ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.962.2

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ПЕРМАНЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ*)

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Исследуется дискретная система типа Лотки–Вольтерра с переключениями параметров. Она состоит из семейства подсистем нелинейных разностных уравнений и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Изучаются условия, обеспечивающие равномерную предельную ограниченность или равномерную перманентность данной системы при любом законе переключения. Основной подход к решению такой задачи базируется на построении общей функции Ляпунова для семейства подсистем, соответствующего системе с переключениями. В настоящей статье предлагается новая конструкция функции Ляпунова для рассматриваемых уравнений. Получены достаточные условия существования общей функции Ляпунова заданного вида, удовлетворяющей в положительном ортанте требованиям теоремы Йошизавы о предельной ограниченности. Эти условия формулируются в терминах разрешимости некоторых вспомогательных систем алгебраических неравенств, и их выполнение гарантирует предельную ограниченность или перманентность системы, равномерную относительно закона переключения. Предложенный подход позволяет ослабить некоторые известные условия предельной ограниченности и перманентности и распространить их на более широкие классы дискретных моделей динамики популяций. Приведен пример, демонстрирующий эффективность полученных результатов. Библиогр. 25 назв.

Ключевые слова: динамика популяций, системы с переключениями, разностные уравнения, диссипативность, перманентность, устойчивость, функции Ляпунова.

Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V. **On the ultimate boundedness and permanence of solutions for a class of discrete-time switched models of population dynamics** // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. Applied mathematics, computer science, control processes. 2014. Issue 1. P. 5–16.

A discrete-time Lotka–Volterra type system with switching of parameter values is studied. The system consists of a family of subsystems of nonlinear difference equations and a switching law constantly determining which subsystem is active. It focuses on conditions providing the uniform ultimate boundedness or uniform permanence for the considered system for any switching law. A general approach to the problem is based on the constructing of a common Lyapunov function for the family of subsystems corresponding to the switched system. In the present paper, a new construction of such Lyapunov function for considered equations is suggested. The sufficient conditions of the existence of a common Lyapunov function in the given form satisfying in

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-08-00948-а) и Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.674.2013).

the positive orthant all the assumptions of the Yoshizawa ultimate boundedness theorem are obtained. These conditions are formulated in terms of solvability of auxiliary systems of algebraic inequalities, and their fulfillment guarantees that the switched system is ultimately bounded or uniformly permanent with respect to switching law. The proposed approach permits to relax some known ultimate boundedness and permanence conditions and to extend them to wider classes of discrete-time models of population dynamics. An example is presented to demonstrate the effectiveness of the obtained results. Bibliogr. 25.

Keywords: population dynamics, switched systems, difference equations, ultimate boundedness, permanence, Lyapunov functions.

Введение. Для моделирования динамики биологических сообществ широко используются системы дифференциальных и разностных уравнений типа Лотки–Вольтерра [1–7]. Важной задачей, возникающей при анализе таких моделей, является исследование условий ограниченности их решений. С практической точки зрения особый интерес представляет ситуация, когда в фазовом пространстве изучаемой системы существует ограниченная область, такая, что каждое решение за конечное время попадает в эту область и остается в ней при дальнейшем возрастании времени [3, 8, 9]. В данном случае говорят, что решения предельно ограничены, а системы, обладающие указанным свойством, называют диссипативными [3, 8].

Другая актуальная проблема, связанная с анализом моделей, описывающих межвидовое взаимодействие, – это проблема персистентности [3, 9, 10]. Биологический смысл свойства персистентности заключается в том, что в процессе эволюции виды не вымирают, и, более того, какой бы малой ни была их первоначальная численность, найдется момент времени, начиная с которого численности видов будут превосходить некоторые фиксированные положительные значения.

Системы, обладающие свойством и диссипативности, и персистентности, называются перманентными [3, 8].

Условия диссипативности и перманентности хорошо изучены для моделей типа Лотки–Вольтерра с постоянными параметрами (см., например, [3, 4, 8, 9, 11, 12] и цитируемую там литературу). Однако воздействие ряда естественных и искусственных факторов, таких как пожары, засухи, дождливые сезоны, вырубка лесов, радиация и т. д., может приводить к резким изменениям внутренних связей в биологическом сообществе и характеристик среды обитания популяций. Для более адекватного моделирования подобных процессов используются импульсные и стохастические системы, а также системы с переключениями [13–17]. Для таких моделей проблемы исследования диссипативности и перманентности гораздо более сложные, чем для моделей, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями с постоянными параметрами.

В настоящей статье рассматривается дискретная система типа Лотки–Вольтерра с переключениями параметров. Она состоит из семейства подсистем нелинейных разностных уравнений и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем активна. Цель работы – получить условия, гарантирующие, что изучаемая система будет диссипативной или перманентной при любом законе переключения.

