П. П. Кулиш, Ф. А. Смирнов, Уравнений обратной задачи квантовой системы трех волн, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 150, 53–69

П.П.Кулиш, Ф.А.Смирнов

УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ВОЛН

Введение

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) позволил точно решить многие квантовые динамические системы [I–4], которые интегрируются методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) в классической теории [5].

Простейшей классической системой с линейным фазовым пространством и нетривиальной динамикой солитонов (наличие слияния и распада) является система трех волн [5]

$$
\begin{aligned}
&i\,(\partial_t + v_1 \partial_x)\, q_1 = e\, q_2^+ q_3 ,\\
&i\,(\partial_t + v_2 \partial_x)\, q_2 = e\, q_1^+ q_3 ,\\
&i\,(\partial_t + v_3 \partial_x)\, q_3 = e\, q_1 q_2 .
\end{aligned}
\tag{I}
$$

Вспомогательная линейная задача для уравнений (I) – матричная система 3x3 первого порядка

$$
\begin{aligned}
&-i\partial_x T(x,\lambda) = (\lambda D + Q)\, T(x,\lambda) = L(x,\lambda)\, T(x,\lambda)\\
&Q(x) = \sum_{i<j} \sqrt{a_{ij}}\, \big(q_{ij}(x)\, e_{ij} + p_{ij}(x)\, e_{ji} \big)\\
&D = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3),\quad a_1 > a_2 > a_3 ,\ \mathrm{Im}\, a_i = 0 ,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $(e_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$ – базисные матрицы 3x3 и использованы обозначения $q_{12} = q_1$, $q_{13} = q_3$, $q_{23} = q_2$, $p_{ij} = q_{ij}^+$, $a_{ij} = a_i - a_j$. В терминах параметров линейной задачи (2) и участвующих во втором операторе пары Лакса параметров b_1, b_2, b_3, которым мы пользоваться не будем, скорости v_j и заряд e выражаются формулами

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (b_1 - b_2)/a_{12} ,\ v_2 = (b_2 - b_3)/a_{23} ,\ v_3 = (b_1 - b_3)/a_{13} ,\\
&e = (b_1 a_{23} + b_2 a_{31} + b_3 a_{12}) / (a_{12} a_{13} a_{23})^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Гамильтонова структура системы (I) была проанализирована в [6], где вычислены также переменные типа "действие-угол". Ненулевые скобки Пуассона и гамильтониан имеют вид

$$\{ q_k(x), q_k^+(y) \} = i\delta(x-y), \tag{4}$$

$$H = \int dx \left(\sum_{j=1}^{3} v_j q_j^+ \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) q_j + e \left(q_1^+ q_2^+ q_3 + q_3^+ q_1 q_2 \right) \right). \tag{5}$$

При квантовании системы (I), когда поля q_i, q_i^+ становятся операторно-значными функциями, определенными в тензорном произведении трех пространств Фока

$$\mathcal{H}_F = \bigotimes_{i=1}^{3} \mathcal{H}_i$$

для бозе-полей q_i, q_i^+, нужно учитывать специфику взаимодействия (2). Именно, появление в уравнение Шредингера, содержащего первые производные по x, потенциала $\delta(x)$ требует доопределения взаимодействия, что, вообще говоря, можно сделать различными способами. Один из вопросов, которые при этом возникают, связан например, с приданием смысла интегралу $\int \delta(x) f(x)\, dx$, если функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода.

Таких вопросов не возникает в формализме КМОЗ, который основывается на вспомогательной линейной задаче (2). Возможность применения КМОЗ для квантовой системы N - волн отмечалась в [7]. Была установлена также евязь системы (I), (2) с $sl(3)$ - инвариантным магнетиком и дано решение для задачи на собственные функции на ограниченном интервале с периодическими условиями [8]. Связь с системой (I) в КМОЗ возникает через квантовые формулы следов, на чем в этой работе мы останавливаться не будем. Отметим, однако, что предложенная в [8] регуляризация формально эрмитова гамильтониана (5) через $sl(3)$ магнетик на конечном интервале ведет к несамосопряженному оператору. Все эти интересные вопросы выходят за рамки настоящей статьи, основная цель которой - вывод уравнений обратной задачи для вспомогательной системы (2) в квантовом случае.

Основу вывода, кроме центральных формул КМОЗ, составляют подходы работ [9, 10].

Полученные уравнения по виду совпадают с классическими (отличие в солитонной части естественно). Поэтому создается впечатление, что для всех квантовых L - операторов, не имеющих квантовых поправок, уравнения обратной задачи в секторе с конечным числом частиц те же и этот факт имеет чисто алгебраическое происхождение.

Заканчивая это введение, упомянем работы [I2] , где с помощью координатного анзаца Бете были построены собственные функции гамильтониана (5). Отметим, также возможное приложение квантовой системы (I) в качестве модели сверхизлучения для многоуровневых систем [I3] . Вырождение системы (I), точнее L - оператора (2), с примесями использовалось для этих целей в [I4] . Кроме того, рассмотрение суперлгебр типа $sl(2/1)$ приводит к интегрируемости системы (I) и в случаях, когда имеется только одно бозе-поле, а два другие ферми-поля.

