ОБ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНОК УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ Г.КРАМЕРА

В.В.Сенатов

Мы будем рассматривать задачу о количественной оценке устойчивости разложений нормального закона на компоненты. Пусть $\Phi(x)$ – функция распределения (ф.р.) стандартного нормального закона, $\rho(F,G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$ – равномерная метрика, $L(F, G)$ – метрика Леви. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 с ф.р. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ независимы и

$$\rho(F_1 * F_2, \Phi) = \varepsilon > 0.$$

Положим

$$M = 1 + \sqrt{2\log 1/\varepsilon},$$

$$a_j = \int_{-M}^{M} x\, dF_j(x), \quad \sigma_j^2 = \int_{-M}^{M} x^2\, dF_j(x) - a_j^2,$$

$$\Phi_j(x) = \Phi\left(\frac{x - a_j}{\sigma_j}\right), \quad j = 1, 2.$$

Абсолютные константы будем обозначать одной буквой C. Хорошо известно, что если $F_j(x)$ имеет нулевую медиану, то

$$\rho(F_j, \Phi_j) \leqslant C\sigma_j^{-3}(\log 1/\varepsilon)^{-1/2}; \qquad (I)$$

$$L(F_j, \Phi_j) \leqslant C(\log 1/\varepsilon)^{-1/8}, \quad j = 1, 2. \qquad (2)$$

Неравенство (I) было доказано Н.А.Сапоговым, а (2) – В.М.Золотаревым. Существует также пример, показывающий достижимость по порядку ε оценки (I). Но, к сожалению, оказывается, что присутствие σ_j в оценке (I) по существу: существуют примеры ф.р. $F_1^{(\varepsilon)}$, $F_2^{(\varepsilon)}$ таких, что $\rho(F_1^{(\varepsilon)} * F_2^{(\varepsilon)}, \Phi) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, но $\rho(F_1^{(\varepsilon)}, \Phi_1) \geqslant \delta > 0$ при этом, конечно, $\sigma_1^{(\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. От этого недостатка свободна метрика Леви, причем пример, показывающий достижимость по порядку ε оценки (I) показывает также, что оценка, лучшая, чем $L(F_j, \Phi_j) \leqslant C(\log 1/\varepsilon)^{-1/2}$ невозможна. Доказательства неравенств (I) и (2) и примеры можно найти, например, в [I], гл. УШ, §§ 2-4.

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. В нашиx обозначениях

$$\rho(F_j, \Phi_j) \leq C\sigma_j^{-3/2}(\log 1/\varepsilon)^{-1/2}, \tag{3}$$

$$L(F_j, \Phi_j) \leq C(\log 1/\varepsilon)^{-1/4}, \quad j=1,2. \tag{4}$$

Для доказательства этой теоремы мы используем два новых подхода, первый из которых связан с уточнением (при малых σ) оценок семиинвариантов за счет использования свойства хребтовости характеристических функций, а второй подход связан с одним обобщением метрики Леви. В процессе доказательства (I) и (2) вводятся случайные величины ξ_1^* и ξ_2^* следующим образом:

$$\xi_j^* = \begin{cases} \xi_j & \text{,если } |\xi_j| \leq M \\ 0 & \text{,если } |\xi_j| > M \end{cases}$$

Пусть $F_1^*, F_2^*, f_1^*, f_2^*$ – ф.р. и характеристические функции (х.ф.) ξ_1^* и ξ_2^* ; $F^* = F_1^* * F_2^*$. Нетрудно видеть, что a_j и ξ_j^* – мат. ожидание и дисперсия ξ_j^* . Оказывается, что

$$\rho(F_j, F_j^*) \leq 5\varepsilon, \quad j=1,2,$$

$$\rho(F^*, \Phi) \leq 10\varepsilon,$$

так что можно доказывать (I) и (2) с заменой F_j на F_j^*. Далее доказывается, что х.ф. f_1^* и f_2^* в круге радиуса $T = \frac{1}{3}\sqrt{\log 1/\varepsilon}$ регулярны, не имеют нулей и

$$\log f_j^*(z) = ia_j z - \frac{\sigma_j^2 z^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(j)} z^k, \tag{5}$$

где для $c_k^{(j)}$ справедливы оценки

$$|c_k^{(j)}| \leq \frac{3}{2} T^{2-k}, \quad k \geq 3, \tag{6}$$

для всех достаточно малых ε .

