Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. Б. Фарфоровская, Оценки коммутаторов нормальных операторов,
Алгебра и анализ, 1999, том 11, выпуск 4, 204–221

https://www.mathnet.ru/aa1069

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
24 мая 2025 г., 23:19:43

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 4

ОЦЕНКИ КОММУТАТОРОВ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© Ю. Б. Фарфоровская

Пусть A, B, T — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве, причем A и B нормальны. Если функция f на комплексной плоскости удовлетворяет условию Липшица с константой C, то

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 6C[\log(d\|T\|\,\|AT - TB\|^{-1} + 1) + 2]^3\|AT - TB\|,$$

где d — сторона квадрата, содержащего спектры операторов A и B.

Введение

Пусть A, B, T — ограниченные линейные операторы в (сепарабельном) гильбертовом пространстве H, причем A и B нормальны. Что можно сказать об операторе $f(A)T - Tf(B)$, где f — некоторая функция, если мы знаем оператор $AT - TB$?

Эта постановка включает в себя несколько старых сюжетов. Например, если T — тождественный оператор, ее можно воспринимать как задачу об оценке „приращения“ $f(A) - f(B)$ в терминах разности $A - B$. Если, напротив, оператор T произволен, но $A = B$, то речь идет о связи между коммутаторами $f(A)T - Tf(A)$ и $AT - TA$.

Самый известный пример такой связи — классическая теорема Фугледе, утверждающая, что оператор, коммутирующий с нормальным оператором A, коммутирует и с любой борелевской функцией f от A. Наша цель в этой работе — по крайней мере для липшицевых функций f выявить достаточно точную оценку, стоящую за этим утверждением о равенствах. Оценка будет доказана сразу в общей ситуации трех операторов A, B, T, хотя ее стандартным образом можно было бы свести к случаю $A = B$ (достаточно рассмотреть операторы $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ и $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$ в $H \oplus H$). Упрощений в вычислениях в случае $A = B$, однако, не наступает.

Ключевые слова: коммутатор, нормальный оператор, теорема Фугледе, липшицевы функции.

Приведем точную формулировку.

Если f — липшицева функция, мы будем обозначать через $[f]$ наилучшую константу C в неравенстве $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Пусть спектры нормальных операторов A и B содержатся в квадрате со стороной d, а $M = d\|T\|(\|AT - TB\|)^{-1} + 1$. Тогда

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 6[f](\log M + 2)^3\|AT - TB\|. \tag{1}$$

В случае $T = I$ („задача о приращениях“) подобная оценка была анонсирована автором в [1], однако ее доказательство так и не было опубликовано ввиду сложности. К тому же то доказательство не проходит для коммутаторов.

Если A и B — *самосопряженные* операторы (и соответственно f — липшицева функция на прямой), то оценка вида (1) была получена автором в [5]. Логарифмический множитель входил в нее в степени 2, а роль числа d играла длина наименьшего интервала, содержащего спектры операторов A и B. В [5] можно найти небольшой обзор родственных оценок, а также указания на предшествующие результаты автора (и не только) для самосопряженных A и B. Здесь мы упомянем лишь теорему Като [4], относящуюся к случаю $T = I$, $f(x) = |x|$ (тогда можно ограничиться первой степенью логарифмического множителя; см. также [5], где дано другое доказательство последнего утверждения). Полностью избавиться от „нелинейности“ в оценках типа (1) нельзя (снова см. [5] и имеющиеся там ссылки).

Метод из [5], ведущий к оценке типа (1) для самосопряженных A и B, не годится для произвольных нормальных операторов. Оценки из [5] основывались на неравенстве

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant [f](\log n + 2)^2\|AT - TB\|, \tag{2}$$

верном для самосопряженных операторов A и B, спектр одного из которых сводится к n точкам. В настоящей работе для нормальных операторов A и B автору удалось получить аналогичное неравенство

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 2[f](\log n + 2)^3\|AT - TB\| \tag{3}$$

лишь при условии, что все точки спектра *обоих* операторов A и B лежат в узлах некоторой квадратичной решетки размера $n \times n$. При этом доказательство неравенства (3) в плане техники довольно значительно отличается от доказательства оценки (2) в [5] и сложнее его, хотя и основано на родственной идее.