Основной подход к решению задач такого рода базируется на построении общей функции Ляпунова для семейства подсистем, соответствующего системе с переключениями. С его помощью были найдены условия устойчивости и ограниченности для многих типов систем (см., например, [12, 18–20]). Однако проблема существования общей функции Ляпунова в полном объеме не решена даже для семейства линейных автономных систем [18]. В данной работе предлагается способ построения функции Ляпунова для систем исследуемого вида. Его применение позволяет получить достаточные условия диссипативности и перманентности равномерных относительно закона переключения.

Постановка задачи. В [12] рассматривалась система разностных уравнений

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp \left(h \left(c_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k)) \right) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

моделирующая динамику численности n взаимодействующих популяций. Здесь $x_i(k)$ – плотность i-й популяции при k-й итерации, $k = 0, 1, \ldots$; функции $f_i(z_i)$ определены при $z_i \in [0, +\infty)$; $\sigma = \sigma(k)$ – функция, задающая закон переключения параметров с одного набора значений на другие, $\sigma(k) \in \{1, \ldots, N\}$; h – положительное число (шаг дискретизации); $c_i^{(s)}$ и $p_{ij}^{(s)}$ – постоянные величины; $s = 1, \ldots, N$; $i, j = 1, \ldots, n$.

При каждом значении k динамика системы (1) описывается одной из подсистем

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp \left(h \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k)) \right) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Модели вида (2) представляют собой дискретные аналоги непрерывной обобщенной вольтерровской модели межвидового взаимодействия [2–5, 21]. Известно [4, 5, 8, 9], что в ряде случаев дискретные модели являются более адекватными, чем непрерывные. Величины $c_i^{(s)}$ определяют скорость естественного прироста популяций; члены $p_{ii}^{(s)} f_i(x_i(k))$, где $p_{ii}^{(s)} < 0$, характеризуют процессы самолимитирования популяций по численности при наличии ограниченных ресурсов; наконец, выражения $p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k))$ при $j \neq i$ задают степень и характер межвидового взаимодействия. Переключения значений параметров в изучаемой модели могут быть вызваны внешними факторами, влияющими на рассматриваемую экосистему, например сезонными изменениями.

В соответствии с обычными предположениями (см. [2–5]) считалось, что функции $f_i(z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, обладают свойствами:

а) $f_i(z_i)$ непрерывны при $z_i \in [0, +\infty)$;

б) $f_i(0) = 0$ и $f_i(z_i) > 0$ при $z_i > 0$;

в) $f_i(z_i) \to +\infty$ при $z_i \to +\infty$.

В статье [12] были найдены достаточные условия, при выполнении которых можно гарантировать, что система (1) будет равномерно диссипативна при любом законе переключения. Для их получения общая функция Ляпунова для подсистем (2) выбиралась в виде

$$\widetilde{V}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{1}^{z_i} \frac{f_i(\tau)}{\tau} \, d\tau, \tag{3}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – положительные коэффициенты. При этом дополнительно предполагалось, что функции $f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n)$ удовлетворяют следующим ограничениям.

Предположение 1. Интегралы $\displaystyle\int_0^1 \frac{f_i(\tau)}{\tau} \, d\tau$, $i = 1, \ldots, n$, являются сходящимися.

Предположение 2. Для функций $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(\exp(z_i))$ при всех $z_i \in (-\infty, +\infty)$ выполнено условие Липшица с константой L, $i = 1, \dots, n$.

Однако следует заметить – в системе (1) считается, что степень влияния каждого j-го вида на остальные одинакова (определяется функцией $f_j(z_j)$), но в реальных биологических процессах это не всегда имеет место [6, 10, 22, 23]. Потому далее мы рассмотрим более общую модель

$$x_i(k+1) = x_i(k)\exp\left(h\left(c_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\sigma)} f_j^{\alpha_{ij}}(x_j(k))\right)\right), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

которая в ряде случаев позволяет более тонко учитывать различные нелинейные эффекты взаимодействия популяций, по сравнению с системой (1). Здесь α_{ij} – положительные параметры, задающие соответственно степень самолимитирования i-й популяции (при $j = i$) и степень влияния j-й популяции на i-тую (при $j \neq i$), $i, j = 1, \dots, n$, а остальные обозначения те же самые, что и в системе (1). Снова предположим, что функции $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$ обладают свойствами а)–в). Без потери общности будем считать, что $\alpha_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Система (4) состоит из семейства подсистем

$$x_i(k+1) = x_i(k)\exp\left(h\left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j^{\alpha_{ij}}(x_j(k))\right)\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, N. \tag{5}$$

Введем обозначения. Пусть R_+^n – неотрицательный ортант в n-мерном евклидовом пространстве R^n, а $\operatorname{int} R_+^n$ – множество его внутренних точек; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора; $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0)$ – решение уравнений (4), выходящее из точки $\mathbf{x}^{(0)}$ при $k = k_0$. Для заданного числа $Q > 0$ через B_Q обозначим множество точек $\{\mathbf{z} : \ \mathbf{z} \in \operatorname{int} R_+^n, \ \|\mathbf{z}\| \leqslant Q\}$.