Статья состоит из двух разделов. В первом приведены основные формулы прямой задачи для квантового L - оператора (2) на всей оси. Второй раздел содержит вывод уравнений обратной задачи. Приложение содержит некоторые перестановочные соотношения.

Авторы признательны Л.Д.Фаддееву, В.С.Буслаеву, Н.Ю.Решетихину и Е.К.Склянину за полезные обсуждения.

I. Прямая задача рассеяния для вспомогательной линейной системы

При переходе к квантовой теории, когда поля q_i, q_i^+ становятся операторно-значными функциями, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[q_i(x), q_j^+(x)] = \eta\delta_{ij}, \tag{I.I}$$

основное требование к L - оператору, позволяющее применить КМОЗ, состоит в том, что L - оператор должен удовлетворять сплетающему соотношению (обобщенное уравнение Янга-Бакстера)

$$R(\lambda-\mu)T_\Delta(\lambda)\otimes T_\Delta(\mu) = (I\otimes T_\Delta(\mu))(T_\Delta(\lambda)\otimes I)R(\lambda-\mu) \tag{I.2}$$

$$T_\Delta(\lambda) = 1 + i\int_\Delta L(x,\lambda)\,dx, \qquad \Delta \equiv [x, x+\Delta x] \tag{I.3}$$

с некоторой R - матрицей. Для интересующей нас вспомогательной линейной системы (2) в квантовой теории достаточно поставить в правой части знак нормального упорядочения. Квантовая матрица монодромии $T(x,y,\lambda)$:

$$T(x,y,\lambda) = :P\exp\left(i\int_x^y L(z,\lambda)\,dz\right): \tag{I.4}$$

имеет смысл как матрица 3x3 из операторов в пространстве Фока $\mathcal{H}_F$ для трех бозе-полей q_i, q_i^+. Она удовлетворяет соотношению (I.2) с R - матрицей [7, 8]

$$R(\lambda) = 1 + \frac{i\varkappa}{\lambda} \mathcal{P}, \tag{I.5}$$

где $\mathcal{P}$ - оператор перестановки в $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.

Следует отметить, что так просто обстоит дело при переходе к квантовой теории лишь для выбранного нами векторного представления $sl(3)$. Квантовые L - операторы в других представлениях, выбор которых в классической теории не существенен, не совпадают с классическими и приобретают квантовые поправки [2, 15].

На конечном интервале с периодическими условиями диагонализация гамильтониана системы (5) с помощью алгебраического анзаца Бете была выполнена в [8]. В данной работе нас интересует случай всей прямой и конечного числа частиц, т.е. пространство состояний есть $\mathcal{H}_F$.

Следуя классической теории рассеяния мы введем решения Йоста, фиксируя их асимптотику при $x \to -\infty$ или $+\infty$. Например,

$$T_-(x,\lambda) = \lim_{y\to-\infty} T(y,x,\lambda)\exp(iD\lambda y) = (X_1, X_2, X_3)(x,\lambda). \tag{I.6}$$

Столбцы $X_i(x,\lambda)$, $i=1,2,3$ и матрица $T_-(x,\lambda)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$T_-(x,\lambda) = e^{i\lambda Dx} + i : \int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda D(x-y)} Q(y) T_-(y,\lambda) dy : \tag{I.7}$$

Аналогично определяются решения Йоста с заданной асимптотикой при $x \to \infty$

$$T_+(x,\lambda) = \lim_{y\to\infty} e^{-i\lambda Dy} T(x,y,\lambda) \equiv (Y_1^t, Y_2^t, Y_3^t)^t (x,\lambda) \tag{I.8}$$

Точнее, строки $Y_i(x,\lambda)$, $i=1,2,3$ и $T_+(x,\lambda)$ это решения сопряженного уравнения $i\frac{d}{dx}Y = :Y(x,\lambda)L(x,\lambda):$

Интегральные уравнения (I.7) в классической теории [5] используются для определения свойств аналитичности решений Йоста и построения полных наборов решений аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Эти наборы и служат основой для формулировки задачи Римана и вывода уравнений обратной задачи [5]. Хотя мы можем доказать аналитичность столбцов X_1 и X_3 исходя из (I.7) и в квантовой теории, однако полностью классическая схема не воспроизводится и в следующем разделе будет использован другой подход для определения свойств аналитичности.

Перейдем к описанию квантовых данных рассеяния – новых переменных, к которым мы переходим от полей q_i, q_i^+. Ими являются элементы матрицы перехода

$$T(\lambda) = T_+(x,\lambda)T_-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} A_1(\lambda) & B_1(\lambda) & B_3(\lambda) \\ C_1(\lambda) & A_2(\lambda) & B_2(\lambda) \\ C_3(\lambda) & C_2(\lambda) & A_3(\lambda) \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

Перестановочные соотношения квантовых данных рассеяния $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$, $C_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$ следуют из обобщенного уравнения Янга-Бакстера (I.2) для матрицы монодромии (I.4) после предельного перехода $x \to -\infty$, $y \to -\infty$ с учетом ренормировочных матричных множителей, которые меняют левую и правую R – матрицы [I],

$$R_1(\lambda,\mu)T(\lambda)\otimes T(\mu) = (I\otimes T(\mu))(T(\lambda)\otimes I)R_2(\lambda,\mu), \quad (I.10)$$

$$R_1(\lambda,\mu) = R_2^t(\lambda,\mu). \quad (I.11)$$

В матрице 9x9 $R_2(\lambda)$ кроме ненулевой диагонали

$$\operatorname{diag} R_2(\lambda) = \left(1+\frac{i\eta}{\lambda}, 1, 1, 1+\frac{\eta^2}{\lambda^2}, 1+\frac{i\eta}{\lambda}, 1, 1+\frac{\eta^2}{\lambda^2}, 1+\frac{\eta^2}{\lambda^2}, 1+\frac{i\eta}{\lambda}\right) \quad (I.12)$$