Оценки (3) хватает для того, чтобы вывести неравенство (1) в полной общности. В случае задачи о коммутаторах (с не обязательно самосопряженными A и B) предшествующая информация о „непрерывности" наподобие неравенства (1) довольно скудна. По существу мы можем упомянуть только теорему Мура [2], утверждающую, что разность $f(A)T - Tf(B)$ непременно мала, если мала разность $AT - TB$, — правда, от функции f здесь требуется лишь непрерывность. Точная формулировка такова: если функция f непрерывна на объединении спектров операторов A и B, а K, $\varepsilon > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что из неравенств $\|T\| \leqslant K$, $\|AT - TB\| \leqslant \delta$ вытекает, что $\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant \varepsilon$. Мур выводит это утверждение из случая, когда $f(z) = \bar{z}$ (и $A = B$ — но последнее, как уже объяснялось, не ограничительно). Рассуждение Мура для $f(z) = \bar{z}$ дает некоторую зависимость δ от ε, но весьма скверную: $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon\exp(-8/\varepsilon)$ при условии, что $\|T\| \leqslant 1$, $\|A\| = \|B\| = 1$. Это с лихвой перекрывается неравенством (1). Отметим еще, что условие $\|T\| \leqslant K$ в теореме Мура существенно: в [3] построен нормальный оператор A и ограниченные операторы T_n, такие что $\|AT_n - T_nA\| \to 0$, но $\|A^*T_n - T_nA^*\| \geqslant 1$ (при этом, разумеется, $\|T_n\| \to \infty$).

Из теоремы Фугледе следует, что если $AT - TB = 0$, то $f(A)T - Tf(B) = 0$ для любой ограниченной борелевской функции f (чтобы увидеть это, достаточно, введя операторы $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$, снова перейти к коммутаторам). „Непрерывная зависимость" оператора $f(A)T - Tf(B)$ от $AT - TB$, однако, нарушится. Некую конкретизацию последнего утверждения мы находим в [6], где построен пример нормального оператора A, борелевского множества Δ и последовательности операторов T_n, таких что $\|T_n\| = \|\chi_\Delta(A)T_n - T_n\chi_\Delta(A)\| = 1$, а $\|AT_n - T_nA\| \to 0$ при $n \to 0$. (Здесь и далее χ_Δ — характеристическая функция множества Δ; отметим, что $\chi_\Delta(A)$ — не что иное, как значение спектральной меры оператора A на множестве Δ).

Статья делится на три параграфа. Первые два посвящены доказательству подготовительного неравенства (3). В §1 мы делаем лишь несколько первых шагов — исключаем функцию f и выясняем, что же в действительности требуется оценить. Дальнейшие рассуждения носят скорее комбинаторный характер и изрядная часть специфики исходной задачи в них не используется. Мы выделили эти рассуждения в §2. Идея состоит в том, чтобы разбить оператор на относительно небольшое число частей, каждая из которых оценивается легко. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что каждая такая часть устроена наподобие вырезки нескольких прямоугольных кусков из матрицы, причем проекции этих кусков на любую из координатных осей попарно не пересекаются. Дело, однако, осложняется тем, что такие „вырезки" приходится производить из довольно громоздких сумм по четырем индексам (спектральная мера каждого из операторов A и B есть сумма проекторных нагрузок в точках *квадратичной* решетки, а нам придется брать „двойной интеграл" по этим мерам).

В §3 доказывается главный результат статьи — неравенство (1). Впрочем, имея оценку (3), сделать это уже относительно несложно, ибо „вблизи“ любого нормального оператора A найдется другой нормальный оператор, коммутирующий с A и имеющий спектр в узлах квадратичной решетки. В конце статьи приводится одно обобщение основного результата — теорема 3 (при $T = I$ подобное утверждение было анонсировано в [1]; как уже говорилось, в той статье имелся в виду другой метод доказательства, непригодный при $T \neq I$).

Благодарность. Автор признателен С. В. Кислякову за конструктивную критику первоначального текста статьи и существенную помощь при его переработке.