В силу биологического смысла, систему (4) достаточно рассматривать только в положительном ортанте $\operatorname{int} R_+^n$, который представляет собой инвариантное множество для этой системы.

Определение 1. *Система* (4) *называется равномерно диссипативной в* $\operatorname{int} R_+^n$, *если существует такое число* $D > 0$, *что для любого* $Q > 0$ *можно выбрать* $T = T(Q) \geqslant 0$ *так, чтобы при всех* $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}^{(0)} \in B_Q$, $k \geqslant k_0 + T$ *имело место неравенство* $\|\mathbf{x}(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0)\| \leqslant D$.

Определение 2. *Система* (4) *называется равномерно перманентной, если существуют такие числа* η_1 *и* η_2, $0 < \eta_1 < \eta_2$, *что для любых* δ_1 *и* δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2$, *можно выбрать* $T = T(\delta_1, \delta_2) \geqslant 0$ *так, чтобы для решений* $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0)$ *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* $k_0 \geqslant 0$, $\delta_1 \leqslant x_i^{(0)} \leqslant \delta_2$, $i = 1, \dots, n$, *при всех* $k \geqslant k_0 + T$ *имели место неравенства* $\eta_1 \leqslant x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \leqslant \eta_2$, $i = 1, \dots, n$.

Исследуем условия, при выполнении которых система (4) будет равномерно диссипативна или равномерно перманентна при любом законе переключения.

Анализ равномерной диссипативности. Далее будем считать, что функции $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$ удовлетворяют дополнительному ограничению.

Предположение 3. Функции $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(\exp(z_i))$ непрерывно дифференцируемы при $z_i \in (-\infty, +\infty)$, и $0 < \tilde{f}_i'(z_i) \leqslant L$, $i = 1, \dots, n$, где L – положительная постоянная.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что из выполнения предположения 3 следует также выполнение предположения 2. Однако, в отличие от [12], в настоящей статье не требуется, чтобы функции $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$ удовлетворяли условиям предположения 1.

Рассмотрим вспомогательные системы неравенств

$$-\frac{1}{\gamma_i}+\frac{\alpha_{ij}}{\gamma_j}\leqslant 0, \qquad (i,j)\in\Omega, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\bar p_{ij}^{(s)}\theta_j^{\alpha_{ij}}<0, \qquad i=1,\ldots,n, \quad s=1,\ldots,N, \tag{7}$$

где $\bar p_{ii}^{(s)}=p_{ii}^{(s)}$, $\bar p_{ij}^{(s)}=\max\Big\{p_{ij}^{(s)};\,0\Big\}$ при $j\neq i$; $i,j=1,\ldots,n$; $s=1,\ldots,N$; $\Omega=\Big\{(i,j)\,:\,i,j=1,\ldots,n,\ j\neq i,\ \max_{s=1,\ldots,N}\bar p_{ij}^{(s)}\neq 0\Big\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 3. Если системы неравенств* (6) *и* (7) *имеют положительные решения, то существует такое* $h_0>0$, *что система* (4) *будет равномерно диссипативной в* $\operatorname{int}R_+^n$ *при любом* $h\in(0,h_0)$ *и при любом законе переключения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем положительные числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ и $\theta_1,\ldots,\theta_n$, для которых справедливы неравенства (6) и (7) соответственно. Не умаляя общности, считаем, что $\gamma_i\geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$. Найдем $\delta>0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{n}\bar p_{ij}^{(s)}\theta_j^{\alpha_{ij}}\leqslant-\delta, \qquad i=1,\ldots,n, \ \ s=1,\ldots,N.$$

Строим общую функцию Ляпунова для семейства (5) в виде

$$V(\mathbf z)=\max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{f_i(z_i)}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}. \tag{8}$$

Функция (8) непрерывна при $\mathbf z\in R_+^n$ и $V(\mathbf z)\to+\infty$ при $\|\mathbf z\|\to\infty$.