отличны от нуля еще шесть элементов:

$$_{21}(R_2(\lambda))_{12} = {}_{31}(R_2(\lambda))_{13} = {}_{32}(R_2(\lambda))_{23} = -{}_{12}(R_2(\lambda))_{21} = -{}_{13}(R_2(\lambda))_{31} = -{}_{23}(R_2(\lambda))_{32} = i\eta\pi\delta(\lambda). \quad (I.13)$$

Среди данных рассеяния (I.9) и перестановочных соотношений

(I.10) естественно выделить три набора

$$
\begin{aligned}
&1)\ A_1(\lambda),\ A_2(\lambda),\ C_1(\lambda),\ B_1(\lambda);\\
&2)\ A_2(\lambda),\ A_3(\lambda),\ C_2(\lambda),\ B_2(\lambda);\\
&3)\ A_1(\lambda),\ A_3(\lambda),\ C_3(\lambda),\ B_3(\lambda),
\end{aligned}
\tag{I.14}
$$

каждый из которых по отдельности удовлетворяет перестановочным соотношениям скалярного нелинейного уравнения Шредингера (NS) [II] . Редуцируя данные рассеяния на подпространство $\mathcal{H}_1$ или $\mathcal{H}_2$ получим динамическую систему NS , связанную с полями q_1, q_1^+ или q_2, q_2^+ . В редуцированной матрице перехода выделится соответствующий блок. Однако для третьего набора и подпространства $\mathcal{H}_3$ это уже не так.

Для примера, приведем одно из перестановочных соотношений (I.10), отличных от случая NS ,

$$
\begin{aligned}
B_2(\lambda)C_3(\mu) = \left(1+\frac{\eta^2}{(\lambda-\mu)^2}\right) C_3(\mu)B_2(\lambda) - \\
-2\pi\eta\delta(\lambda-\mu)A_3(\lambda)C_1(\lambda).
\end{aligned}
\tag{I.15}
$$

Факт, что в системе имеется три набора операторов типа квантовых данных рассеяния для NS , позволяет сделать вывод о наличии для каждого набора соответствующей последовательности связанных состояний. В классическом пределе им отвечают солитоны.

В уравнениях обратной задачи встречаются специальные комбинации данных рассеяния. Эти комбинации мы получим исследуя аналитические свойства решений Йоста, действуя ими на полный набор состояний. В этом разделе мы приведем упомянутые комбинации, но вначале напомним основные этапы вывода уравнений обратной задачи в классической теории [5] .

Решения с нужными аналитическими свойствами получаются после факторизации матрицы перехода на треугольные матрицы (в этих формулах $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$, $C_i(\lambda)$ - классические функции)

$$
S^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 1, \Delta(C_1), B_3 \\ 0, \Delta(A_1), B_2 \\ 0,\ \ 0\ \ , A_3 \end{pmatrix},\quad S^-(\lambda) = \begin{pmatrix} \Delta(A_1), 0,\ 0 \\ -\Delta(B_1), A_3, 0 \\ \Delta(B_3), -C_3, 1 \end{pmatrix},
$$

$$
S^+(\lambda) = T(\lambda)S^-(\lambda),
\tag{I.16}
$$

$$\Delta(A_1)=A_2A_3-B_2C_2\,,\quad \Delta(B_1)=C_1A_3-C_3B_2\,, \tag{I.17}$$

$$\Delta(C_1)=B_1A_3-C_2B_3\,,\quad \Delta(B_3)=C_1C_2-A_2C_3\,. \tag{I.18}$$

Другая возможная факторизация

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix} A_1, & 0, & 0 \\ C_1, & \Delta(A_3), & 0 \\ C_3, & \Delta(B_2), & 1 \end{pmatrix},\quad R^+(\lambda)=\begin{pmatrix} 1, & -B_1, & \Delta(C_3) \\ 0, & A_1, & -\Delta(C_2) \\ 0, & 0, & \Delta(A_3) \end{pmatrix}$$

$$R^-(\lambda)=T(\lambda)R^+(\lambda) \tag{I.19}$$

$$\Delta(A_3)=A_1A_2-B_1C_1\,;\quad \Delta(C_2)=A_1B_2-C_1B_3\,, \tag{I.20}$$

$$\Delta(B_2)=A_1C_2-C_3B_1\,,\quad \Delta(C_3)=B_1B_2-A_2B_3\,. \tag{I.21}$$

Диагонали матриц $S^{\pm}(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а $R^{\pm}(\lambda)$ – в нижнюю, $\Delta(T_{ij})$ – минор элемента $T_{ij}(\lambda)$ матрицы перехода $T(\lambda)$. Решения

$$\chi^{(+)}(x,\lambda)=T_-(x,\lambda)\,S^-(\lambda)=T_+(x,\lambda)\,S^+(\lambda) \tag{I.22}$$

аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость по λ, а решения

$$\chi^{(-)}(x,\lambda)=T_-(x,\lambda)R^+(\lambda)=T_+(x,\lambda)R^-(\lambda) \tag{I.23}$$

– в нижнюю. Связь аналитических решений приводит к матричной задаче Римана

$$\chi^{(+)}(x,\lambda)=\chi^{(-)}(x,\lambda)G(\lambda), \tag{I.24}$$

$$G(\lambda)=\left(R^+(\lambda)\right)^{-1}S^-(\lambda). \tag{I.25}$$

В соотношении (I.24) содержится связь столбцов-решений, например,

$$\chi_3(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(A_3)}\chi_3^{(-)}(x,\lambda)+\frac{\Delta(C_2)}{A_1\Delta(A_3)}\chi_2^{(-)}(x,\lambda)+\frac{B_3}{A_1}\chi_1^{(-)}(x,\lambda)$$

или, иначе

$$\chi_3=\frac{1}{\Delta(A_3)}\chi_3^{(-)}+\chi_1 R_3+(\chi_2-\chi_1 R_1)R_2 \tag{I.26}$$

где

$$R_3=\frac{B_3}{A_1},\quad R_2=\frac{\Delta(C_2)}{\Delta(A_3)},\quad R_1=\frac{B_1(\lambda)}{A_1(\lambda)} \tag{I.27}$$

Из соотношений (I.24) следуют сингулярные интегральные уравнения обратной задачи.

Переходя снова к квантовой системе, введем новые операторы

$$\begin{gathered}\widetilde{B}_2=B_2-C_1A_1^{-1}B_3,\quad \widetilde{A}_2=A_2-C_1A_1^{-1}B_1,\\ \widetilde{C}_1=C_1-C_3A_3^{-1}B_2,\quad \widetilde{\widetilde{A}}_2=A_2-C_2A_3^{-1}B_2.\end{gathered} \tag{I.28}$$

Очевидна их связь с минорами (I.I7) и (I.2I). Перестановочные соотношения операторов (I.28) между собой и с исходными данными рассеяния следуют из (I.I0). Приведем для примера одно из них

$$\widetilde{C}_1(\lambda)C_2(\mu)=C_2(\mu)\widetilde{C}_1(\lambda)+2\pi\delta(\lambda-\mu)C_3(\lambda)\widetilde{\widetilde{A}}_2(\lambda). \tag{I.29}$$

Введем теперь операторы $\widetilde{R}_i(\lambda)$ и $R(\lambda),\ i=1,2,3$

$$R_1=A_1^{-1}B_1,\quad R_2=\widetilde{A}_2^{-1}\widetilde{B}_2,\quad R_3=A_1^{-1}B_3, \tag{I.30}$$

$$\widetilde{R}_1=\widetilde{C}_1\widetilde{\widetilde{A}}_2^{-1},\quad \widetilde{R}_2=C_2A_3^{-1},\quad \widetilde{R}_3=C_3A_3^{-1}, \tag{I.3I}$$

которые будут фигурировать в уравнениях обратной задачи. Отметим прежде всего, что операторы $\widetilde{R}_i(\lambda)$ не сопряжены с $R_i(\lambda)$. Как и наборы (I.I4), три пары операторов $R_i(\lambda)$,

$\widetilde{R}_i(\lambda)$, $i = 1,2,3$ удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры Замолодчикова-Фаддеева для NS

$$R_i(\lambda) R_i(\mu) = S(\lambda-\mu) R_i(\mu) R_i(\lambda), \tag{I.32}$$

$$\widetilde{R}_i(\lambda) \widetilde{R}_i(\mu) = S(\lambda-\mu) \widetilde{R}_i(\mu) \widetilde{R}_i(\lambda), \tag{I.33}$$

$$R_i(\lambda) \widetilde{R}_i(\mu) = S(\mu-\lambda) \widetilde{R}_i(\mu) R_i(\lambda) - 2\pi\eta\delta(\lambda-\mu), \tag{I.34}$$

$$S(\lambda) = \frac{\lambda + i\eta}{\lambda - i\eta}. \tag{I.35}$$

При редукции на $\mathcal{H}_1$ или $\mathcal{H}_2$ оператор $\widetilde{R}_1(\lambda)$ становится сопряженным $R_1(\lambda)$, а $\widetilde{R}_2(\lambda)$ - оператору $R_2(\lambda)$ соответственно.

2. Уравнения обратной задачи

Вывод уравнений обратной задачи, которые позволяют восстановить локальные поля (потенциалы линейной системы) о квантовым данным рассеяния, использует аналитические свойства решений вспомогательной линейной системы. Их можно получить из интегральных уравнений (I.7), что и делается в классической теории [5]. В квантовой теории проблема упорядочения осложняет дело и мы воспользуемся методом определения аналитических свойств операторов, зависящих от параметра, посредством их действия на полный набор состояний [9, 10]. В качестве таковых выберем векторы

$$f(\{m_j, \mu_j\}_1^n) = \prod_{\overrightarrow{j=1}}^{n} C_{m_j}(\mu_j)|0\rangle \tag{2.1}$$

и ковекторы

$$\widetilde{f}(\{m_j, \mu_j\}_1^n) = \langle 0| \prod_{\overleftarrow{j=1}}^{n} B_{m_j}(\mu_j). \tag{2.2}$$

Конечно, кроме этих векторов необходимо рассматривать еще векторы, отвечающие связанным состояниям. О них речь пойдет в конце этого пункта.