§1. Операторы с конечным спектром: подготовительные шаги

Пусть A и B — два нормальных оператора в H. Предположим, что оба они имеют конечный спектр и их собственные числа лежат в узлах квадратной решетки, а именно среди чисел $\nu_{ks} = \lambda_k + i\mu_s$, $k = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, n$, причем $\lambda_k - \lambda_j = c(k-j)$ и $\mu_k - \mu_j = c(k-j)$. Далее, пусть f — функция, заданная в квадрате, содержащем все точки ν_{ks}, и удовлетворяющая там условию Липшица.

Основная лемма. *При сделанных предположениях для любого ограниченного оператора T имеем*

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 2[f](\log n + 2)^3 \|AT - TB\|.$$

Не теряя общности, считаем что $[f] \leqslant 1$. Логарифмы берутся по основанию 2. Для доказательства леммы сначала мы выразим оператор $R = f(A)T - Tf(B)$ через спектральные меры операторов A и B. Пусть F_{ks} — спектральный ортогональный проектор оператора B, соответствующий собственному числу ν_{ks} (если ν_{ks} не является собственным числом, считаем, что $F_{ks} = 0$). Аналогично пусть G_{ks} — спектральный ортогональный проектор оператора A, соответствующий точке ν_{ks}. Очевидно, $G_{ks}f(A) = f(A)G_{ks} = f(\nu_{ks})G_{ks}$, $F_{ks}f(B) = f(B)F_{ks} = f(\nu_{ks})F_{ks}$.

Мы можем записать следующее представление оператора R:

$$\begin{aligned} R = \sum_{j,p}\sum_{k,s} G_{jp}RF_{ks} &= \sum\sum G_{jp}(f(A)T - Tf(B))F_{ks} \\ &= \sum\sum [f(\nu_{jp}) - f(\nu_{ks})]G_{jp}TF_{ks}. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как

$$\begin{aligned} G_{jp}(AT - TB)F_{ks} &= (\lambda_j + i\mu_p)G_{jp}TF_{ks} - G_{jp}TF_{ks}(\lambda_k + i\mu_s) \\ &= [(\lambda_j - \lambda_k) + i(\mu_p - \mu_s)]G_{jp}TF_{ks} \\ &= c[(j-k) + i(p-s)]G_{jp}TF_{ks}, \end{aligned}$$

то, выражая из последней формулы $G_{jp}TF_{ks}$ и подставляя это выражение в (4), получаем

$$R = \sum_{k,j,s,p} \frac{(f(\nu_{jp}) - f(\nu_{ks}))G_{jp}LF_{ks}}{c((j-k)+i(p-s))}, \tag{5}$$

где $L = AT - TB$. (Всюду считаем, что $0/x = 0$ при любом значении x).

Суммирование в (5) происходит по всем индексам k, j, s, p, меняющихся в пределах от 1 до n. Следующий шаг — избавиться от функции f, использовав условие Липшица. Мы сделаем это для частичных сумм по параллелепипедам специального вида. Параллелепипедом мы будем называть любое произведение $K\times J\times S\times P$, где K, J, S, $P \subset \{1,2,\dots,n\}$. Если $C, D \subset \{1,2,\dots,n\}$, мы говорим, что C *меньше* (*строго меньше*), чем D и пишем $C \preceq D$ (соответственно $C \prec D$), если любой элемент множества C (строго) меньше любого элемента множества D в смысле обычного порядка в $\{1,2,\dots,n\}$. Множества C и D называются (строго) разделенными, если одно из них (строго) меньше другого.

Нас будут интересовать параллелепипеды $\pi = K\times J\times S\times P$ следующих типов.

(i) Множества K и J строго разделены; множества S и P также строго разделены.

(ii) Множества K и J строго разделены, $S = P = \{d\}$ $(d \in \{1,2,\dots,n\})$.

(iii) Множества S и P строго разделены, $K = J = \{l\}$ $(l \in \{1,2,\dots n\})$.

(iv) $K = J = \{l\}$, $S = P = \{d\}$, $l, d \in \{1,2,\dots,n\}$.

В случае, если K и J в (i)-(iv) строго разделены, обозначим через α наибольший элемент в меньшем из них; в случае, если S и P строго разделены, наибольший элемент в меньшем из них обозначим через β.

