Ya. Yu. Nikitin, Asymptotic comparison of some nonparametric tests with the test of Student, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 147–149

Я.Ю.Никитин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ С КРИТЕРИЕМ СТЬЮДЕНТА

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – две независимые выборки с генеральными функциями распределения $F(x)$ и $F(x-\theta)$ соответственно. Предполагается, что функция F абсолютно непрерывна с ограниченной плотностью f и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Введем следующие обозначения:

$$\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad \overline{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$s^2 = (m+n-2)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right],$$

F_m и G_n – эмпирические функции распределения, построенные по первой и второй выборкам, $\rho = \lim\limits_{m,n\to\infty} \frac{m}{m+n}$, $0<\rho<1$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы однородности H_0: $\theta=0$ против альтернативы сдвига H_1: $\theta \neq 0$ с помощью статистики Стьюдента

$$t_{m,n} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\;\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{s} \tag{I}$$

и статистики Вилкоксона-Манна-Уитни

$$U_{m,n} = \sqrt{m+n}\int_{-\infty}^{\infty} F_m(x)\,dG_n(x) .$$

Будем обозначать через $e(T,V)$ асимптотическую относительную эффективность (АОЭ) по Питмену последовательности тестовых статистик $\{T_{m,n}\}$ по отношению к последовательности $\{V_{m,n}\}$.

Классический результат Ходжеса и Лемана [I] состоит в том, что

$$e(U,t) \geq 0{,}864 , \tag{2}$$

причем в [I] явно указано распределение, на котором достигается минимальное значение АОЭ.

Цель настоящей заметки – получение аналогов неравенства (2) при сравнении со статистикой Стьюдента статистик

$$W^{K}_{m,n} = \left(\frac{mn}{m+n}\right)^{K/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_m(x)-G_n(x)\right)^K dH_{m+n}(x) , \tag{3}$$

где K – натуральное число и $H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n}F_m(x) + \frac{n}{m+n}G_n(x)$.

Известно, что последовательности статистик $\{W^1_{m,n}\}$ и

$\{U_{m,n}\}$ асимптотически эквивалентны. Если же $K \geqslant 2$, то последовательность статистик (3) не является при справедливости H_0 асимптотически нормальной, вследствие чего АОЭ может зависеть от уровня значимости α. Поэтому мы будем рассматривать, подобно тому как это делалось в работах [2], [3], [4] предельную АОЭ по Питмену $\bar{e}(W^K,t) = \lim\limits_{\alpha \to 0} e(W_K, t)$.

Вычислим сначала в рассматриваемой ситуации предельную приближенную АОЭ по Бахадуру $\Lambda(W^K, t)$, равную по определению пределу при $\theta \to 0$ отношения приближенных наклонов по Бахадуру [2], [5]. Пользуясь определениями из [5], легко установить, что приближенный наклон последовательности (I) при $\theta \to 0$ допускает представление

$$C_t(\theta) \sim \rho(1-\rho)\frac{\theta^2}{\sigma^2} + o(\theta^2).$$

Выражение для главной части приближенного наклона последовательности (3) при $\theta \to 0$ можно найти в [6]:

$$C_{W^K}(\theta) \sim \rho(1-\rho)\lambda_0(K)\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f^{K+1}(x)dx\Big]^{2/K}\theta^2 + o(\theta^2),$$

где

$$\lambda_0(K) = \frac{2^{2-2/K} B^2(\frac{1}{K}, \frac{1}{2})}{K(K+2)^{1-2/K}}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda(W^K, t) = \lambda_0(K)\sigma^2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f^{K+1}(x)dx\Big]^{2/K}. \tag{5}$$

В [2] доказывается, что при выполнении некоторого специального условия (так называемого условия Ш*) предельная (при $\theta \to 0$) приближенная АОЭ по Бахадуру совпадает с предельной (при $\alpha \to 0$) АОЭ по Питмену. В [2] и [3] доказано, что упомянутое условие выполняется для статистик Стьюдента и Вилкоксона. С помощью аналогичных рассуждений нетрудно установить, что оно выполняется и для статистик (3), если, например, плотность f исходного распределения имеет ограниченную производную. В этом случае из (5) вытекает, что

$$\bar{e}(W^K, t) = \lambda_0(K)\sigma^2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f^{K+1}(x)dx\Big]^{2/K}. \tag{6}$$

Найдем минимальное значение выражения

$$\sigma^2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f^{K+1}(x)dx\Big]^{2/K}. \tag{7}$$

Это выражение не меняется при изменении сдвига и масштаба; поэтому мы можем искать минимум $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{k+1}(x)\,dx$ при ограничениях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,, \tag{8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 0\,. \tag{9}$$

Будем учитывать сначала только условия (8). Составим функцию Лагранжа $f^{k+1}(x) - (k+1)\lambda(\mu^2 - x^2) f(x)$ где λ и μ^2 - неопределенные множители. Экстремум функционала $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{k+1}(x)\,dx$ достигается на функции $f(x) = \begin{cases} \sqrt[k]{\lambda(\mu^2 - x^2)}\,, & x^2 \leqslant \mu^2 \\ 0\,, & x^2 > \mu^2\,. \end{cases}$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет (9). С помощью (8) находим

$$\mu^2 = \frac{3k+2}{k}\,,\quad \lambda = \left[B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{k}\right)\right]^{-k} \left(\frac{k}{3k+2}\right)^{\frac{k+2}{2}}\,.$$

С учетом (5),(6),(4) можно заключить, что искомое минимальное значение АОЭ $\Lambda(W^k, t)$ и $\bar{e}(W^k, t)$ равно

$$\tau(k) = (k+1)^{2/k} \left(\frac{k+2}{3k+2}\right)^{2/k+1}\,.$$

Итак, нами доказано, что если исходная функция распределения F обладает ограниченной второй производной, то при $k \geqslant 2$

$$\Lambda(W^k, t) = \bar{e}(W^k, t) \geqslant \tau(k)\,.$$

Функция $\tau(k)$ с ростом k убывает и стремится к величине I/3, что отвечает нижней границе АОЭ статистике Смирнова по отношению к статистике Стьюдента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hodges J., Lehmann E. The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test. - Ann.Math.Stat., 1956, v.27, N 2, p.324-336.
2. Wieand H.S. A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide. - Ann.Stat., 1976, v.4, N 5, p.1003-1011.
3. Wieand H.S. On a condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide. - Ph.D.Dissertation, Univ.of Maryland, 1974.
4. Sinha K., Wieand H.S., Bounds of the efficiencies of four commonly used nonparametric tests of location. - Sankhya, 1977, v.B39, N 2, p.121-129.
5. Bahadur R.R. Stochastic comparison of tests. - Ann. Math.Stat., 1960, v.31, N 2, p.231-260.
6. Никитин Я.Ю. Большие уклонения и асимптотическая эффективность статистик интегрального типа II.- Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т. 97, с. 151 - 175.