмитовой теории.

В разделе 5 рассматривается киральное представление модифицированного уравнения Дирака. Показано, что процедура неэрмитова расширения массы неизбежно приводит к нарушению слабого принципа эквивалентности, т. е. вызывает неравенство гравитационной и инертной масс фермионов. Однако если связать эрмитову и неэрмитову составляющие массы путем введения максимальной массы, появляется возможность сохранить принцип эквивалентности для фермионов СМ с высокой точностью. Следует отметить, что для экзотических частиц, масса которых оказывается сопоставима с максимальной массой, свойства "левых" и "правых" частиц сильно отличаются от свойств обычных частиц. Если они представлены в структуре темной материи, то существует огромная разница между их левой и правой компонентами массы. В принципе, этот факт может оказаться существенным для их обнаружения.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИРАКА ДЛЯ НЕЭРМИТОВЫХ ПАРАМЕТРОВ МАССЫ

Рассмотрим модифицированные уравнения Дирака для свободных массивных частиц, используя γ_5-факторизацию обычного оператора Клейна–Гордона. В этом случае мы действуем аналогично известной процедуре Дирака [14], [15]. Если не ограничивать выбор только эрмитовыми операторами, то можно представить оператор Клейна–Гордона в виде произведения двух коммутирующих матричных операторов с γ_5-расширением массы

$$\partial_\mu^2 + m^2 = (i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2)(-i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + \gamma_5 m_2), \tag{4}$$

где физическая масса частицы m выражается через параметры m_1 и m_2:

$$m^2 = m_1^2 - m_2^2. \tag{5}$$

Заметим, что существует еще одно расширение оператора Клейна–Гордона, о котором мы поговорим позже.

Для волновой функции, удовлетворяющей уравнению Клейна–Гордона, имеет место равенство

$$(\partial_\mu^2 + m^2)\widetilde{\psi}(x,t) = 0, \tag{6}$$

и мы можем потребовать, чтобы она также удовлетворяла одному из уравнений первого порядка

$$(i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2)\widetilde{\psi}(x,t) = 0, \qquad (-i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + \gamma_5 m_2)\widetilde{\psi}(x,t) = 0. \tag{7}$$

Конечно, модифицированные уравнения Дирака (7) имеют менее общий вид, чем уравнение (6), и хотя каждое решение одного из уравнений (7) удовлетворяет (6), обратное неверно. Также очевидно, что гамильтониан, связанный с уравнениями (7):

$$\widehat{H} = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \hat{\beta}(m_1 + \gamma_5 m_2), \tag{8}$$

оказывается неэрмитовым в результате появления в нем γ_5-матрицы[3)]. Здесь $\alpha_i = \gamma_0\gamma_i$, $\beta = \gamma_0$ и $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Из равенства (10) легко видеть, что масса m в (6) действительна, если выполняется неравенство $m_1 \geqslant m_2$.

Но эта область содержит описание не только обычных частиц, но и экзотических, которые не удовлетворяют обычному уравнению Дирака. Однако возможно более точно определить условие PT-симметрии, которое позволяет разделить обычные и экзотические частицы [9]. Действительно, из простого алгебраического соотношения $(m^2 + m_2^2)/2 \geqslant \sqrt{m^2 m_2^2}$ можно вывести неравенство

$$m \leqslant m_{\max} = \frac{m_1^2}{2m_2} \tag{9}$$

(см. статью [7]). Условие (9) становится ограничением на физическую массу m, если постулировать эквивалентность между $m_{\max}$ и максимальной массой M в теории Кадышевского [9]. Заметим, что этот "физический постулат" позволяет разрешить некоторые трудности геометрической теории и придать физический смысл рассматриваемой алгебраической модели.

Существует другое разложение оператора Клейна–Гордона с использованием γ_5-матрицы:

$$\partial_\mu^2 + m^2 = (i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - i\,\gamma_5 m_2)(-i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + i\,\gamma_5 m_2),$$

где физическая масса частицы m также выражается через параметры m_1 и m_2:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2. \tag{10}$$

В этом случае мы получаем уравнения

$$(i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - i\,\gamma_5 m_2)\widetilde{\psi}(x,t) = 0, \qquad (-i\,\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + i\,\gamma_5 m_2)\widetilde{\psi}(x,t) = 0,$$

и здесь мы имеем дело с эрмитовым гамильтонианом

$$\widehat{H} = \widehat{H}^+ = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}(m_1 + i\gamma_5 m_2). \tag{11}$$

Кроме того, известен альтернативный формализм для рассмотрения систем, определяемых неэрмитовыми гамильтонианами, согласно которому действительность спектра для неэрмитовой системы получается благодаря так называемым псевдоэрмитовым свойствам гамильтониана [13]. Гамильтониан $\widehat{H}$ называется η-псевдоэрмитовым, если он удовлетворяет условиям

$$\widehat{H}_0 = \eta\widehat{H}\eta^{-1}, \qquad \widehat{H}_0 = \eta^{-1}\widehat{H}^+\eta, \tag{12}$$

где η – линейный эрмитов оператор, а H_0 – эрмитов оператор. Из условий (12) можно также получить равенство $\eta_0\widehat{H}\eta_0^{-1} = \widehat{H}^+$, где $\eta_0 = \eta^2$.