Пусть G — частичная сумма выражения (5), соответствующая параллелепипеду $\pi = K \times J \times S \times P$:

$$G = \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(f(\nu_{jp}) - f(\nu_{ks}))G_{jp}LF_{ks}}{c[(j-k)+i(p-s)]}.$$

Если K и J строго разделены, введем операторы

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(j-\alpha)G_{jp}LF_{ks}}{j-k+i(p-s)}, \\ R_2 &= \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(\alpha-k)G_{jp}LF_{ks}}{j-k+i(p-s)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, если S и P строго разделены, положим

$$\begin{aligned} R_3 &= \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(p-\beta)G_{jp}LF_{ks}}{j-k+i(p-s)}, \\ R_4 &= \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(\beta-s)G_{jp}LF_{ks}}{j-k+i(p-s)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 1. *При введенных обозначениях, если* π *— параллелепипед типа* (i), *то* $\|G\| \leqslant \|R_1\| + \|R_2\| + \|R_3\| + \|R_4\|$. *В случаях* (ii) *и* (iii) *имеем соответственно* $\|G\| \leqslant \|R_1\| + \|R_2\|$ *и* $\|G\| \leqslant \|R_3\| + \|R_4\|$. *В случае* (iv) *имеем* $G = 0$.

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед типа (i) и запишем

$$\begin{aligned} f(\nu_{jp}) - f(\nu_{ks}) &\\ &= [f(\nu_{jp}) - f(\nu_{\alpha p})] + [f(\nu_{\alpha p}) - f(\nu_{kp})] \\ &\quad + [f(\nu_{kp}) - f(\nu_{k\beta})] + [f(\nu_{k\beta}) - f(\nu_{ks})]. \end{aligned}$$

В соответствии с этим G распадется в сумму четырех слагаемых: $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Мы утверждаем, что $\|G_l\| \leqslant \|R_l\|$, $l = 1,2,3,4$. Проверим это при $l = 1$ (остальные случаи аналогичны).

Рассмотрим квадратичную форму

$$(G_1 x, y) = \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{(f(\nu_{jp}) - f(\nu_{\alpha p}))(G_{jp}LF_{ks}x, y)}{c[(j-k)+i(p-s)]}, \quad x, y \in H.$$

При фиксированных x и y положим $f_{ks} = F_{ks}x/\|F_{ks}x\|$, $g_{jp} = G_{jp}y/\|G_{jp}y\|$. Ненулевые векторы среди f_{ks} образуют ортонормированную систему; то же справедливо для векторов g_{jp}. Пусть $x_{ks} = (x, f_{ks})$ и $y_{jp} = (y, g_{jp})$. Тогда $x = \sum_{k,s} x_{ks} f_{ks} + x_1$, где $F_{ks}x_1 = 0$ при всех $k \in K$, $s \in S$, и аналогично для y. Отсюда

$$(G_1 x, y) = \sum_{j\in J}\sum_{p\in P} [f(\nu_{jp}) - f(\nu_{\alpha p})]\overline{y}_{jp} \sum_{k\in K, s\in S} \frac{(Lf_{ks}, g_{jp})x_{ks}}{c[(j-k)+i(p-s)]}.$$

Так как $|f(\nu_{jp}) - f(\nu_{\alpha p})| \leqslant |j-\alpha|c$, получим

$$|(G_1 x, y)| \leqslant \sum_j \sum_p c|j-\alpha| \left| \overline{y}_{jp} \sum_{k,s} \frac{(Lf_{ks}, g_{jp})x_{kj}}{c[(j-k)+i(p-s)]} \right|.$$

Выберем числа $\overline{y}'_{jp}$ так, чтобы выполнялись соотношения $|y'_{jp}| = |y_{jp}|$ и $\overline{y}'_{jp} \sum_{k,s} \frac{(Lf_{ks}, g_{jp})}{c[(j-k)+i(p-s)]} \geqslant 0$. Учитывая, что $j - \alpha$ сохраняет свой знак во всей сумме, получим

$$|(G_1x, y)| \leqslant \left| \sum_{\pi} \frac{(j-\alpha)(Lf_{ks}, g_{jp})x_{ks}\overline{y}'_{jp}}{j-k+i(p-s)} \right|.$$

Теперь ясно, что $|(G_1x, y)| \leqslant |(R_1x, y')|$, где $y' = y'_{jp}g_{jp}$. Значит, $\|G_1\| \leqslant \|R_1\|$, и случай (i) разобран.