Лемма I. $|\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 1| \leq C\varepsilon M^2$.

Доказательство. Введем случайные величины $\tilde{\xi}_1 = \xi_1^* - a_1$,

$\tilde{\xi}_2 = \xi_2^* + a_1$ и пусть $\tilde{a}_j, \tilde{\sigma}_j^2, \tilde{m}_2^{(j)}, \tilde{F}_j$ _ математическое ожидание, дисперсия, второй момент и ф.р. $\tilde{\xi}_j$. Очевидно, что

$$\tilde{F}_1 * \tilde{F}_2 = F_1^* * F_2^* = F^*,$$

$$\tilde{\sigma}_j = \sigma_j, \quad |\tilde{\xi}_j| \leq 2M, \quad a_1 = 0, \tag{7}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 1 = \tilde{m}_2^{(1)} + m_2^2 - \tilde{a}_2^2 - 1.$$

Далее,

$$|\tilde{a}_2| = |\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2| = \left|\int x\, dF^*(x)\right| = \left|\int x\, d(F^* - \Phi)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{|x|\leq 2M} + \int\limits_{|x|>M}\right| \leq \left|\int\limits_{|x|\leq 2M} (F^* - \Phi)\, dx\right| +$$

$$+\left|x(F^* - \Phi)\Big|_{-2M}^{2M}\right| + \left|\int\limits_{|x|>2M} x\, d\Phi\right| \leq C\varepsilon M.$$

$$\left|\int x^2 dF^* - 1\right| = \left|\int x^2 d(F^* - \Phi)\right| \leq$$

$$\leq \left|2\int\limits_{|x|\leq 2M} x(F^* - \Phi)\, dx\right| + \left|x^2(F^* - \Phi)\Big|_{-2M}^{2M}\right| + \left|\int\limits_{|x|>2M} x^2 d\Phi\right| \leq C\varepsilon M^2.$$

Теперь, учитывая то, что $\tilde{m}_2^{(1)} + \tilde{m}_2^{(2)} = \int x^2\, dF^*$ (так как $\tilde{a}_1 = 0$) и (7), получим утверждение леммы.

Так как $\varepsilon M^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то, начиная с некоторого ε, усеченная дисперсия σ_j^2 одной из случайных величин ξ_j, скажем ξ_2, будет больше $1/3$. Тогда мы имеем $L(F_2, \Phi_2) \leq \rho(F_2, \Phi_2) \leq C(\log 1/\varepsilon)^{-1/2}$. Таким образом, нас интересует близость к нормальному закону только F_1.

Индекс j у всех величин, относящихся к f_1^*, будем опускать. Мы будем также считать, не оговаривая это каждый раз, что выполнены условия типа $\sigma_1 \leq C$ и $T \geq C$.

Заметим, что если $\{c_k\}$ - некоторая последовательность, удовлетворяющая (6), то построенная по этой последовательности функция (5) может и не быть характеристической. Воспользуемся тем, что всякая х.ф. является хребтовой функцией, т.е. $f(i\tau) \geq |f(u + i\tau)|$

в полосе, где она аналитична. Оказывается, что условие хребтовости вместе с неравенствами (6) дает уточнение оценок для C_k.