В рассматриваемом случае (8), используя стандартный дираковский гамильтониан $\widehat{H}_0 = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m$, мы получаем неэрмитов оператор $\eta = e^{\gamma_5\alpha/2}$, где α определяется

[3)] В геометрической теории Кадышевского с фундаментальной массой также возникает гамильтониан (8) [17]. Обозначения m_1 и m_2 в нем связаны с физической массой m и фундаментальной массой M [17] (см. в том числе работу [8]). Имеет место также соотношение $M = m_1^2/2m_2$.

формулой $\cos\alpha = \sqrt{1 - m^2/m_{\max}^2}$. Однако в случае (11) операторы $\widehat{H}$ и $\widehat{H}_0$ связаны унитарным преобразованием $\eta = e^{i\gamma_5\alpha/2}$.

Интересно сравнить эти формулы с результатами, полученными в геометрическом подходе к квантовой теории поля [28], где уравнения для скалярного и спинорного полей исследованы в искривленном пространстве импульсов де Ситтера с различной кривизной. Действительно, во вспомогательном плоском 5-пространстве с декартовыми координатами $(p, \vec{p}, p_4)$ возникают две возможности:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + p_5^2 = M^2$$

(случай положительной кривизны $R = 1/M^2$),

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 - p_5^2 = -M^2$$

(случай отрицательной кривизны $R = -1/M^2$).

Гамильтониан (8) возникает в модели с положительной кривизной, и его можно представить в виде $H = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \hat{\beta} m e^{\gamma_5\alpha}$. Гамильтониан (11) соответствует случаю отрицательной кривизны [7].

Теперь мы можем подвести итог рассмотрению различных подходов к γ_5-расширениям обычной теории Дирака. Модель (8) соответствует геометрической теории с максимальной массой в случае импульсного пространства де Ситтера с положительной кривизной. Здесь гамильтониан (8) связан с обычным гамильтонианом Дирака неунитарным преобразованием $\eta = e^{\gamma_5\alpha/2}$. В случае геометрической теории с отрицательной кривизной появляется гамильтониан (11). Она унитарно эквивалентна обычной теории Дирака (см. также статью [28]).

Кратко обсудим вопрос описания движения дираковских частиц, если их собственный магнитный момент отличается от магнетона Бора. Как было показано Швингером [29], уравнение Дирака для частиц во внешнем электромагнитном поле A^{ext} с радиационными поправками можно записать в виде

$$(\mathcal{P}\gamma - m)\Psi(x) - \int \mathcal{M}(x, y \mid A^{\mathrm{ext}})\Psi(y)\,dy = 0, \tag{13}$$

где $\mathcal{M}(x, y|A^{\mathrm{ext}})$ – массовый оператор фермиона во внешнем поле и $\mathcal{P}_\mu = p_\mu - eA_\mu^{\mathrm{ext}}$. Из уравнения (13) можно получить модифицированное уравнение путем использования разложения массового оператора в ряд по eA^{ext} с точностью до линейных по полю слагаемых. Это уравнение сохраняет релятивистскую ковариантность и согласуется с феноменологическим уравнением, полученным Паули в ранних работах.

Суммируя вышесказанное, перечислим следующие важные моменты (см. также [9]).

1. Возникает вопрос, можно ли описать физическую частицу с массой m, используя гамильтониан (8) с параметрами m_1 и m_2. Ответ оказывается положительным, если ввести параметр $m_{\max}$. В этом случае если $m_{\max}$ равно M, мы можем описать частицу, используя геометрическую теорию с ограниченной массой в пространстве анти-де Ситтера. Эти две теории очевидным образом оказываются связаны между собой.

2. Вводя параметр $m_{\max}$, мы можем включить в алгебраический подход описание экзотических частиц, которые ранее появлялись только в геометрической теории

с ограниченной массой. Это снова указывает на то, что эти две теории тесно связаны между собой.

3. Введение параметра $m_{\max}$ позволяет для данной модели уточнить область PT-симметрии: это дает возможность разделить подобласти, отвечающие обычным и экзотическим частицам.

4. Поскольку гамильтониан (8) является псевдоэрмитовым, необходимо ввести модифицированное скалярное произведение стандартным образом.

5. Мы решили задачу на собственные значения (т. е. задачу о значениях энергии) для рассматриваемого гамильтониана и нашли его собственные векторы в виде плоской волны. Заметим, что уровни энергии совпадают с дираковскими, а собственные векторы связаны с собственными дираковскими векторами неунитарными преобразованиями.