Для параллелепипедов типа (ii) в представлении для G будут отсутствовать слагаемые G_3 и G_4, а для параллелепипедов типа (iii) — слагаемые G_1 и G_2, так что дело только упростится. Наконец, для параллелепипедов типа (iv) имеем $G = 0$, поскольку в определение оператора G входит нулевой множитель $f(\nu_{ld}) - f(\nu_{ld})$.

В дальнейшем мы разобьем все индексное множество $\{1, \dots, n\}^4$ в объединение сравнительно небольшого числа систем попарно дизъюнктных параллелепипедов и оценим сумму операторов типа R_1, R_2, R_3 или R_4 по каждой из таких систем в отдельности. Деталям разбиения и соответствующих оценок посвящен §2. Здесь же удобно доказать еще одну вспомогательную лемму, тем более, что рассуждения будут похожи на доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $\pi = K \times J \times S \times P$ — параллелепипед, в котором K и J разделены, а также S и P разделены, причем хотя бы в одном из этих случаев разделение строгое. Предположим, что число a таково, что $|a| \leqslant \max\{\min\{|j-k| : j \in J, k \in K\}, \min\{|s-p| : s \in S, p \in P\}\}$. Рассмотрим оператор*

$$\Phi = \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{aG_{jp}LF_{ks}}{j-k+i(p-s)}.$$

Тогда $\|\Phi\| \leqslant \|L\|$.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что K и J строго разделены, и $|a| \leqslant \min\{|j-k| : j \in J, k \in K\}$. Положим, как и в предыдущем доказательстве, $f_{ks} = F_{ks}x/\|F_{ks}x\|$ и $g_{jp} = G_{jp}y/\|G_{jp}y\|$. Для произвольных векторов $x, y \in H$, пусть $x_{ks} = (x, f_{ks})$, $y_{jp} = (y, g_{jp})$. Пусть еще

$$h_{kjsp} = \frac{(Lf_{ks}, g_{jp})}{j-k+i(s-p)}.$$

Тогда

$$(\Phi x, y) = a\sum_{\pi} \frac{(Lf_{ks}, g_{jp})x_{ks}\overline{y}_{jp}}{j-k+i(s-p)} = a\sum_{\pi} x_{ks}\overline{y}_{jp}h_{kjsp}.$$

Положим $\Phi_1(x,y) = \sum_\pi x_{ks}\overline{y}_{jp}h_{kjsp}$. Будем искать верхнюю грань величины $|\Phi_1(x',y')|$ по всем x', y' таким, что $x' = \sum_{k,s} x'_{ks}f_{ks}$ и $y' = \sum_{j,p} y'_{jp}g_{jp}$, причем $\|x'\|_{K,S} \leqslant \|x\|_{K,S}$ и $\|y'\|_{J,P} \leqslant \|y\|_{J,P}$ (считаем по определению, что $\|x\|_{K,S} = \sqrt{\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}|x_{ks}|^2}$, $\|y\|_{J,P} = \sqrt{\sum_{j\in J}\sum_{p\in P}|y_{jp}|^2}$ для любых $x, y \in H$). Из компактности следует, что эта верхняя грань достигается на некоторых векторах x_0, y_0. Пусть $x_0 = \sum_{k,s} x'_{k,s}f_{ks}$ и $y_0 = \sum_{j,p} y'_{jp}g_{jp}$. Тогда

$$|\Phi_1(x,y)| \leqslant |\Phi_1(x_0,y_0)| = \left|\sum_\pi x'_{ks}\overline{y}'_{jp}h_{kjsp}\right|. \tag{8}$$

Заметим, что комплексные числа $m_{ks} = x'_{ks}\sum_{j,p}\overline{y}'_{jp}h_{kjsp}$ имеют одинаковые аргументы при любых k, s (иначе, меняя аргументы у чисел x'_{ks}, можно было бы увеличить правую часть в (8)). По той же причине и числа $r_{jp} = \overline{y}'_{jp}\sum_{k,s} x'_{ks}h_{kjsp}$ имеют одинаковые аргументы, совпадающие естественно с аргументами чисел m_{ks}. Поэтому можно считать, что $m_{ks} \geqslant 0$ и $r_{jp} \geqslant 0$.