Чтобы получить перестановочные соотношения квантовых решений Йоста с элементами матрицы монодромии, рассмотрим предел

$y \to -\infty$ в формуле (I.2) с $T(y,x,\lambda)$ и умножим ее слева на $T_+(x,\lambda)\otimes I$. В результате получим

$$\hat{T}(x;\lambda,\mu)\otimes T_-(x,\mu)=(I\otimes T_-(x,\mu))(T(\lambda)\otimes I)R_2(\lambda-\mu), \tag{2.3}$$

где

$$\hat{T}(x;\lambda,\mu)=(T_+(x,\lambda)\otimes I)R(\lambda-\mu)(T_-(x,\lambda)\otimes I) \tag{2.4}$$

Как матрица 3x3 в пространстве V_1 выражение (2.4) можно считать квантовой матрицей монодромии исходной системы, взаимодействующей с примесью $sl(3)$ - спина в точке x. Ее элементы имеют вид

$$\hat{T}_{ab}(x;\lambda,\mu)=T_{ab}(\lambda)+\frac{i\eta}{\lambda-\mu}X_b(x,\lambda)Y_a(x,\lambda), \tag{2.5}$$

например,

$$C_1(x;\lambda,\mu)=C_1(\lambda)+\frac{i\eta}{\lambda-\mu}X_1(x,\lambda)Y_2(x,\lambda). \tag{2.6}$$

Распишем (2.3) как матричное соотношение в V_1, элементы которого матрицы-операторы в $V_2\otimes\mathcal{H}$:

$$\begin{pmatrix} A_1(x;\lambda,\mu) & B_1(x;\lambda,\mu) & B_3(x;\lambda,\mu)\\ C_1(x;\lambda,\mu) & A_2(x;\lambda,\mu) & B_2(x;\lambda,\mu)\\ C_3(x;\lambda,\mu) & C_2(x;\lambda,\mu) & A_3(x;\lambda,\mu)\end{pmatrix} T_-(x,\mu)=$$

$$=T_-(x,\mu)\begin{pmatrix} A_1(\lambda) & B_1(\lambda) & B_3(\lambda)\\ C_1(\lambda) & A_2(\lambda) & B_2(\lambda)\\ C_3(\lambda) & C_2(\lambda) & A_3(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}(\lambda-\mu), \tag{2.7}$$

где $r_{ij}(\lambda-\mu)$ блоки $R_2(\lambda-\mu)$ как матрицы в V_1, т.е. эти блоки суть матрицы в V_2 (I.I2), (I.I3). Используя введенное ранее обозначение для столбцов матрицы $T_-(x,\mu)=(X_1(x,\mu),$ $X_2(x,\mu), X_3(x,\mu))$ и выделяя в (2.7) различные матричные элементы относительно V_1 и столбцы относительно

V_2, получаем требуемые соотношения. Например, для вывода равенства

$$X_3(x,\mu)C_1(\lambda)=C_1(x,\lambda,\mu+i0)X_3(x,\mu) \tag{2.8}$$

следует рассмотреть элемент 21 в (2.7) и третий столбец в V_2

$$C_1(x,\lambda,\mu)X_3(x,\mu)=T_-(x,\mu)\big(C_1(\lambda)\tau_{11}(\lambda-\mu)+A_2(\lambda)\tau_{21}(\lambda-\mu)+$$
$$+B_2(\lambda)\tau_{31}(\lambda-\mu)\big)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Согласно (I.I3) правая часть равна

$$X_3(x,\mu)C_1(\lambda)+\pi\eta\delta(\lambda-\mu)X_1(x,\lambda)Y_2(x,\lambda)X_3(x,\lambda),$$

где использовано представление оператора $B_2(\lambda)=Y_2(x,\lambda)X_3(x,\lambda)$ Воспользовавшись выражением (2.5) для $C_1(x,\lambda,\mu)$ и перенося слагаемое с δ - функцией в левую часть, получаем, (2.8). Аналогично выводятся соотношения

$$X_3(x,\mu)C_j(\lambda)=C_j(x,\lambda,\mu+i0)X_3(x,\mu),\ j=2,3 \tag{2.9}$$

Следовательно, столбец $X_3(x,\mu)$ допускает аналитическое продолжение по μ в верхнюю полуплоскость.

Для второго решения Йоста получаем

$$X_2(x,\mu)C_j(\lambda)=C_j(x,\lambda,\mu+i0)X_2(x,\mu),\ j=1,3 \tag{2.10}$$

$$X_2(x,\mu)C_2(\lambda)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu+i\eta}C_2(x,\lambda,\mu)X_2(x,\mu) \tag{2.11}$$

Поскольку действие X_2 на вакуум $\left(0,e^{i\mu a_2 x},\int\limits_{-\infty}^{x}q_2^+(y)e^{i\mu a_3 x+ia_{23}\mu y}dy\right)|0\rangle$ допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, то из (2.10) заключаем, что столбец $X_2(x,\mu)$ в целом не имеет аналитического продолжения по μ.