Рассмотрим теперь модель массивных фермионов с γ_5-расширением массы вида $m \to m_1 + \gamma_5 m_2$, принимая во внимание взаимодействия их зарядов и АММ с электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$:

$$\left(\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - m_1 - \gamma_5 m_2 - \frac{\Delta\mu}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\Psi(x) = 0,$$

где $\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \mu_0(g-2)/2$. Здесь μ – магнитный момент фермиона, g – его гиромагнитный фактор, $\mu_0 = e/2m$ – магнетон Бора и $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$. Феноменологическая константа $\Delta\mu$, введенная Паули, становится частью уравнения и имеет стандартную интерпретацию с точки зрения КТП.

Что касается лагранжева формализма в КТП, можно отметить следующее. Плотность функции Лагранжа, соответствующая уравнениям (7) (см. также статьи [8], [9]), имеет вид

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar\psi(x)\gamma^\mu\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar\psi(x)}{\partial x^\mu}\,\gamma^\mu\psi(x)\right) - \bar\psi(x)(m_1 + m_2\gamma_5)\psi(x),$$

что полностью соответствует теории Кадышевского [17] (см. также работу [30]). Последовательное квантование для этой теории имеет некоторые специфические черты и находится в стадии рассмотрения.

3. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА СПЕКТРА МАСС ФЕРМИОНОВ В НЕЭРМИТОВЫХ МОДЕЛЯХ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Как уже упоминалось, согласно элементарным физическим соображениям в данной неэрмитовой модели параметры m, m_1 и m_2 нельзя считать совершенно произвольными. Другими словами, модифицированное уравнение Дирака может описывать реальные фермионные частицы только в ограниченной области значений m, m_1 и m_2. Во-первых, положительная определенность наблюдаемой релятивистской массы требует очевидного ограничения $m_2 \leqslant m_1$. Во-вторых, фермионная масса должна также удовлетворять условию $m \leqslant m_1$. Наконец, из условия (10) следует, что массы m_1, m_2 и m могут быть напрямую связаны как стороны “прямоугольного треугольника”.

В большинстве случаев нет необходимости находить точные решения модифицированного уравнения Дирака с неэрмитовым γ_5-расширением массы. Действительно, мы можем ограничить наше рассмотрение нерелятивистскими поправками с использованием разложений $\sim v/c$ и $\sim v^2/c^2$ (см. известную монографию [31]). Ниже мы получаем это разложение из точного релятивистского уравнения в электромагнитном поле A_μ. Действительно, представляя функцию Ψ как $\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{-i(E+m)t}$, находим

$$(E+m)\Psi(r) = [\vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}\,) + \beta(m_1 + \gamma_5 m_2) - V]\Psi(r),$$

где E – энергия фермиона без учета энергии покоя, V – потенциальная энергия. Рассмотрим представления четырехкомпонентной функции Ψ в следующем виде: $\Psi = \binom{\varphi}{\chi}$, где φ и χ превращаются в двухкомпонентные функции. Принимая во внимание, что

$$\alpha\Psi = \begin{pmatrix} \sigma\chi \\ \sigma\varphi \end{pmatrix}, \qquad \beta\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix}, \qquad \beta\gamma_5\Psi = \begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

и используя стандартное представление для матриц α, γ и γ_5, можно записать равенства $(E + m - m_1 + V)\varphi = [\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}\,) - m_2]\chi$ и

$$(E + m + m_1 + V)\chi = [\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}\,) + m_2]\varphi, \tag{14}$$

где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули. Выражая χ из (14), получаем выражение

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}\,) + m_2}{m + m_1}\left(1 + \frac{E+V}{m+m_1}\right)^{-1}\varphi.$$

Принимая во внимание, что в нерелятивистском пределе $E + V \ll m + m_1$, имеем

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}\,) + m_2}{m + m_1}\varphi$$

вплоть до слагаемых, квадратичных по скорости фермиона (пропорциональных v^2/c^2). Используя далее равенство (см. известную книгу [31]) $(\vec{\sigma}\hat{\vec{a}}\,)(\vec{\sigma}\hat{\vec{b}}\,) = \hat{\vec{a}}\hat{\vec{b}} + i\vec{\sigma}[\hat{\vec{a}} \times \hat{\vec{b}}\,]$ и применяя соотношение $\hat{\vec{a}} = \hat{\vec{b}} = \hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}$, получаем выражение $[\vec{\sigma}(\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\,)]^2 = (\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\,)^2 - e\hat{\vec{\sigma}}\vec{H}$. Следовательно, в нерелятивистском пределе для двухкомпонентной волновой функции мы имеем

$$E\varphi(r) = i\,\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(r)e^{-iEt}] = \widehat{H}\varphi(r) = \left[\frac{(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\,)^2}{2m^*} - \frac{e\vec{\sigma}\vec{H}}{2m^*} + V\right]\varphi(r).$$

Отсюда можно легко видеть, что параметр [32]

$$m^* = \frac{m + m_1}{2} \geqslant m \tag{15}$$

играет роль массы в полученных нерелятивистских уравнениях. Это значение существенно отличается от релятивистской массы m, определенной в формуле (10). Подчеркнем, что это отличие не связано со значением скорости частицы.

