



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. P. Kiselev, Point sources of vibration in a weakly anisotropic elastic medium, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Volume 300, Number 4, 824–826

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

February 11, 2025, 10:53:43



А. П. КИСЕЛЕВ

ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ КОЛЕБАНИЙ
В СЛАБО АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 13 XII 1986)

Задачи о колебаниях анизотропных упругих сред, несмотря на свою связь с приложениями, стимулировавшую усилия многих исследователей [1, 2], изучены далеко не достаточно из-за крайней громоздкости и малой наглядности возникающих формул.

Существует, однако, важный (например, для сейсмологии) класс сред, мало отличающихся от изотропной, для которых волновые задачи допускают построение простых формул посредством теории возмущений. В заметке изучается возбуждение таких сред точечными источниками. Среда предполагается однородной, а анизотропия слабой, но произвольной. Основным результатом являются простые выражения для продольной волны от центра вращения и поперечной — от центра расширения, пригодные в дальней зоне на расстояниях, малых по сравнению с $1/\epsilon$, где $\epsilon \ll 1$ — параметр, характеризующий отклонение среды от изотропии.

1. Пусть тензор напряжений, соответствующий перемещению $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, имеет вид

$$(1) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}) + \epsilon a_{ijmn} \partial_m u_n, \quad \partial_m = \frac{\partial}{\partial x_m},$$

где ϵ — малый параметр, σ_{ij}^0 отвечает изотропной среде,

$$(2) \quad \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}) = \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$\lambda + 2\mu > \mu > 0$, δ_{ij} — символ Кронекера, а по повторяющимся нижним значкам подразумевается суммирование от 1 до 3. От тензора a_{ijmn} требуется только симметрия относительно перестановок $i \leftrightarrow j$, $m \leftrightarrow n$, $ij \leftrightarrow mn$.

Гармонические по времени колебания среды с угловой частотой ω под действием объемных сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ описываются уравнением

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}^0(\mathbf{u}) + \epsilon \mathbf{L}^1(\mathbf{u}) &= \mathbf{F}, \\ \mathbf{L}^0(\mathbf{u}) &= (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u}, \\ \mathbf{L}^1(\mathbf{u}) &= a_{ijmn} \partial_j \partial_m u_n, \end{aligned}$$

$\rho > 0$ — плотность среды. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен. На бесконечности предположено выподненным условие предельного поглощения, гарантирующее для источников с ограниченным носителем единственность решения.

Для приложений особенно интересны центр расширения

$$(4) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi \operatorname{grad} \{ \delta(x_1) \sigma(x_2) \delta(x_3) \}$$

($\delta(x_m)$ — одномерная дельта-функция) и центр вращения

$$(5) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi \operatorname{rot} \{ l \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \},$$

где l — заданный единичный вектор.

Поле любого точечного источника можно получить из решения задачи о сосредоточенной силе

$$(6) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi l \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$$

дифференцированием и заменой 1.

2. Для построения теории возмущений по параметру ϵ положим

$$(7) \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}; \epsilon) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}) + \epsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{r}) + \epsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{r}) + \dots$$

Тогда

$$(8) \quad \mathbf{L}^0(\mathbf{u}^0) = \mathbf{F},$$

$$(9) \quad \mathbf{L}^0(\mathbf{u}^q) = -\mathbf{L}^1(\mathbf{u}^{q-1}), \quad q \geq 1.$$

Решение уравнений (8), (9) для любого точечного источника можно построить с помощью методики [3–5]. Оказывается, что векторы $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \dots$ выражаются через конечные комбинации элементарных функций, причем в случае сосредоточенной силы (6)

$$(10) \quad \mathbf{u}^q(\mathbf{r}) = e^{ikr} \sum_{j=-3-4q}^{j=q} \mathbf{P}^{qj}(\mathbf{r}) + e^{ikr} \sum_{j=-3-4q}^{j=q} \mathbf{Q}^{qj}(\mathbf{r}), \quad q=0, 1, \dots,$$

где k и κ – волновые числа продольных и поперечных волн в изотропной среде ($\epsilon=0$):

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\rho'}{\mu}}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

а функции $\mathbf{P}^{qj}, \mathbf{Q}^{qj}$ однородны степени j .

Особенности функций \mathbf{u}^q в точке $\mathbf{r} = 0$, как можно показать, следуя [4, 5], не растут с номером.