Выберем некоторое $s\in\{1,\ldots,N\}$. Пусть $\mathbf x(k)=(x_1(k),\ldots,x_n(k))^T$ – решение s-й подсистемы из семейства (5), определенное при всех $k=0,1,\ldots$ и содержащееся в множестве $\operatorname{int}R_+^n$. Вычислим приращение функции $V(\mathbf z)$ на этом решении. Получим

$$\Delta V\big|_{(s)}=V(\mathbf x(k+1))-V(\mathbf x(k))=\max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{f_i(x_i(k+1))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}-\max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}.$$

Для каждого $k=0,1,\ldots$ можно указать такое множество индексов $A_k\subset\{1,\ldots,n\}$ и такое положительное число B_k, что

$$\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}=B_k \quad \text{при} \quad i\in A_k, \qquad \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}<B_k \quad \text{при} \quad i\notin A_k.$$

Зафиксируем некоторое k. Пусть $i\in A_{k+1}$, $r\in A_k$. Выберем $H>0$ так, чтобы при $\|\mathbf z\|>H$ выполнялось неравенство $V(\mathbf z)>1$. Тогда при $\|\mathbf x(k)\|>H$ справедливы соотношения

$$\Delta V\big|_{(s)}=\left(\frac{f_i(x_i(k+1))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}-\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r}=$$

$$=\left(\left(\frac{f_i(x_i(k+1))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}-\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}\right)-\left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r}-\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}\right)=$$

$$= \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i}} h \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j^{\alpha_{ij}}(x_j(k)) \right) -$$

$$- \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i}} h \Big(c_i^{(s)} + \bar{p}_{ii}^{(s)} f_i(x_i(k)) +$$

$$+ \sum_{j \neq i} \bar{p}_{ij}^{(s)} \left(\frac{f_j(x_j(k))}{\theta_j} \right)^{\alpha_{ij}} \theta_j^{\alpha_{ij}} \Bigg) - \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i}} h \Big(c_i^{(s)} + \bar{p}_{ii}^{(s)} f_i(x_i(k)) +$$

$$+ \left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r/\gamma_i} \sum_{j \neq i} \bar{p}_{ij}^{(s)} \theta_j^{\alpha_{ij}} \Bigg) - \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i} \right) =$$

$$= \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i}} h \Big(c_i^{(s)} +$$

$$+ \bar{p}_{ii}^{(s)} \theta_i \left(\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right) - \left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r/\gamma_i} \right) +$$

$$+ \left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r/\gamma_i} \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_{ij}^{(s)} \theta_j^{\alpha_{ij}} \Bigg) - \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i}} h \left(c_i^{(s)} - B_k^{1/\gamma_i} \delta \right) + W(\mathbf{x}(k)).$$

Здесь

$$y_i(k) = \ln x_i(k), \quad \Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k), \quad \xi_{ik} \in (0,1),$$

$$W(\mathbf{x}(k)) = \frac{\gamma_i \tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k)) \tilde{f}_i'(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i - 1}} h \left| \bar{p}_{ii}^{(s)} \right| \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r/\gamma_i} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i/\gamma_i} \right) - \left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} - \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i} \right).$$

Произвольным образом выберем число $c > 1$. Предположим сначала, что

$$\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r} \geqslant c \left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i} \right)^{\gamma_i}.$$

Тогда при $\|\mathbf{x}(k)\| > H$ имеем

$$W(\mathbf{x}(k)) \leqslant \gamma_i L h \left| \bar{p}_{ii}^{(s)} \right| \frac{\tilde{f}_i^{\gamma_i - 1}(y_i(k) + \xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i - 1}} \left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r} \right)^{\gamma_r/\gamma_i} -$$

$$
-\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r} \leqslant a_1 h\left(\frac{|\tilde{f}_i(y_i(k)+\xi_{ik}\Delta y_i(k))-\tilde{f}_i(y_i(k))|^{\gamma_i-1}}{\theta_i^{\gamma_i-1}}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i-1}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r} \leqslant
$$

$$
\leqslant a_1 h\left(\left(\frac{L\,h}{\theta_i}\left(|c_i^{(s)}|+\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}^{(s)}|f_j^{\alpha_{ij}}(x_j(k))\right)\right)^{\gamma_i-1}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{1}{c}\right)^{(\gamma_i-1)/\gamma_i}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r(\gamma_i-1)/\gamma_i}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r} \leqslant
$$

$$
\leqslant a_1 h\left(\left(\frac{L\,h}{\theta_i}\left(|c_i^{(s)}|+\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}^{(s)}|\theta_j^{\alpha_{ij}}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}\right)\right)^{\gamma_i-1}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{1}{c}\right)^{(\gamma_i-1)/\gamma_i}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r(\gamma_i-1)/\gamma_i}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r} \leqslant
$$

$$
\leqslant a_2 h^{\gamma_i}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(1-\frac{1}{c}-a_3 h^{\gamma_i}-a_4 h\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r},
$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – положительные постоянные. Значит, если h достаточно мало, то $W(\mathbf{x}(k))<0$ при $\|\mathbf{x}(k)\|>H$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$
\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r} \leqslant c\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}.
$$