Отметим, что наши результаты, полученные в нерелятивистском приближении неэрмитовой модели с γ_5-расширением массы, очевидным образом противоречат основным положениям работ [11], [12], где аналогичные вопросы были рассмотрены с традиционной точки зрения релятивистской концепции γ_5-расширения массы. В этих работах, несмотря на использование тех же неэрмитовых представлений, идея возможного существования максимальной массы не высказывалась. Такая постановка вопроса приводит к необоснованному представлению о том, что выражение для релятивистской массы является абсолютным и справедливым во всех случаях движения частиц, что уже само по себе является заблуждением. Во-вторых, псевдоэрмитово расширение уравнения Дирака может содержать не только небольшие, но и огромные различия между релятивистскими и нерелятивистскими массами. В частности мы можем найти, что массы m и m^* равны между собой только в пределе обычного уравнения Дирака, т. е. при $m_2 \to 0$ и $m_1 \to m$.

4. ПАРАДОКС "ДВУХ МАСС" И РОЛЬ НОВЫХ ЧАСТИЦ В СТРУКТУРЕ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Обсудим теперь парадокс, возникающий в связи с разницей между двумя массами в рассматриваемой модели. Важно, что релятивистская и нерелятивистская массы отражают абсолютно разные свойства. Эта разница проявляется всегда, когда антиэрмитова масса $m_2 \neq 0$. Используя соотношения (5) и (15), а также выражение для максимальной массы, мы можем выразить все массовые компоненты в терминах отношения релятивистской массы к максимальной массе фермиона (см. работы [7]–[9]). Тогда легко видеть, что нерелятивистская масса также имеет два значения в зависимости от того, является ли частица обычной или экзотической [32]:

$$\nu^* = \frac{m^*}{m_{\max}} = \frac{\nu}{2} + \sqrt{\frac{1 \mp (1-\nu^2)^{1/2}}{2}}\,, \tag{16}$$

где $\nu = m/m_{\max}$. Верхний знак "$-$" возникает при описании обычных частиц. В этом случае существует предел $m_{\max} \to \infty$ при неэрмитовой массе $m_2 \to 0$.

Нижний знак "$+$" в формуле (16) соответствует экзотическим партнерам обычных фермионов, когда такой предел не существует. Соответствующие графики показаны на рис. 1. Видно, что для обычных частиц разность между релятивистской и нерелятивистской массами пренебрежимо мала, если $\nu \ll 1$. При этом условии уравнение (16) для обычной частицы дает соотношение

$$\nu^* - \nu \approx \frac{\nu^3}{16} + \frac{7\nu^5}{256} + O(\nu^7). \tag{17}$$

Данное выражение – ключевой момент неэрмитовой теории [32]. В нашем подходе ограничение на параметры m, m_1 и m_2 позволяет объяснить парадокс двух масс, где, с одной стороны, имеется релятивистская масса $m = \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$, а с другой – нерелятивистская масса $m^* = (m + m_1)/2$. Существование максимальной массы позволяет естественным образом найти правильный ответ, но в отсутствие этого ограничения разница между релятивистской и нерелятивистской массами может привести к парадоксальным результатам даже для обычных частиц. Этот факт является важной проверкой модифицированной теории Дирака. По нашему мнению найти другое объяснение этого парадокса крайне сложно.

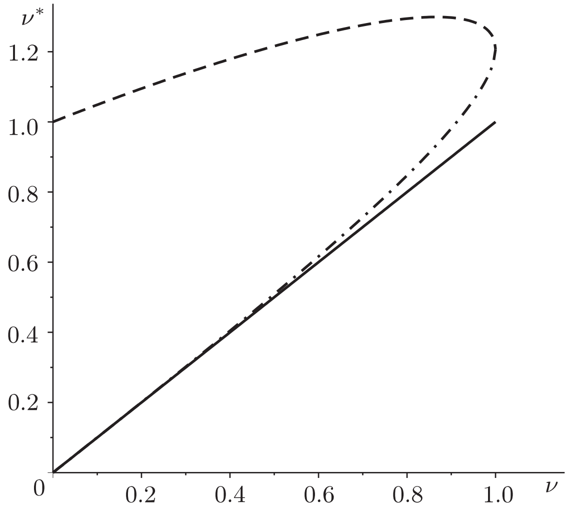

Рис. 1. Характер изменений релятивистской массы (сплошная линия) и нерелятивистской массы для обычных частиц (штрихпунктирная линия), а также экзотических частиц (штриховая линия). В случае наблюдаемых частиц СМ с малыми значениями масс линии, соответствующие нерелятивистским и релятивистским массам, практически идентичны.