Отсюда следует, что ряд (7) является асимптотическим решением задачи (3) при условии

$$(11) \quad kr \ll \frac{1}{\epsilon}, \quad \kappa r \ll \frac{1}{\epsilon},$$

гарантирующем близость фронтов квазипродольной и квазипоперечных волн к сферам радиусов соответственно k^{-1} и κ^{-1} .

На расстояниях, где неравенства (11) не выполняются, структура поля существенно усложняется [1, 6].

Нетрудно показать, что для произвольного сосредоточенного в начале координат источника \mathbf{F} члены ряда (7) имеют такую же (с точностью до добавления константы к пределам суммирования в (10)) структуру и, следовательно, ту же область пригодности.

3. В изотропной среде перемещение $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ имеет на больших расстояниях вид суммы продольной и поперечной сферических волн

$$(12) \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = f s A \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right) + \{ \mathbf{g} - (\mathbf{g}, \mathbf{s}) \mathbf{s} \} B \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right),$$

$$(13) \quad kr \gg 1, \quad \kappa r \gg 1,$$

где

$$A = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad B = \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

а $f = f(s)$ и $g = g(s)$ — гладкие на единичной сфере функции угловых переменных — диаграммы направленности продольных и поперечных колебаний. Для центра расширения $g \equiv 0$, для центра вращения $f \equiv 0$.

Из (7), (10) следует, что асимптотика вида (12) имеет место и в слабо анизотропной среде при дополнительном условии (11). Остаточные члены в (12) заменяются соответственно на $1 + O(1/kr) + O(\epsilon kr)$ и $1 + O(1/kr) + O(\epsilon kr)$.

Вычисление коэффициентов в асимптотике (12) для источников (4) и (5) при $\epsilon \neq 0$ удобнее производить, не обращаясь к задаче о сосредоточенной силе.

В случае источника (4)

$$(14) \quad u^0 = C \operatorname{grad} A, \quad C = (\lambda + 2\mu)^{-1},$$

откуда

$$(15) \quad L_i^1(u^0) = Ca_{ijmn} \partial_j \partial_m \partial_n A.$$

Для нахождения поправки u^1 (а следовательно, и g) достаточно заметить [4, 5], что векторы $\psi^{(t)}$, $t = 1, 2, 3$,

$$(16) \quad \psi_j^{(t)} = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left\{ (\kappa^2 \delta_{tj} + \partial_t \partial_j) \frac{A - B}{k^2 - \kappa^2} + \partial_t \partial_j \frac{e^{ikr}}{2ik} \right\},$$

удовлетворяют уравнениям

$$(17) \quad L^0(\psi^{(t)}) = e_t A,$$

где e_t — орт оси x_t . Из (9), (14)–(17) легко получается представляющая интерес для сейсмоки асимптотика (12) в случае центра расширения

$$(18) \quad f(s) = ikC(1 + O(\epsilon));$$

$$(19) \quad g_p(s) = i\epsilon k C \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} a_{pjmn} s_j s_m s_n (1 + O(\epsilon)).$$

Функции (18) и (19) имеют одинаковую (линейную) зависимость от ω , поэтому спектральный состав продольных волн и поперечных, возбуждаемых за счет слабой анизотропии среды, в нестационарной задаче одинаков. Это качественно отличает анизотропию от плавной неоднородности [3, 4].

Аналогично, для источника (5)

$$f(s) = -i\epsilon k D \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} a_{pjmn} s_p s_j s_m d_n (1 + O(\epsilon)),$$

$$D = \mu^{-1}, \quad d = [s, 1],$$

$$g(s) = ik D d (1 + O(\epsilon)).$$

Автор признателен В.М. Бабичу, А.А. Вакуленко и А.П. Качалову за полезные замечания.

Научно-производственное объединение
"Рудгеофизика"
Ленинград

Поступило
22 XII 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Musgrave M.J.P.* Crystal acoustics. San Francisco, 1970. 280 p.
2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
3. *Киселев А.П.* — ДАН, 1974, т. 219, № 4, с. 829–831.
4. *Киселев А.П.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1975, т. 1, с. 6–27.
5. *Киселев А.П.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 99, с. 28–42.
6. *Matsumura M.* — Publ. RIMS Kyoto Univ., Ser. A, 1976, vol. 12, № 2, p. 327–377.