Напишем условие хребтовости для f_1^* при $u=\alpha\tau$, $|\tau|\leqslant T(\alpha^2+1)^{-1/2}$:

$$\exp\{-a\tau+\frac{\sigma^2\tau^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty} i^k c_k\tau^k\}\geqslant$$
$$\geqslant\left|\exp\{i\alpha a\tau-a\tau-\frac{\sigma^2(\alpha\tau+i\tau)^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty} c_k\tau^k(\alpha+i)^k\}\right| \tag{8}$$

(заметим, что $c_k=\frac{i^k\varkappa_k}{k!}$, где $\varkappa_k$ – семиинварианты f_1^* – вещественные). Иногда нам будет удобнее пользоваться условием хребтовости для функции $\hat{f}(t)=f_1^*(t)\cdot f_1^*(-t)$, которая также является характеристической. Для $\hat{f}$ условие хребтовости имеет вид ($u=\alpha\tau$)

$$\exp\{\sigma^2\tau^2+\sum_{k=2} 2c_{2k}\tau^{2k}(-1)^k\}\geqslant$$
$$\geqslant\exp\{-\sigma^2\tau^2(\alpha^2-1)+\sum_{k=2}^{\infty} 2c_{2k}\tau^{2k}\operatorname{Re}(\alpha+i)^{2k}\}. \tag{9}$$

Лемма 2. $|c_3|\leqslant C\frac{\sigma^{3/2}}{T}$, $|c_4|\leqslant C\frac{\sigma}{T^2}$, $|c_5|\leqslant C\frac{\sigma^{1/2}}{T^3}$.

Доказательство. Из (9) следует

$$2\{\operatorname{Re}(\alpha+i)^4-(-1)^2\}c_4\tau^4\leqslant\alpha^2\sigma^2\tau^2+2\sum_{k=3}^{\infty} c_{2k}\tau^{2k}\{(-1)^k-\operatorname{Re}(\alpha+i)^{2k}\}.$$

Выбирая α так, чтобы $\operatorname{Re}(\alpha+i)^4-1=1$, если $C_4>0$, либо так, чтобы $\operatorname{Re}(\alpha+i)^4-1=-1$, если $C_4<0$ (легко проверить, что такие α существуют), и оценивая ряд в правой части неравенства с использованием (6), получим

$$|C_4|\leqslant C\left\{\frac{\sigma^2}{\tau^2}+\frac{\tau^2}{T^4}\right\},$$

и это неравенство справедливо при всех $0<\tau\leqslant CT$:

Выбирая $\tau=\sigma^{1/2}T$ (при этом можно считать, что предыдущее ограничение на τ выполнено), имеем

$$|c_4|\leqslant C\frac{\sigma}{T^2}. \tag{10}$$

Действуя аналогично и учитывая (10), получим для C_6 оценку

$$|c_6| \leq C \left\{\frac{\sigma^2}{\tau^4} + \frac{\tau^2}{T^4}\right\}$$ при всех $0<\tau\leq CT$. Полагая $\tau=\sigma^{1/4}T$, получим

$$|c_6| \leq C\frac{\sigma^{1/2}}{T^4}. \tag{II}$$

Перейдем теперь к оценкам $|C_3|$ и $|C_5|$. Используя (8) при $\alpha=1$ и привлекая (I0), получим

$$\varkappa_3\tau^3 \leq C\left\{\sigma^2\tau^2 + \frac{\sigma\tau^4}{T^2} + \frac{|\tau|^5}{T^3}\right\}$$ при $-CT\leq\tau\leq CT$.

Выбирая τ равным либо $\sigma^{2/3}T$, либо $-\sigma^{2/3}T$, в зависимости от знака $\varkappa_3$, получаем

$$|c_3| = C|\varkappa_3| \leq C\frac{\sigma^{4/3}}{T}.$$

Аналогично для C_5 , используя дополнительно (II), имеем

$$|c_5| \leq C\left\{\frac{\sigma^2}{|\tau|^3} + \frac{\sigma^{4/3}}{\tau^2 T} + \frac{\sigma}{|\tau|T^2} + \frac{\sigma^{1/2}|\tau|}{T^4} + \frac{\tau^2}{T^5}\right\}$$

что дает при $\tau=\sigma^{1/4}T$

$$|c_5| \leq C\frac{\sigma^{1/2}}{T^3}. \tag{I2}$$

Для $|C_3|$ теперь можно получить оценку

$$|c_3| \leq C\left\{\frac{\sigma^2}{|\tau|} + \frac{\sigma|\tau|}{T^2} + \frac{\sigma^{1/2}\tau^2}{T^3} + \frac{|\tau|^3}{T^4}\right\},$$

откуда при $\tau=\sigma^{1/2}T$ имеем

$$|c_3| \leq C\frac{\sigma^{3/2}}{T}. \tag{I3}$$

Утверждение леммы содержится в (I0),(I2),(I3).