Экзотические частицы, описанию которых соответствует нижний знак в формуле (16) при $\nu^* = 1 + \nu/2$, имеют необычные свойства. Нерелятивистская масса этих частиц сравнима с максимальной массой: $m^* \sim m_{\max}$. Это означает, что даже очень сильные электромагнитные поля могут сообщить им лишь незначительное ускорение. Следовательно, они практически не излучают электромагнитных волн. В то же время их "гравитационный заряд" определяется их релятивистской массой, которая сопоставима с обычными массами частиц $m = \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$. Очевидно, эта масса определяет интенсивность рождения и уничтожения частиц. Следовательно, эти частицы практически не взаимодействуют с электромагнитными полями, но им свойственно гравитационное взаимодействие на уровне обычных частиц. Это, на наш взгляд, делает их очевидными кандидатами на важную роль в структуре темной материи [32].

5. КИРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Исходное модифицированное уравнение Дирака можно представить несколько иначе. Для этого достаточно выполнить линейное преобразование $m_{1(2)} = m_{\mathrm{r}} \pm m_\ell$ в уравнениях (4) и (7) [32]. Так как операторы $P_{\mathrm{r}(\ell)} = (I \pm \gamma_5)/2$ являются проекционными операторами, где I – единичная матрица, уравнение Дирака естественным образом распадается на систему из двух уравнений. Представляя дираковский биспинор в виде столбца двухкомпонентных спиноров $\Psi = \binom{\varphi}{\chi}$, как в разделе 3, и используя стандартное представление для γ-матриц, можно получить формулы

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i\vec{\sigma}\,\nabla\chi + (m_{\mathrm{r}} + m_\ell)\varphi - (m_{\mathrm{r}} - m_\ell)\chi, \qquad i\frac{\partial\chi}{\partial t} = i\vec{\sigma}\,\nabla\varphi + (m_{\mathrm{r}} - m_\ell)\varphi - (m_{\mathrm{r}} + m_\ell)\chi.$$

Действуя проекционными операторами на исходные уравнения, записанные в виде

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\vec{\alpha}\mathbf{p} + 2m_\ell\beta P_\mathrm{r} + 2m_\mathrm{r}\beta P_\ell]\psi,$$

и находя также сумму и разность полученных уравнений, полагая $\xi(\eta) = \varphi \pm \chi$, мы получаем следующую систему [32]:

$$i\,\frac{\partial\xi}{\partial t} - i\vec{\sigma}\ \bigtriangledown\xi = 2m_\mathrm{r}\eta, \tag{18}$$

$$i\,\frac{\partial\eta}{\partial t} + i\vec{\sigma}\ \bigtriangledown\eta = 2m_\ell\xi. \tag{19}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений Вейля только наличием ненулевого значения "левой" $m_\ell = 1/2(m_1 - m_2)$ и "правой" $m_\mathrm{r} = 1/2(m_1 + m_2)$ масс. Естественно, представляется чрезвычайно соблазнительным использовать произвол исходных параметров m_1 и m_2 для описания безмассовых частиц Вейля. Эта операция была проведена авторами работы [12]. В частности, они высказались в поддержку того, что при $m_1 = \pm m_2$ система, аналогичная системе (18), (19), описывает безмассовые правые или левые нейтрино. Тем не менее при данном подходе мы сталкиваемся с довольно сложной ситуацией.

Например, пусть $m_1 = m_2 \neq 0$. Тогда не только левая масса $m_\ell = 0$, но и релятивистская масса $m = 2\sqrt{m_\ell m_\mathrm{r}}$ также равна нулю. В этом случае уравнение (19) фактически становится обычным двухкомпонентным уравнением Вейля. Но нерелятивистская масса, равная $m^* = (m + m_1)/2$, вообще говоря, не стремится к нулю, поскольку m_1 может иметь ненулевое значение. По-видимому, поиск физического смысла в такой ситуации вряд ли может оказаться успешным при любых значениях m_1 и m_2. Действительно, релятивистские и нерелятивистские массы становятся нулевыми, только если $m_1 = m_2 = 0$, что соответствует известному случаю обычного безмассового дираковского нейтрино. Тем не менее отметим, что в неэрмитовом подходе случай $m_1 = m_2$ на самом деле можно реализовать, даже если $m_1 = m_2 \neq 0$, но только для $m_1 = m_2 = 2m_\mathrm{max}$, т.е. для экзотических безмассовых нейтрино ($\widetilde{m}_\nu \approx 0$), массовые компоненты которых m_1 и m_2 равны удвоенному значению максимальной массы (см. работы [9], [10]).