Используя неравенство $x^m-y^m \geqslant m y^{m-1}(x-y)$, справедливое для всех $x \geqslant y \geqslant 0$ и $m>1$, при $\|\mathbf{x}(k)\|>H$ находим

$$
W(\mathbf{x}(k)) \leqslant \left(\gamma_i L h\left|\bar{p}_{ii}^{(s)}\right|\frac{\tilde{f}_i^{\gamma_i-1}(y_i(k)+\xi_{ik}\Delta y_i(k))}{\theta_i^{\gamma_i-1}}-\gamma_i\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i-1}\right)\times
$$

$$
\times\left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i/\gamma_i}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant\left(b_1 h^{\gamma_i}\left(|c_i^{(s)}|+\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}^{(s)}|\theta_j^{\alpha_{ij}}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}\right)^{\gamma_i-1}+b_2 h\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r(\gamma_i-1)/\gamma_i}-\right.
$$

$$
\left.-\gamma_i\left(\frac{1}{c}\right)^{(\gamma_i-1)/\gamma_i}\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r(\gamma_i-1)/\gamma_i}\right)\left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i/\gamma_i}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant\left(b_3 h^{\gamma_i}+\left(b_4 h^{\gamma_i}+b_5 h-\gamma_i\left(\frac{1}{c}\right)^{(\gamma_i-1)/\gamma_i}\right)\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r(\gamma_i-1)/\gamma_i}\right)\times
$$

$$\times\left(\left(\frac{f_r(x_r(k))}{\theta_r}\right)^{\gamma_r/\gamma_i}-\left(\frac{f_i(x_i(k))}{\theta_i}\right)^{\gamma_i/\gamma_i}\right).$$

Здесь $b_1,\dots,b_5$ – положительные постоянные. Значит, если h достаточно мало, то $W(\mathbf{x}(k))\leqslant 0$ при $\|\mathbf{x}(k)\|>H$.

Следовательно, существуют числа $\tilde H>0$ и $h_0>0$ такие, что для любого закона переключения и при всех $h\in(0,h_0)$ приращение функции Ляпунова $V(\mathbf{z})$ на решениях системы (4) будет отрицательным в области $\|\mathbf{z}\|>\tilde H$.

Положим

$$M_1=\max_{\mathbf{z}\in R^n_+,\ \|\mathbf{z}\|\leqslant\tilde H}V(\mathbf{z}),\qquad M_2>M_1+\mu,$$

где

$$\mu=\max_{s=1,\dots,N}\ \max_{i=1,\dots,n}\ \max_{\mathbf{z}\in R^n_+,\ \|\mathbf{z}\|\leqslant\tilde H}\frac{1}{\theta_i^{\gamma_i}}\left(f_i^{\gamma_i}\left(z_i\exp\varphi_i^{(s)}(\mathbf{z})\right)-f_i^{\gamma_i}(z_i)\right),$$

$$\varphi_i^{(s)}(\mathbf{z})=h\left(c_i^{(s)}+\sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)}f_j^{\alpha_{ij}}(z_j)\right).$$

Рассмотрим область $G=\{\mathbf{z}:\mathbf{z}\in\operatorname{int}R^n_+,\ V(\mathbf{z})\leqslant M_2\}$. Получим, что $V(\mathbf{x}(k+1))\leqslant M_2$ при $\|\mathbf{x}(k))\|\leqslant\tilde H$ и $V(\mathbf{x}(k+1))<V(\mathbf{x}(k))$ при $\|\mathbf{x}(k))\|>\tilde H$. Тогда если решение $\mathbf{x}(k,\mathbf{x}^{(0)},k_0)$ системы (4) при $k=k_1\geqslant k_0$ попадет в область G, то оно будет оставаться в ней при всех $k\geqslant k_1$.

Зададим положительное число Q и докажем существование величины $T=T(Q)\geqslant 0$ такой, что $V(\mathbf{x}(k,\mathbf{x}^{(0)},k_0))\leqslant M_2$ для всех $k_0\geqslant 0$, $\mathbf{x}^{(0)}\in B_Q$ и $k\geqslant k_0+T(Q)$.