Возможность аналитического продолжения $X_1(x,\mu)$ в нижнюю полуплоскость проще всего доказать рассматривая действие $X_1^t(x,\mu)$ на состояния $\tilde{f}$ (2.2) и используя перестановочные соотношения

$$B_j(\lambda)X_1^t(x,\mu)=X_1^t(x,\mu)\tilde{B}_j(x,\lambda,\mu-i0),\ j=1,2,3. \tag{2.12}$$

которые следуют из равенства

$$T_-^t(x,\mu)\otimes\tilde{T}(x,\lambda,\mu)=R_1(\lambda-\mu)(I\otimes T^t(\lambda))(T_-^t(x,\mu)\otimes I) \quad (2.13)$$

$$\tilde{T}(x,\lambda,\mu)=(I\otimes T_-^t(x,\lambda))R(\mu-\lambda)(I\otimes T_+^t(x,\lambda)) \quad (2.14)$$

а $\tilde{B}_j(x,\lambda,\mu)$ – элемент под диагональю $\tilde{T}$ как матрицы в пространстве V_2. Состояния

$$X_3(x,\lambda)\prod_{\overrightarrow{j=1}}^{n} C_{m_j}(\mu_j)|0\rangle = e^{i\lambda a_3 x}\prod_{\overrightarrow{j=1}}^{n} C_{m_j}(x,\mu_j,\lambda+i0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|0\rangle \quad (2.15)$$

допускают аналитическое продолжение по λ в верхнюю полуплоскость. Определим аналитическую в $\mathbb{C}_-$ столбец-функцию $\Psi_3(x,\lambda)$ ее действием на состояния (2.1) формулой, аналогичной (2.15)

$$\Psi_3(x,\lambda)\prod_{\overrightarrow{j=1}}^{m} C_{m_j}(\mu_j)|0\rangle = e^{i\lambda a_3 x}\prod_{\overrightarrow{j=1}}^{n} C_{m_j}(x,\mu_j,\lambda+i0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|0\rangle. \quad (2.16)$$

Исследуя скачок функций $X_3(x,\lambda)$, $\Psi_3(x,\lambda)$ при вещественных λ, получаем

$$(\Psi_3(x,\lambda)-X_3(x,\lambda))f=(X_1(x,\lambda)R_3(\lambda)+X_-(x,\lambda)R_2(\lambda))f$$

где введено обозначение

$$X_-(x,\lambda)=(X_2(x,\lambda)-X_1(x,\lambda)R_1(\lambda)) \quad (2.17)$$

и использованы операторы $R_j(\lambda)$ (1.31).

Таким образом, имеем две функции аналитические в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ с известным скачком на вещественной оси

$$X_3(x,\lambda)=\Psi_3(x,\lambda)-(X_-(x,\lambda)R_3(\lambda)+X_-(x,\lambda)R_2(\lambda)) \quad (2.18)$$

Вводя нормированные при $x\to-\infty$ функции $\chi_j(x,\lambda)=e^{-i\lambda a_j x}X_j(x,\lambda)$ где $\chi_2\equiv\chi_-$ и предполагая отсутствие особенностей у $\Psi_3(x,\lambda)$ в $\mathbb{C}_-$, получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\chi_3(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\nu\,\frac{\chi_1(x,\nu)R_3(\nu)e^{ia_{13}x\nu}+\chi_-(x,\nu)R_2(\nu)e^{ia_{23}x\nu}}{(\nu-\lambda-i0)}\ . \tag{2.19}$$

Исследуя аналитические свойства $\chi_1(x,\lambda)$, $X_-(x,\lambda)$ и вводя

$$X_+(x,\lambda)=X_2(x,\lambda)-\tilde{R}_2(\lambda)X_3(x,\lambda)$$
$$\chi_+(x,\lambda)=e^{-i\lambda a_2 x}X_+(x,\lambda) \tag{2.20}$$

получаем интегральное уравнение для $\chi_1(x,\lambda)$

$$\chi_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\nu\,\frac{\tilde{R}_3(\nu)\chi_3(x,\nu)e^{-ia_{13}x\nu}+\tilde{R}_1(\nu)\chi_+(x,\nu)e^{-ia_{12}x\nu}}{\nu-\lambda+i0}\ , \tag{2.21}$$

где введена функция

$$\chi_+(x,\lambda)=e^{-i\lambda a_2 x}\left(X_2(x,\lambda)-\tilde{R}_2(\lambda)X_3(x,\lambda)\right). \tag{2.22}$$

Функции $X_\pm(x,\lambda)$, определяемые формулами (2.17), (2.20), допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости, а их скачок на вещественной оси равен

$$X_+(x,\lambda)=X_-(x,\lambda)+\left(X_1(x,\lambda)R_1(\lambda)-\tilde{R}_2(\lambda)X_3(x,\lambda)\right). \tag{2.23}$$

Завершают полный набор уравнений обратной задачи уравнения для $\chi_\pm$:

$$\chi_\pm(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\chi_1(x,\nu)R_1(\nu)e^{ia_{12}x\nu}-\tilde{R}_2(\nu)\chi_3(x,\nu)e^{-ia_{23}\nu x}}{\nu-\lambda\mp i0} \tag{2.24}$$