Таким образом, в нашей модели с максимальной массой такой парадокс невозможен в принципе [32]. Графики зависимости правых и левых масс для случая экзотических частиц представлены на рис. 2. Соответствующие выражения получены из формул (5) и (15), а параметр $m = \nu m_\mathrm{max}$, как и в предыдущем разделе, задается как $\nu_\ell = m_\ell/m_\mathrm{max} = \mu(1-\mu)$, $\nu_\mathrm{r} = m_\mathrm{r}/m_\mathrm{max} = \mu(1+\mu)$, где $\mu = \sqrt{1 \mp (1-\nu^2)^{1/2}/2}$. Как и ранее, здесь верхний знак "$-$" соответствует обычным частицам, а нижний знак "$+$" – экзотическим. Легко видеть, что левая и правые массы практически одинаковы для наблюдаемых частиц при $\nu \ll 1$ (см. рис. 3): $\nu_{\ell(\mathrm{r})} \approx \nu/2 \mp \nu^2/4$, т.е. они с большой точностью соответствуют обычным уравнениям Дирака. Наоборот, разница между левой и правой массами для экзотических частиц с теми же значениями $\nu \ll 1$ огромна (см. рис. 2): $\nu_\ell \approx \nu^2/8 \to 0$, $\nu_\mathrm{r} \approx 2 - 3\nu^2/8$. Если экзотические частицы связаны с темной материей, как мы полагаем, то их "фон" должен быть, по-видимому, связан с левой поляризацией, но тем не менее пока еще слишком рано делать столь далеко идущие выводы.

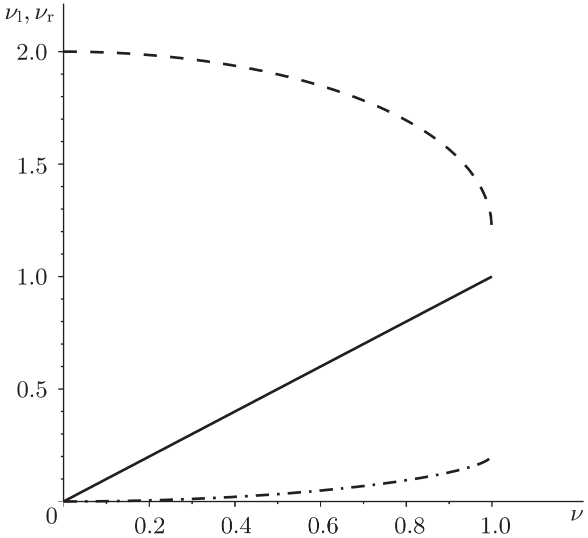

Рис. 2. Характер изменений релятивистской массы (сплошная линия), левой массы (штрихпунктирная линия) и правой массы (штриховая линия) для экзотических частиц. Можно видеть, что правые массы в этом случае имеют огромные значения $m_r > m_{max}$, а левые массы очень малы и намного меньше массы известных лептонов.

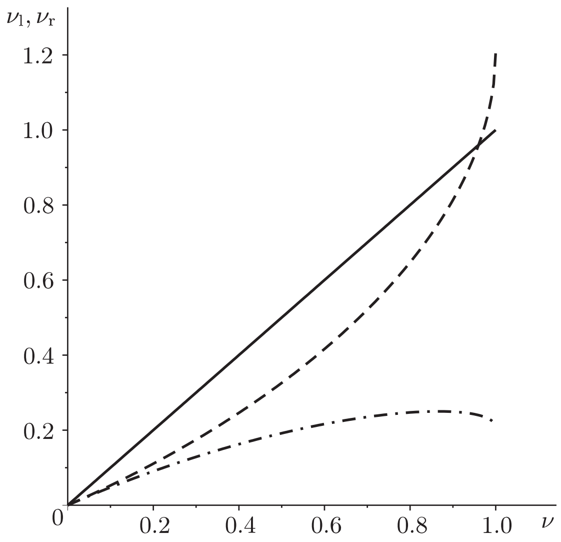

Рис. 3. Характер изменений релятивистской массы (сплошная линия), левая масса (штрихпунктирная линия) и правая масса (штриховая линия) для обычных частиц. Левая и правая массы в этом случае практически совпадают для легких частиц, которые соответствуют обычному дираковскому уравнению.

Наконец, отметим, что киральное представление рассматриваемой модели допускает несколько иное толкование процесса “расширения” уравнения Дирака. Действительно, введение в него дополнительного неэрмитова слагаемого $\sim m_2\gamma_5$ (а значит, ограничение спектра масс фермионов) эквивалентно введению разности между левой и правой массами частиц. Эта разница, которая выглядит вполне естественной, в результате получается ненаблюдаемой для обычных частиц и чрезвычайно большой для экзотических частиц.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя рассмотренный подход к изучению модифицированного уравнения Дирака, мы можем сделать следующие выводы. Введение неэрмитова слагаемого в данное уравнение эквивалентно введению разности между левыми и правыми массами частиц (в смысле формул (18), (19)). Неизбежным следствием этого является парадокс различия между релятивистскими и нерелятивистскими массами, которые представляют собой различные комбинации эрмитовых и неэрмитовых массовых компонент. Полученные результаты создают особенно сложную ситуацию, когда релятивистская (гравитационная) масса обычных частиц обращается в нуль, а нерелятивистская (инертная) массовая составляющая остается ненулевой для любых ненулевых значений масс m_1 и m_2. Разрешение этой ситуации протекает из того, что значения m_1 и m_2 определяют уникальное понятие максимальной массы фермиона $m_{\max}$, которая появляется в данной модели (см. формулу (9)). Ограничение спектра масс в псевдоэрмитовой модели приводит к тому, что масса $m_{\max}$ становится наблюдаемым параметром, так же как и масса частицы m. Поэтому, чтобы избежать ошибок, все параметры следует выражать через наблюдаемые значения массы частицы m и максимальной массы $m_{\max}$, которую в соответствии с определением Кадышевского можно также назвать “фундаментальной массой” M.