Пусть $U=\max_{\mathbf{z}\in R^n_+,\ \|\mathbf{z}\|\leqslant Q}V(\mathbf{z})$. Если $U\leqslant M_2$, то можно взять $T(Q)=0$.

Изучим теперь случай, когда $U>M_2$. Предположим, что $V(\mathbf{x}(k,\mathbf{x}^{(0)},k_0))>M_2$ при $k=k_0,k_0+1,\dots,\tilde k$. Тогда имеют место неравенства

$$M_2<V(\mathbf{x}(\tilde k,\mathbf{x}^{(0)},k_0))\leqslant V(\mathbf{x}^{(0)})-\rho(\tilde k-k_0)\leqslant U-\rho(\tilde k-k_0),$$

где

$$\rho=-\max_{s=1,\dots,N}\ \max_{\mathbf{z}\in R^n_+,\ M_2\leqslant V(\mathbf{z})\leqslant U}\Delta V\big|_{(s)}>0.$$

Следовательно, $\tilde k<k_0+(U-M_2)/\rho$. Выбирая $T(Q)=(U-M_2)/\rho$, получаем, что $V(\mathbf{x}(k,\mathbf{x}^{(0)},k_0))\leqslant M_2$ при $k\geqslant k_0+T(Q)$. Таким образом, система (4) равномерно диссипативна в $\operatorname{int}R^n_+$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Требование существования положительного решения системы неравенств вида (7) представляет собой известное условие Мартынюка–Оболенского устойчивости автономных систем Важевского [24, 25].

З а м е ч а н и е 3. В случае, когда $\alpha_{ij}=1$ при всех $i,j=1,\dots,n$, теорема 1 задает менее жесткие ограничения на параметры $p_{ij}^{(s)}$, гарантирующие равномерную диссипативность, по сравнению с ограничениями, найденными в [12] с помощью функции Ляпунова (3).

З а м е ч а н и е 4. Функция Ляпунова вида (8) использовалась в работах [11, 20] для определения условий устойчивости и диссипативности систем дифференциальных уравнений.

З а м е ч а н и е 5. Если все коэффициенты $c_i^{(s)}$ отрицательны, то вместо системы строгих неравенств (7) достаточно использовать нестрогие неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{p}_{ij}^{(s)} \theta_j^{\alpha_{ij}} \leqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Следствие. *Пусть* $c_i^{(s)} < 0$, $i = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, N$, *и выполнено предположение 3. Если системы неравенств* (6) *и* (9) *имеют положительные решения, то существует такое* $h_0 > 0$, *что система* (4) *будет равномерно диссипативной в* $\operatorname{int} R_+^n$ *при любом* $h \in (0, h_0)$ *и при любом законе переключения.*

Достаточные условия перманентности. Далее считаем, что параметры $c_i^{(s)}$ и $p_{ij}^{(s)}$ в системе (4) удовлетворяют следующим дополнительным ограничениям.

Предположение 4. Справедливы неравенства $c_i^{(s)} > 0$, $p_{ij}^{(s)} \geqslant 0$ при $j \neq i$; $i, j = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, N$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 3 и 4. Если системы неравенств* (6) *и* (7) *имеют положительные решения, то существует такое* $h_0 > 0$, *что система* (4) *будет равномерно перманентной при любом* $h \in (0, h_0)$ *и при любом законе переключения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Общую функцию Ляпунова для семейства (5) снова строим в виде (8), где положительные числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и $\theta_1, \ldots, \theta_n$ удовлетворяют неравенствам (6) и (7) соответственно, причем $\gamma_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$. Выберем $\tilde{H} > 0$ и $h_0 > 0$ так, чтобы для любого закона переключения и при всех $h \in (0, h_0)$ приращение функции $V(\mathbf{z})$ на решениях системы (4) было отрицательным в области $\|\mathbf{z}\| > \tilde{H}$.

Согласно доказательству теоремы 1, найдется число $\eta_2 > 0$, и для любых положительных чисел δ_1 и δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2$, можно указать $\eta > 0$ и $T > 0$ такие, что если для начальных данных решения $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0)$ системы (4) справедливы соотношения $k_0 \geqslant 0$, $\delta_1 \leqslant x_i^{(0)} \leqslant \delta_2$, $i = 1, \ldots, n$, то $0 < x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \leqslant \eta$, $i = 1, \ldots, n$, при $k \geqslant k_0$, а при $k \geqslant k_0 + T$ имеем $0 < x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \leqslant \eta_2$, $i = 1, \ldots, n$.

Из выполнения предположения 4 следует существование таких $\delta > 0$ и $\beta > 0$, что $c_i^{(s)} + p_{ii}^{(s)} f_i(z_i) \geqslant \beta$ при $0 < z_i \leqslant \delta$, $i = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, N$. Значит, если $0 < x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) < \delta$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $x_i(k+1, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \geqslant x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \exp(h\beta)$.