Наличие у гамильтониана (5) при рассмотрении его на всей оси связанных состояний ведет с одной стороны к расширению набора квантовых данных рассеяния (I.30), (I.3I) за счет соответствующих операторов рождения, а с другой стороны к существованию дополнительных ососбенностей в соответствующих полуплоскостях у аналитических операторных функций $\Psi_3(x,\lambda)$, $\chi_\pm(x,\lambda)$, и аналога Ψ_3 , построенного по $X_1(x,\lambda)$. Например, у Ψ_3 имеются скачки на прямых $\mathrm{Im}\,\lambda=-ic(n+1)/2$, $n=1,2\ldots$

Эти скачки описываются операторами $Q_{j,m}(\lambda)$ [9], которые выражаются через операторы уничтожения и рождения связных состояний n квантов поля $q_j(x)$ $j=1,2,3$

$$R_{j,n}(\lambda),\ \tilde{R}_{jn}(\lambda),\quad j=1,2,3;\quad n=1,2,\ldots \tag{2.25}$$

$$Q_{j,m}(\lambda)=\tilde{R}_{j\,m-1}(\lambda+i\,\eta/2)R_{i\,m}(\lambda), \tag{2.26}$$

$$\tilde{Q}_{j,m}(\lambda)=\tilde{R}_{j\,m}(\lambda)R_{j\,m-1}(\lambda-i\,\eta/2), \tag{2.27}$$

где $m=1$ отвечает обычным частицам, а $R_{j,0}\equiv 1$.

Дополнительные особенности ведут к дополнительным слагаемым в уравнениях обратной задачи, которые окончательно выглядят так

$$\begin{aligned}\chi_3(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\lambda-\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1)+i0\Big)^{-1}\times\\&\times\Big\{\chi_1\Big(x,\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)Q_{3,m}(\mu)\,e^{ia_{13}x(\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1))}+\\&+\chi_-\Big(x,\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)Q_{2,m}(\mu)\,e^{ia_{23}x(\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1))}\Big\}d\mu\Big)\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}\chi_1(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\lambda-\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1)-i0\Big)^{-1}\times\\&\times\Big\{\tilde{Q}_{3,m}(\mu)\chi_3\Big(x,\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)e^{-ia_{13}(\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1))x}+\\&+\tilde{Q}_{1,m}(\mu)\chi_+\Big(x,\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)e^{-ia_{12}x(\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1))}\Big\}d\mu\Big)\end{aligned}\tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\chi_\pm(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\lambda-\mu+\frac{i\eta}{2}(m+1)\pm i0\Big)^{-1}\times\\&\times\Big\{\chi_1\Big(x,\mu-\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)Q_{1,m}(\mu)\,e^{ia_{12}x(\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1))}-\\&-\tilde{Q}_{2,m}(\mu)\chi_3\Big(x,\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1)\Big)e^{-ia_{23}x(\mu+\frac{i\eta}{2}(m-1))}\Big\}d\mu\Big).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Локальные поля $q_i^{\#}(x)$, как и в МОЗР [5], восстанавливаются из решений Йоста при $\lambda \to \infty$. Например,

$$q_3^{+}(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sqrt{a_{13}} \left(\chi_1(x,\lambda)\right)_3 . \qquad (2.3I)$$

Поскольку с гамильтонианом (5) коммутируют два заряда $N_1 = n_1 + n_3$ и $N_3 = n_2 + n_3$

$$n_j = \int_{-\infty}^{\infty} q_j^{+}(x)\, q_j(x)\, dx , \qquad (2.32)$$

пространство состояний раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathcal{H}_F = \sum_{M,N=0}^{\infty} \mathcal{H}_{M,N} . \qquad (2.33)$$

Для восстановления локальных полей в каждом из подпространств достаточно конечного числа итераций.

Выражения полей $q_j^{\#}(x)$ через квантовые данные рассеяния полезны для вычисления функций Грина. При этом используются перестановочные соотношения операторов $R_{im}(\lambda)$, $\widetilde{R}_{jn}(\nu)$, $i,j = 1,2,3$; $m,n = 1,2,3,\ldots$, которые приведены в Приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В перестановочных соотношениях операторов рождения и уничтожения элементарных возбуждений и их связанных состояний фигурируют следующие обозначения

$$S_{mn}(\lambda) = \frac{\lambda + i\frac{\eta}{2}(m+n)}{\lambda - i\frac{\eta}{2}(m+n)} \; \frac{\lambda + i\frac{\eta}{2}|m-n|}{\lambda - i\frac{\eta}{2}|m-n|} \prod_{k=1}^{\min(m,n)-1} \left(\frac{\lambda + i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)}{\lambda - i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)} \right)^2 ,$$

$$P_{mn}(\lambda) = \frac{\lambda - i\frac{\eta}{2}(m+n)}{\lambda + i\frac{\eta}{2}|m-n|} \prod_{k=1}^{\min(m,n)-1} \frac{\lambda - i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)}{\lambda + i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)} ,$$

$$U_{mn}(\lambda) = \frac{\lambda + i\frac{\eta}{2}(m+n)}{\lambda - i\frac{\eta}{2}|m-n|} \prod_{k=1}^{\min(m,n)-1} \frac{\lambda + i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)}{\lambda - i\frac{\eta}{2}(m+n-2k)} = P^{*}_{mn}(\lambda^{*}).$$

1. $R_{im}(\lambda)R_{in}(\mu)=S_{mn}(\lambda-\mu)R_{in}(\mu)R_{im}(\lambda),\quad i=1,2,3,$