По сути мы отказываемся от принципа эквивалентности, что неизбежно в таких теориях. Этот отказ является основной причиной описанных сложностей. В то же время ограничение спектра масс условием $m_{\max} = M = m_1^2/2m_2$, связанное с введением фундаментальной массы, позволяет дать естественное объяснение этому “парадоксу” [4)].

Более того, мы можем использовать эту разницу для оценки значения величины фундаментальной массы [32]. Эквивалентность гравитационной и инертной масс для обычной материи проверена экспериментально. Согласно последним данным (см. [33]) разница между гравитационной и инертной массами в относительных единицах не превышает величины 10^{-14}. Сопоставляя это различие с первым слагаемым в правой части формулы (17), получаем оценку фундаментальной массы. Для этого, предполагая, что протон как основная структурная единица обычного вещества имеет массу около 0.94 ГэВ, получаем грубую оценку для значения фундаментальной массы $M \sim 17.3$ ТэВ. По-видимому, подобные энергии можно будет получить в ближайшем будущем на Большом адронном коллайдере в ЦЕРН. Экспериментальным подтверждением данной теории в случае обычных частиц могло бы служить обнаружение разности пороговой массы их рождения, с одной стороны, и массы, проявляющей себя при их движении в электромагнитном поле, – с другой.

[4)] Это условие связывалось с аналогичным ограничением, возникающим в геометрическом подходе к построению квантовой теории поля в пятимерном импульсном пространстве де Ситтера, развитым Кадышевским [16], [17].

В случае экзотических частиц разница между релятивистской и нерелятивистской массами, а также между левой и правой массами, огромна и сравнима с фундаментальной массой. Такие частицы имеют нерелятивистскую массу, превышающую максимальную массу, однако их релятивистская масса сравнима с массой обычных частиц. Поэтому они практически не участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но могут проявлять себя в гравитационном взаимодействии аналогично случаю обычных частиц в СМ. Введение фундаментальной массы дает, таким образом, четкое направление для выбора кандидатов на роль составляющих темной материи.

Список литературы

[1] K. N. Abazajian, “Sterile neutrinos in cosmology”, *Phys. Rep.*, **711–712** (2017), 1–28, arXiv: 1705.01837.

[2] G. Krnjaic, P. A. N. Machado, L. Necib, “Distorted neutrino oscillations from time varying cosmic fields”, *Phys. Rev. D*, **97**:7 (2018), 075017, 9 pp., arXiv: 1705.06740.

[3] V. M. Lobashev, “The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN”, *Nucl. Phys. A*, **719** (2003), C153–C160.

[4] В. Н. Асеев, А. И. Белесев, А. И. Берлёв, Е. В. Гераскин, А. А. Голубев, С. В. Задорожный, Н. А. Лиховид, В. М. Лобашёв, А. А. Нозик, В. С. Пантуев, В. И. Парфёнов, А. К. Скасырская, Ф. В. Ткачёв, “Измерение массы электронного антинейтрино в бета-распаде трития в эксперименте “Троицк ню-масс””, *ЯФ*, **75**:4 (2012), 500–514.

[5] C. M. Bender, S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246, arXiv: physics/9712001.

[6] C. M. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians”, *Rep. Prog. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018.

[7] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, “Алгебраический и геометрический подходы к неэрмитовой $\mathcal{PT}$-симметричной релятивистской квантовой механике с максимальной массой”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 3. *Физ. Астр.*, 2014, №3, 20–25.

[8] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, “Алгебраическая $\mathcal{PT}$-симметричная квантовая теория с максимальной массой”, *ЭЧАЯ*, **47**:2, 251–296.

[9] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, “К развитию неэрмитовой алгебраической теории с γ_5-расширением массы”, *ТМФ*, **182**:1 (2015), 124–139.

[10] В. Н. Родионов, “Экзотические фермионы в теории В. Г. Кадышевского и возможности их обнаружения”, *ЭЧАЯ*, **48**:2 (2017), 283–310.

[11] C. M. Bender, H. F. Jones, R. J. Rivers, “Dual $\mathcal{PT}$-symmetric quantum field theories”, *Phys. Lett. B*, **625**:3–4 (2005), 333–340, arXiv: hep-th/0508105.