Пусть

$$\omega = \min_{s=1,\ldots,N} \; \min_{i=1,\ldots,n} \; \min_{0 \leqslant z_i \leqslant \eta} \left(c_i^{(s)} + p_{ii}^{(s)} f_i(z_i) \right),$$

$$\tilde{\omega} = \min_{s=1,\ldots,N} \; \min_{i=1,\ldots,n} \; \min_{0 \leqslant z_i \leqslant \Delta_2} \left(c_i^{(s)} + p_{ii}^{(s)} f_i(z_i) \right).$$

Отсюда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ при $k \geqslant k_0$, $x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \geqslant \delta$ имеет место оценка $x_i(k+1, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \geqslant \delta \exp(h\omega)$, а при $k \geqslant k_0 + T$, $x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \geqslant \delta$ – оценка $x_i(k + 1, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \geqslant \delta \exp(h\tilde{\omega})$.

Следовательно, существует число $\widetilde{T} \geqslant T$ такое, что $\eta_1 \leqslant x_i(k, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) \leqslant \eta_2$, $i = 1, \ldots, n$, при $k \geqslant k_0 + \widetilde{T}$, где $\eta_1 = \delta \min\{1; \exp(h\tilde{\omega})\}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6. Выполнение предположения 3 с единой для всех $z_i \in (-\infty, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, постоянной L является довольно жестким ограничением на функции $f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n)$. Стоит отметить, что аналогичным образом можно получить условия перманентности системы (4) в случае, когда при каждом $r > 0$ функции $\tilde{f}_i(z_i)$ обладают указанными в предположении 3 свойствами при $z_i \in (-\infty, r)$, $i = 1, \dots, n$, с константой $L(r)$, причем $L(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Однако в этом случае нельзя гарантировать, что перманентность есть для всех решений уравнений (4). Для любого $Q > 0$ найдется число $h_0 > 0$ такое, что при $h \in (0, h_0)$ условия из определения 2 выполняются только при $\delta_2 < Q$.

Пример. Пусть семейство (5) состоит из следующих подсистем:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k)\exp\left(h\left(1 - bf_1(x_1(k)) + 2f_2^3(x_2(k)) - f_3^{1/5}(x_3(k))\right)\right), \\ x_2(k+1) &= x_2(k)\exp\left(h\left(2 - f_1^q(x_1(k)) - 2f_2(x_2(k)) + f_3^{1/2}(x_3(k))\right)\right), \\ x_3(k+1) &= x_3(k)\exp\left(h\left(3 + 2f_1^l(x_1(k)) - f_2(x_2(k)) - f_3(x_3(k))\right)\right) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k)\exp\left(h\left(3 - bf_1(x_1(k)) - f_2^3(x_2(k)) + 2f_3^{1/5}(x_3(k))\right)\right), \\ x_2(k+1) &= x_2(k)\exp\left(h\left(4 + 2f_1^q(x_1(k)) - 2f_2(x_2(k)) - f_3^{1/2}(x_3(k))\right)\right), \\ x_3(k+1) &= x_3(k)\exp\left(h\left(1 - f_1^l(x_1(k)) + 2f_2(x_2(k)) - f_3(x_3(k))\right)\right), \end{cases}$$

где q, l, b – положительные параметры. Таким образом, здесь $n = 3$, $N = 2$. Будем считать, что функции $f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)$ обладают свойствами, указанными в предположении 3.

Выпишем системы (6) и (7), соответствующие рассматриваемому случаю. Получим

$$3\gamma_1 - \gamma_2 \leqslant 0, \quad \frac{1}{5}\gamma_1 - \gamma_3 \leqslant 0, \quad q\gamma_2 - \gamma_1 \leqslant 0, \quad \frac{1}{2}\gamma_2 - \gamma_3 \leqslant 0, \quad l\gamma_3 - \gamma_1 \leqslant 0, \quad \gamma_3 - \gamma_2 \leqslant 0,$$

$$-b\,\theta_1 + 2\theta_2^3 < 0, \quad -2\,\theta_2 + \theta_3^{1/2} < 0, \quad -\theta_3 + 2\theta_1^l < 0,$$

$$-b\,\theta_1 + 2\theta_3^{1/5} < 0, \quad -2\theta_2 + 2\theta_1^q < 0, \quad -\theta_3 + 2\theta_2 < 0.$$

Нетрудно проверить, что эти неравенства имеют положительные решения тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $q < 1/3,\ l < 2/3$;

б) $q = 1/3,\ l \leqslant 2/3,\ b > 2$;

в) $q < 1/3,\ l = 2/3,\ b > 1/\sqrt{2}$.