По условию множества K и J строго разделены. Положим $j_0 = \min\limits_{j\in J}\{j\}$ и $k_0 = \max\limits_{k\in K}\{k\}$, если $K \prec J$ и $j_0 = \max\limits_{j}\{j\}$, а $k_0 = \min\limits_{k\in K}\{k\}$, если $J \prec K$. Тогда по условию $|a| \leqslant |j_0 - k_0|$ и в любом случае $j - j_0$, $k_0 - k$ имеют тот же знак, что и $j_0 - k_0$. Учитывая, что $m_{ks} \geqslant 0$ и $r_{jp} \geqslant 0$, получим, используя (8):

$$\begin{aligned} |(\Phi x,y)| &= |a\Phi_1(x,y)| \leqslant |(j_0-k_0)\Phi_1(x,y)| \leqslant |(j_0-k_0)\Phi_1(x'_0,y'_0)| \\ &\leqslant \left|(j_0-k_0)\Phi_1(x'_0,y'_0) + \sum_{j\in J, p\in P}(j-j_0)r_{jp} + \sum_{k\in K, s\in S}(k_0-k)m_{ks}\right| \\ &= \left|\sum_{(k,j,s,p)\in\pi}(j-k)x'_{ks}\overline{y}'_{jp}h_{kjsp}\right|. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично из раздельности множеств S и P получаем, что $s_0 - s$, $p - p_0$ и $p_0 - s_0$ имеют одинаковый знак, где s_0 — наибольший элемент множества S, p_0 — наименьший элемент множества P (если $S \preceq P$) или, наоборот (при $P \preccurlyeq S$).

В любом случае число

$$\begin{aligned} &(p_0 - s_0)\Phi_1(x'_0,y'_0) + \sum_{k,s}(s_0-s)m_{ks} + \sum_{p,j}(p-p_0)r_{jp} \\ &= \sum_\pi (p-s)x'_{ks}\overline{y}'_{jp}h_{kjsp} \end{aligned}$$

является вещественным. Учитывая, что выражение под знаком модуля в (9) тоже вещественно, из (9) получаем

$$|(\Phi x, y)| \leqslant \left|\sum_{\pi}(j-k)x'_{ks}\overline{y}'_{jp}h_{ksjp} + i(p-s)x'_{ks}\overline{y}'_{jp}h_{kjsp}\right|.$$

Подставляя вместо h_{kjsp} его значение, находим

$$\begin{aligned}|(\Phi x, y)| &\leqslant \left|\sum_{\pi}(Lf_{ks}, g_{jp})x'_{ks}\overline{y}'_{jp}\right| = |(Lx_0, y_0)| \\ &\leqslant \|L\| \cdot \|x_0\|_{K,S}\|y_0\|_{K,S}.\end{aligned}$$

Так как $\|x_0\|_{K,S} \leqslant \|x\|$, $\|y_0\|_{K,S} \leqslant \|y\|$, то отсюда следует, что $\|F\| \leqslant \|L\|$, и лемма доказана. •

Замечания. 1°. Из доказательства леммы ясно, что если в условиях леммы 2 оператор F определен формулой

$$F = a \sum_{(k,j,s,p)\in\pi} \frac{G_{jp}LF_{ks}}{|j-k|+|p-s|},$$

а $|a| \leqslant \max\{\min|j-k| : j \in J, k \in K\}, \min\{|s-p| : s \in S, p \in P\}\}$, то $\|F\| \leqslant \|L\|$.

2°. В лемме 2 мы могли бы забыть о происхождении операторов L, G_{jp} и F_{ks}. Именно L может быть любым ограниченным оператором, а каждое из семейств $\{G_{ip}\}$ и $\{F_{ks}\}$ – любым семейством ортопроекторов (среди которых могут быть и нулевые) на попарно ортогональные подпространства. В такой (и, временами, бóльшей) общности мы будем действовать в части §2.