[12] J. Alexandre, C. M. Bender, P. Millington, “Light neutrino masses from a non-Hermitian Yukawa theory”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **873**:1 (2017), 012047, 11 pp., arXiv: 1703.05251.

[13] A. Mostafazadeh, “Scattering theory and $\mathcal{PT}$-symmetry”, *Parity-time Symmetry and Its Applications*, Springer Tracts in Modern Physics, **280**, eds. D. Christodoulides, J. Yang, Springer, Singapore, 2018, 75–121, arXiv: 1711.05450.

[14] P. A. M. Dirac, “Recollections of an exciting era”, *History of Twentieth Century Physics*, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”. Course LVII (Varenna, Lake Como, Italy, 31 July – 12 August, 1972), ed. C. Weiner, Academic Press, New York, 1977, 109–146.

[15] P. A. M. Dirac, *The relativistic electron wave equation*, Preprint KFKI-1977-62, Hung. Acad. of Sci., Central Res. Inst. for Phys., Budapest, 1977.

[16] V. G. Kadyshevsky, “Fundamental length hypothesis and new concept of gauge vector field”, *Nucl. Phys. B*, **141**:4 (1978), 477–496; Pub. 78/22-THY, Fermilab, Batavia, IL, 1978; *Toward a more profound theory of electromagnetic interactions*, Pub. 78/070-THY, Fermilab, Batavia, IL, 1978.

[17] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, V. N. Rodionov, A. S. Sorin, *Towards a maximal mass model*, arXiv: 0708.4205.

[18] M. A. Markov, *Maximon-type scenario of the Universe* (*Big Bang*, *Small Bang*, *Micro Bang*), Preprint INR P-0207, INR, M., 1981.

[19] M. G. Aartsen, K. Abraham, M. Ackermann et al. [IceCube Collaboration], *The IceCube Neutrino Observatory – contributions to ICRC* 2015 *Part* IV: *searches for dark matter and exotic particles*, arXiv: 1510.05226.

[20] D. Lai, "Physics in very strong magnetic fields", *Space Sci. Rev.*, **191**:1–4 (2015), 13–25, arXiv: 1411.7995.

[21] V. N. Rodionov, "Non-Hermitian $\mathcal{PT}$-symmetric Dirac–Pauli Hamiltonians with real energy eigenvalues in the magnetic field", *Internat. J. Theor. Phys.*, **54**:11 (2015), 3907–3919.

[22] V. N. Rodionov, *Phys. Scr.*, **90**:4 (2015), 045302.

[23] N. Arkani-Hamed, R. T. D'Agnolo, M. Low, D. Pinner, "Unification and new particles at the LHC", *JHEP*, **11** (2016), 82, 27 pp., arXiv: 1608.01675.

[24] V. N. Rodionov, *Towards the detecting of pseudo-Hermitian anomalies for negative square masses neutrinos in intensive magnetic fields*, arXiv: 1603.08425.

[25] A. Battye, A. Moss, "Evidence for massive neutrinos from cosmic microwave background and lensing observations", *Phys. Rev. Lett.*, **112**:5 (2014), 051303, 5 pp., arXiv: 1308.5870.

[26] V. N. Rodionov, "Scalar and spinor particles with low binding energy in a strong stationary magnetic field in two and three dimensions", *Phys. Rev. A*, **75**:6 (2007), 062111, 8 pp., arXiv: hep-ph/0702228.

[27] V. N. Aseev, A. I. Belesev; A. I. Berlev, E. V. Geraskin, A. A. Golubev, N. A. Likhovid, V. M. Lobashev, A. A. Nozik, V. S. Pantuev, V. I. Parfenov, A. K. Skasyrskaya, F. V. Tkachov, S. V. Zadorozhny, "Upper limit on the electron antineutrino mass from the Troitsk experiment", *Phys. Rev. D*, **84**:11 (2011), 112003, 9 pp., arXiv: 1108.5034.

[28] И. П. Волобуев, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, "Уравнения движения для скалярного и спинорного полей в четырехмерном неевклидовом импульсном пространстве", *ТМФ*, **40**:3 (1979), 363–372.

[29] J. Schwinger, "On the Green's functions of quantized fields. I, II", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **37** (1951), 452–455, 455–459.

[30] J. Alexandre, C. M. Bender, P. Millington, "Non-Hermitian extension of gauge theories and implications for neutrino physics", *JHEP*, **11** (2015), 111, 24 pp., arXiv: 1509.01203.

[31] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, А. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 4: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.

[32] V. N. Rodionov, A. M. Mandel, *An upper limit on fermion mass spectrum in non-Hermitian models and its implications for studying of dark matter*, arXiv: 1708.08394.

[33] M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. [Particle Data Group], "Review of particle physics", *Phys. Rev. D*, **98**:3 (2018), 030001, 1898 pp.

Поступила в редакцию 11.03.2018,
после доработки 7.05.2018,
принята к публикации 28.05.2018