Используя утверждение леммы, оценим $\left|\sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k\right|$ при $|t|\leq\sigma^{-1/2}T$:

$$\left|\sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k\right| \leq C\left\{\frac{\sigma^{3/2}}{T}|t|^3 + \frac{\sigma}{T^2}t^4 + \frac{\sigma^{1/2}}{T^3}|t|^5 + \frac{t^6}{T^4}\right\} \leq C\frac{\sigma^{3/2}}{T}|t|^3.$$

Для разности х.ф. можно получить оценку

$$|f_1^*(t) - \exp\{iat - \frac{\sigma^2t^2}{2}\}| \leq$$

$$e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left|\exp\left\{\sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k\right\} - 1\right| \leq e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \cdot C\frac{\sigma^{3/2}}{T}|t|^3 \exp\left\{C\frac{\sigma^{3/2}|t|^3}{T}\right\} \leq$$

$\leqslant C \frac{\sigma^{3/2}|t|^3}{T} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}$ при $|t| \leqslant C\sigma^{1/2} T$. Используя теперь неравенство Берри-Эссеена

$$\rho(F,G) \leqslant C\left\{\int_0^R \frac{|f-g|}{t} dt + \frac{\max G'}{R}\right\},$$

при $R = C\sigma^{1/2} T$ получим

$$\rho(F_1,\Phi_1) \leqslant C\left\{\int_0^{C\sigma^{1/2}T} \frac{\sigma^{3/2} t^3}{T} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{\sigma^{3/2} T}\right\} \leqslant C\sigma^{-3/2} T^{-1}$$

Неравенство (3) доказано.

Для того, чтобы получить (4), нам придется воспользоваться еще одним подходом.

Пусть $F(x)$ – ф.р., $G(x)$ – функция ограниченной вариации; рассмотрим $L(F,G) = \inf\{h : F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h$ при всех $x\}$. Ясно, что если $G(x)$ – ф.р., то $L(F,G)$ – метрика Леви. Легко устанавливаются следующие свойства $L(F,G)$.

Если F, H, R – ф.р., G – функция ограниченной вариации, то

a) $L(F,H) \leqslant L(F,G) + L(H,G)$,

b) $L(F,G) \leqslant \sup_x |F(x) - G(x)|$,

c) $L(F*H, G*H) \leqslant L(F,G)$,

d) $L(F,R) \leqslant L(F*H, G*H) + 2L(E,H) + L(R,G)$,

где E – вырожденное распределение. Свойства b) и d) дают возможность установить оценки для L через преобразования Фурье – Стильтьеса.

Пусть $F(x)$, $R(x)$ – ф.р. – функция ограниченной вариации, $f(t)$ и $g(t)$ преобразования Фурье-Стильтьеса $F(x)$ и $G(x)$. Для любого $T>0$

$$L(F,R) \leqslant \mathcal{D}_1\left\{\int_0^T \frac{|f(t)-g(t)|}{t} dt + \frac{\log(1+T)}{T}\right\} + L(R,G)$$

и

$$L(F,R) \leqslant \mathcal{D}_2[\Delta(f,g)]^{\frac{1}{1+\gamma}} + L(R,G), \qquad (14)$$

где $\Delta(f,g) = \sup_{t>0} \frac{|f(t)-g(t)|}{t^\gamma}$, $\gamma<0$, $\mathcal{D}_1$ зависит лишь от $\operatorname{Var} G$, а $\mathcal{D}_2$ – лишь от γ и $\operatorname{Var} G$.