3°. Сформулируем обобщение леммы 2. Пусть L — ограниченный оператор, а $\{G_{j_1,\dots,j_r}\}$ и $\{F_{k_1,\dots,k_r}\}$ — два семейства ортопроекторов, причем внутри одного и того же семейства образы проекторов попарно ортогональны. Рассмотрим $2r$-мерный параллелепипед $\pi = \prod_{s=1}^{r}(J_s \times K_s)$ $(J_s, K_s \subset \{1, \dots, n\})$. Предположим, что при каждом s множества J_s, K_s разделены, причем по крайней мере при одном s — строго, и пусть

$$a \leqslant \max_s \min\{|j-k| : j \in J_s, k \in K_s\}.$$

Тогда оператор

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(j_1,k_1,\dots,j_s,k_s)\in\pi} \frac{aG_{j_1\dots j_s}LF_{k_1\dots k_s}}{|j_1-k_1|+\dots+|j_s-k_s|}$$

удовлетворяет неравенству $\|F\| \leqslant \|L\|$.

Доказывается это утверждение так же, как лемма 2; оно составляет один из промежуточных шагов к теореме 3 в §3.

§2. Комбинаторика „прямоугольных вырезок" и завершение доказательства основной леммы

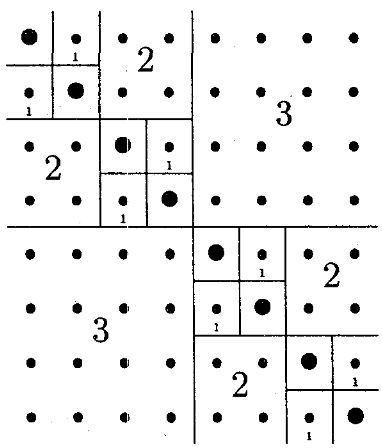
Будем иметь дело с двумя семействами $\{G_{jp}\}$ и $\{F_{ks}\}$ ортопроекторов, которые могут как произойти из доказательства основной леммы, так и быть взяты независимо от нее. Считаем, что внутри одного и того же семейства образы проекторов попарно ортогональны, а индексы пробегают множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$, причем $n = 2^m$. Нас будут интересовать суммы вида

$$\sum_{(k,j)\in N\times N}\ \sum_{(s,p)\in N\times N} G_{jp}L_{kjsp}F_{ks}, \tag{10}$$

где L_{kjsp} — некоторые ограниченные операторы.

Отметим, что способ представления суммы (10) в виде двойной выбран не случайно — при каждом суммировании один из двух индексов относится к проекторам „G", а другой — к проекторам „F".

Разобъем множество $N \times N$ на $m+1$ семейство прямоугольников. На рисунке показано, как происходит разбиение при $m = 3$. К нулевому семейству отнесены одноточечные прямоугольники, стоящие на главной диагонали, далее номер семейства указан на рисунке.



Ясно, как нужно действовать при любом m. Нам, однако, понадобится и формальная запись этого разбиения и его свойства. Именно обозначим семейство с номером r через $\mathcal{U}_r$ ($r = 0, \dots, m$), а через l_r — число прямоугольников в этом семействе. Тогда $l_0 = n$, $l_r = 2 \cdot 2^{m-r}$ при $r \geqslant 1$. Все прямоугольники u семейства $\mathcal{U}_r$ имеют вид $u = K_r^l \times J_r^l$ ($l = 1, \dots, l_r$). При этом $|K_r^l| = |J_r^l| = 2^{r-1}$.

Далее, при $r \geqslant 1$ каждый прямоугольник семейства $\mathcal{U}_r$ лежит либо выше, либо ниже главной диагонали — иными словами, множества K_r^l и J_r^l строго разделены (при этом $K_r^l \prec J_r^l$ при четном l и $J_r^l \prec K_r^l$ при нечетном l). Наконец, $N \times N = \bigcup\limits_{0 \leqslant r \leqslant m} \bigcup\{u : u \in \mathcal{U}_r\}$. Вот точные формулы для множеств K_r^l и J_r^l.