2. $R_{2m}(\lambda)R_{1n}(\mu)=P_{mn}(\lambda-\mu-i0)R_{1n}(\mu)R_{2m}(\lambda)-2\pi\eta n\delta_{mn}\delta(\lambda-\mu)R_{3n}(\lambda)$

3. $R_{3m}(\lambda)R_{1n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu+i0)R_{1n}(\mu)R_{3m}(\lambda),$

4. $R_{2m}(\lambda)R_{3n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu+i0)R_{2m}(\lambda)R_{3n}(\mu),$

5. $\widetilde{R}_{im}(\lambda)\widetilde{R}_{in}(\mu)=S_{mn}(\lambda-\mu)\widetilde{R}_{in}(\mu)\widetilde{R}_{im}(\lambda),\quad i=1,2,3,$

6. $\widetilde{R}_{2m}(\lambda)\widetilde{R}_{1n}(\mu)=P_{mn}(\lambda-\mu-i0)\widetilde{R}_{1n}(\mu)\widetilde{R}_{2m}(\lambda)-2\pi n\eta\delta_{mn}\delta(\lambda-\mu)\widetilde{R}_{3n}(\lambda)$

7. $\widetilde{R}_{3m}(\lambda)\widetilde{R}_{1n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu+i0)\widetilde{R}_{1n}(\mu)\widetilde{R}_{3m}(\lambda),$

8. $\widetilde{R}_{2m}(\lambda)\widetilde{R}_{3n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu+i0)\widetilde{R}_{3n}(\mu)\widetilde{R}_{2m}(\lambda),$

9. $R_{im}(\lambda)\widetilde{R}_{in}(\mu)=S_{mn}(\mu-\lambda)\widetilde{R}_{in}(\mu)R_{im}(\lambda)-2\pi\eta n\delta_{mn}\delta(\lambda-\mu),$

10. $R_{3m}(\lambda)\widetilde{R}_{1n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu)\widetilde{R}_{1n}(\mu)R_{3m}(\lambda),$

11. $R_{3m}(\lambda)\widetilde{R}_{2n}(\mu)=P_{mn}(\lambda-\mu+i0)\widetilde{R}_{2n}(\mu)R_{3m}(\lambda)-2\pi\eta\delta_{mn}\delta(\lambda-\mu)nR_{1n}(\mu)$

12. $R_{2m}(\lambda)\widetilde{R}_{1n}(\mu)=P^{-1}_{mn}(\lambda-\mu)\widetilde{R}_{1n}(\mu)R_{2m}(\lambda),$

13. $R_{2m}(\lambda)\widetilde{R}_{3n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu)\widetilde{R}_{3n}(\mu)R_{2m}(\lambda),$

14. $R_{1m}(\lambda)\widetilde{R}_{2n}(\mu)=U_{mn}(\lambda-\mu-i0)\widetilde{R}_{2n}(\mu)R_{1m}(\lambda),$

15. $R_{1m}(\lambda)\widetilde{R}_{3n}(\mu)=P_{mn}(\lambda-\mu+i0)\widetilde{R}_{3n}(\mu)R_{1m}(\lambda)-$

$$-2\pi\eta\delta(\lambda-\mu)\delta_{mn}n\widetilde{R}_{2n}(\lambda).$$

Литература

1. Ф а д д е е в Л.Д. В сб.: Проблемы квантовой теории поля (Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1979). Дубна: ОИЯИ, 1979, с.249-299.
2. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Lect.Notes Phys., 1982, v.151, p.61-119.
3. F a d d e e v L.D. In: Recent advances in field theory and statistical mechanics. Les Honches Summer School Proc., v.39, North-Holland, 1984, p.561-608.
4. И з е р г и н А.Г., К о р е п и н В.Е. Физика ЭЧАЯ, 1982, т.13, № 3, с.501-541.
5. З а х а р о в В.Е. и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
6. М а н а к о в С.В. ТМФ, 1976, т.28, № 2, с.172-179.
7. К у л и ш П.П., С к л я н и н Е.К. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.129-160.
8. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu. J.Phys.A: Math.Gen., 1983, v.16, p.L591-L596.
9. С м и р н о в Ф.А. Докл.АН СССР, 1982, т.262, № 1, с.78-82.
10. Р е ш е т и х и н Н.Ю., С м и р н о в Ф.А. Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1983, т.131, с.128-141.
11. С к л я н и н Е.К. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.55-128.
12. O h k u m a K., W a d a t i M. J.Phys.Soc.Jpn., 1984, v.53, 1229-1237; v.53, 2899-2907.
13. B o g o l u b o v N.N. (jr.) et al. JINR Rapid Commun., 1984, v.3, p.26-32.
14. C h e r n y a k V., K u p a s o v V. Phys.Lett., 1986, v.114A, N 2, p.77-80.
15. K u l i s h P.P. Physica D, 1985, v.17, N 1, c.102-111.

P.P.Kulish, F.A.Smirnov. Inverse problem equations for the quantum three wave system.

Analytic properties of the operator-valued Jost solutions to the auxiliary linear problem of the quantum three wave system are studied. Creation and annihilation operators of elementary excitations and their bound states are constructed. The local fields may be reconstructed from these operators using singular integral equations of the inverse problem.