Доказательство этих неравенств аналогично доказательству оценок метрики Леви через характеристические функции, которые были получены В.М.Золотаревым [2].

Без ограничения общности можно считать, что $M\xi_1^* = 0$. Имеем

$$f_1^*(t) = exp\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k\},$$

где C_k удовлетворяют неравенствам леммы 2 и (6), и хотим оценить $L(F_1, \Phi_1)$, где Φ_1 – ф.р. нормального закона с параметрами 0 и σ^2.

Выберем в качестве $G(x)$ следующую функцию:

$$G(x) = \Phi_1(x) + \frac{\varkappa_3}{6\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Ясно, что $g(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\left(1 + \frac{i^3 t^3}{6}\varkappa_3\right) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}(1 + c_3 t^3)$. После несложных вычислений получаем, что при $|t| \le C\sigma^{1/2} T$

$$|f_1^* - g| \le C e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}} \frac{\sigma t^4}{T^2}(1 + \sigma^2 t^2). \tag{15}$$

Для того, чтобы оценить $L(\Phi_1, G)$, мы должны найти такие h, что при всех x

$$\Phi_1(x - h) - h \le G(x) \le \Phi_1(x + h) + h.$$

Рассмотрим правое неравенство (левое решается аналогично), которое мы перепишем в таком виде:

$$\frac{\varkappa_3}{6\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_x^{x+h} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy + h. \tag{16}$$

Лемма 3. При $0 < \delta < 1$ в качестве решения неравенства

$$\delta \le \int_0^h e^{-y^2/2}\, dy$$

можно взять $h = K\delta$, где K – некоторая абсолютная постоянная (в дальнейшем буквой K мы будем обозначать именно это число).

Доказательство очевидно.

Положим $\delta = \frac{2\varkappa_3}{3\sigma^2}$.

Лемма 4. При условии $2eK\frac{|\delta|}{\sigma}(\log 1/\sigma)^{3/2} < 1$ величина $h_0 = eK|\delta|\log\frac{1}{\sigma}$ является решением (16).

Доказательство.

I) Пусть $|x| > \sigma\sqrt{4\log 1/\sigma}$. Тогда имеем

$$\left|\frac{\varkappa_3}{6\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\left(1-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right| \leqslant C|\delta| \leqslant h_0$$

и утверждение леммы для этих x доказано.

2) Пусть теперь $|x| \leqslant \sigma\sqrt{4\log 1/\sigma}$. Мы докажем, что $h_0 = eK|\delta|\log 1/\sigma$ является решением неравенства

$$\frac{|\delta|}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_x^{x+h} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{|\delta|}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_0^h \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}-\frac{xy}{\sigma^2}\right\}dy. \qquad (17)$$

Заметим, что, если $h_0 = eK|\delta|\log 1/\sigma$ является решением неравенства

$$\frac{|\delta|}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{e}\int_0^h e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy, \qquad (18)$$

то, при условии $2eK\frac{|\delta|}{\sigma}\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{3/2} < 1$, это h_0 является и решением (17). Действительно,

$$\frac{|\delta|}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{e}\int_0^{h_0} e^{-y^2/2\sigma^2}\,\frac{e}{e^{-\frac{xy}{\sigma^2}}}\,e^{-\frac{xy}{\sigma^2}}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma}\int_0^{h_0} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,e^{-\frac{xy}{\sigma^2}}, \quad \text{так как} \quad \left|\frac{xy}{\sigma^2}\right| \leqslant \frac{h_0}{\sigma}\cdot\frac{|x|}{\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant eK\frac{|\delta|}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\sqrt{4\log 1/\sigma} < 1.$$

Тот факт, что $h_0 = eK|\delta|\log 1/\sigma$ является решением (18), следует из леммы 3.