Согласно теореме 1, при найденных значениях параметров q, l и b и для достаточно малых h соответствующая система с переключениями будет равномерно диссипативной в $\operatorname{int} R_+^n$ при любом законе переключения.

Заключение. В данной статье определены достаточные условия равномерной диссипативности и равномерной перманентности для одного класса дискретных моделей популяционной динамики. Эти условия сформулированы в терминах существования положительных решений некоторых вспомогательных систем алгебраических неравенств. Предложен способ построения общей функции Ляпунова для семейства подсистем, соответствующего рассматриваемой системе с переключениями. Его применение позволило усилить результаты, полученные в работе [12], и распространить их на более широкий класс систем.

Литература

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / пер. с франц. О. Н. Бондаренко; под ред. Ю. М. Свирежева. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 288 с. (*Volterra V.* Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie.)

2. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.

3. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p.

4. *Hofbauer J., Hutson V., Jansen W.* Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka–Volterra type // J. Math. Biol. 1987. Vol. 25. P. 553–570.

5. *Redheffer R., Walter W.* Solution of the stability problem for a class of generalized Volterra prey-predator systems // J. of Differential Equations. 1984. Vol. 52, N 2. P. 245–263.

6. *Gilpin M. E., Ayala F. J.* Global models of growth and competition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1973. Vol. 70. P. 3590–3593.

7. *Горбунова Е. А., Колпак Е. П.* Математические модели одиночной популяции // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 4. С. 18–30.

8. *Chen F., Wu L., Li Z.* Permanence and global attractivity of the discrete Gilpin–Ayala type population model // Computers and Mathematics with Applications. 2007. Vol. 53. P. 1214–1227.

9. *Lu Z., Wang W.* Permanence and global attractivity for Lotka–Volterra difference systems // J. Math. Biol. 1999. Vol. 39. P. 269–282.

10. *Chen F.* Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin–Ayala type competition model with delays // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2006. Vol. 7. P. 1205–1222.

11. *Александров А. Ю., Платонов А. В., Чэнь Я.* О диссипативности некоторых классов моделей популяционной динамики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 2. С. 3–17.

12. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V., Zhang L.* Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems // J. of Difference Equations and Applications. 2012. Vol. 18, N 9. P. 1545–1561.

13. *Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C.* Competitive Lotka–Volterra population dynamics with jumps // Nonlinear Analysis. 2011. Vol. 74. P. 6601–6616.

14. *Hu H., Wang K., Wu D.* Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka–Volterra competitive system with impulses and infinite delays // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 377. P. 145–160.

15. *Martynyuk A. A.* Stability in the models of real world phenomena // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2011. Vol. 11, N 1. P. 7–52.

16. *Zhu C., Yin G.* On competitive Lotka–Volterra model in random environments // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 357. P. 154–170.

17. *Zhu C., Yin G.* On hybrid competitive Lotka–Volterra ecosystems // Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 71. P. 1370–1379.

18. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. 1999. Vol. 19, N 15. P. 59–70.

19. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev. 2007. Vol. 49, N 4. P. 545–592.

20. *Александров А. Ю., Платонов А. В., Чен Я.* К вопросу об абсолютной устойчивости нелинейных систем с переключениями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2008. Вып. 2. С. 119–133.

21. *Chen F. D., Shi C. L.* Global attractivity in an almost periodic multi-species nonlinear ecological model // Appl. Math. Comput. 2006. Vol. 180, N 1. P. 376–392.

22. *Ayala F. J., Gilpin M. E., Eherenfeld J. G.* Competition between species: theoretical models and experimental tests // Theoretical Population Biology. 1973. Vol. 4. P. 331–356.

23. *Gilpin M. E., Ayala F. J.* Schoener's model and Drosophila competition // Theoretical Population Biology. 1976. Vol. 9. P. 12–14.

24. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1392–1407.

25. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Об устойчивости и диссипативности некоторых классов сложных систем // Автоматика и телемеханика. 2009. № 8. С. 3–18.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 31 октября 2013 г.

Контактная информация

Александров Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой; e-mail: alex43102006@yandex.ru

Платонов Алексей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: al-platon1@yandex.ru

Aleksandrov Alexander Yurjevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair, St. Petersburg State University, 199034, St. Petersburg, Russian Federation; e-mail: alex43102006@yandex.ru

Platonov Alexey Viktorovich – candidate of physical and mathematical sciences, associated professor, St. Petersburg State University, 199034, St. Petersburg, Russian Federation; e-mail: al-platon1@yandex.ru