Теперь мы можем доказать (4). Рассмотрим три случая.

$$\text{I) } \sigma^{3/2}T > 1 \quad \text{и} \quad 2Ke\frac{|\delta|}{\sigma}\left(\log 1/\sigma\right)^{3/2} < 1. \qquad (19)$$

Воспользуемся оценкой (14) при $\gamma = 3$. Первое условие из (19) и (13) гарантируют то, что $Var\, G \leqslant C$, а следовательно, и $\mathcal{D}_2 \leqslant C$, и это же условие вместе с оценкой (15) дает $[\Delta(f_1^*, g)]^{\frac{1}{1+\gamma}} \leqslant \frac{C}{T^{1/2}}$. Второе условие позволяет нам воспользоваться леммой 4. В итоге мы имеем

$$L(F_1,\Phi_1)\leqslant C\{T^{-1/2}+|\delta|\log\tfrac{1}{\sigma}\}\leqslant$$

$$\leqslant C\{T^{-1/2}+\frac{\log 1/\sigma}{T\sigma^{1/2}}\}\leqslant CT^{-1/2}.$$

2) Не выполнено хотя бы одно из условий (19), но $\sigma>\frac{1}{T}$. В этом случае мы будем пользоваться оценкой $L(F,H)\leqslant C\max\{\beta_4(F),\beta_4(H)\}^{1/5}$, где F,H – ф.р., $\beta_4(F)$, $\beta_4(H)$ – четвертые моменты F и H. Эта оценка является аналогом оценки $L(F,H)\leqslant C\max\{\sigma_F^2,\sigma_H^2\}^{1/3}$, где σ_F^2 и σ_H^2 – дисперсии F и H. Имеем

$$\beta_4(F_1)=\varkappa_4+3\sigma^4\leqslant C\{\tfrac{\sigma}{T^2}+\sigma^4\},$$

$$\beta_4(\Phi_1)=3\sigma^4.$$

При нарушении неравенства $\sigma^{3/2}T>1$ имеем

$$L\leqslant C\{\tfrac{\sigma}{T^2}+\sigma^4\}^{1/5}\leqslant C\{T^{-8/3}\}^{1/5}\leqslant CT^{-1/2}$$

При невыполнении $C\frac{|\delta|}{\sigma}(\log\frac{1}{\sigma})^{3/2}<1$ имеем, с учетом (13) и условия $\sigma>\frac{1}{T}$;

$$\frac{1}{T\sigma^{3/2}}\log^{3/2}T>C$$

и, следовательно,

$$L\leqslant C\{\tfrac{\sigma}{T^2}+\sigma\}^{1/5}\leqslant C\{\frac{\log T}{T^{8/3}}-\frac{\log^4 T}{T^{8/3}}\}^{1/5}\leqslant CT^{-1/2}.$$

3) При $\sigma<\frac{1}{T}$ неравенство $L<C\max\{\sigma_F^2,\sigma_G^2\}^{1/3}$ дает $L\leqslant CT^{-2/3}<CT^{-1/2}$. Неравенство (4) доказано.

Внимательный читатель, конечно, заметил, что возможности как первого, так и второго метода использованы не до конца. И действительно, можно получить оценки, лучшие, чем (3) и(4). Но, к сожалению, сколько-нибудь окончательных результатов получить не удается и, чтобы не перегружать эту работу выкладками, мы остановились именно на оценках (3) и (4).

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить В.М.Золотарева за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Л и н н и к Ю.В., О с т р о в с к и й И.В. Разложения случайных величин и векторов.,М.,"Наука",1972г.

2. З о л о т а р е в В.М. Оценки различия распределений в метрике Леви. - Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова,II2,I97I,224-23I.

On accuracy of stability estimates for H.Cramer's theorem

V.V.Senatov

Suppose that $\rho(F_1 * F_2, \Phi)=\varepsilon$ where Φ denotes the standard normal distribution function and $*$ is a symbol of convolutions; let ρ and L denote the uniform and Levy metrics respectively. The inequalities (3) and (4) proved in the paper improve the N.A.Sapogov's inequality (I) and V.M.Zolotarev's inequality (2) respectively. Our approach is based upon a more precise estimation of semiinvariants by making use of the "ridge" property of characteristic functions and a generalization of Levy metric.