1) $K_0^l = J_0^l = \{l\}$, $l = 1, \ldots, n$.

2) При $r \geqslant 1$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &K_r^l = \{(l-1)2^{r-1} + 1, \ldots, l \cdot 2^{r-1}\}, \\ &J_r^l = \{[(l-1) + (-1)^{l+1}]2^{r-1} + 1, \ldots, [l + (-1)^{l+1}]2^{r-1}\}, \\ &l = 1, \ldots, 2 \cdot 2^{m-r}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Теперь мы можем переписать сумму (10) в виде

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant m} \sum_{0 \leqslant t \leqslant m} \sum_{u \in \mathcal{U}_r} \sum_{v \in \mathcal{U}_t} \sum_{\substack{(k,j) \in u \\ (s,p) \in v}} G_{jp} L_{kjsp} F_{ks}.$$

Внутренняя сумма берется по „четырехмерному“ параллелепипеду $K_r^l \times J_r^l \times S_q^d \times P_q^d$, где $u = K_r^l \times J_r^l$, $v = S_q^d \times P_q^d$. Важное наблюдение: *все такие параллелепипеды принадлежат одному из типов* (i)–(iv), *определенных в* §1 *перед формулировкой леммы* 1.

Вспомним теперь следующий хорошо известный простой факт. Пусть $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\alpha\}$ — два семейства подпространств в H, причем $X_\alpha \perp X_{\alpha'}$ и $Y_\alpha \perp Y_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$. Пусть P_α и Q_α — ортогональные проекторы соответственно на X_α и Y_α, а $\{T_\alpha\}$ — семейство ограниченных операторов в H.

Лемма 3. *При сделанных предположениях*

$$\Big\| \sum_\alpha P_\alpha T_\alpha Q_\alpha \Big\| \leqslant \sup_\alpha \|T_\alpha\|. \quad \bullet$$

Эта лемма применима для оценки частичной суммы в (10), получающейся при фиксированных r и t, т. е. суммы

$$\sigma_{rt} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in \mathcal{U}_r} \sum_{v \in \mathcal{U}_t} \sum_{(k,j,s,p) \in u \times v} G_{jp} L_{kjsp} F_{ks}.$$

Из рисунка видно, что проекции прямоугольников, составляющих фиксированное семейство $\mathcal{U}_\gamma$, на любую из „координатных осей“ попарно не пересекаются. Значит, при суммировании по такому семейству мы попадаем в ситуацию леммы 3. Это ведет к следующему утверждению.

Следствие 1. *При* $0 \leqslant r,\ t \leqslant m$ *имеем*

$$\|\sigma_{rt}\| \leqslant \sup_{u\in\mathcal{U}_r, v\in\mathcal{U}_t} \left\| \sum_{(k,j,s,p)\in u\times v} G_{jp}L_{kjsp}F_{ks} \right\|. \quad \bullet$$

Продолжим теперь доказательство основной леммы. Пусть в ней сперва $n = 2^m$. Применив следствие 1 к сумме (5), получим

$$\|\sigma_{rt}\| \leqslant \sup_{u\in\mathcal{U}_r, v\in\mathcal{U}_t} \left\| \sum_{(k,j,s,p)\in u\times v} \frac{(f(\nu_{jp}) - f(\nu_{ks}))G_{jp}LF_{ks}}{c((j-k)+i(p-s))} \right\|. \tag{12}$$

Как было сказано, суммирование справа в (12) происходит по параллелепипеду одного из типов (i)–(iv), так что норма под знаком верхней грани оценена в лемме 1.

Лемма 4. *Пусть* $\pi = K_r^l \times J_r^l \times S \times P$, *где* $r \geqslant 1$, K_r^l *и* J_r^l *определены в* (11), *а множества* S *и* P *разделены. Пусть* $\alpha = l2^{r-1}$ *при нечетном* l *и* $\alpha = (l-1)2^{r-1}$ *при четном* l (*т. е.* α *— наибольший элемент в меньшем из множеств* K_r^l, J_r^l). *Тогда для операторов* R_1 *и* R_2, *введенных в* (6), *имеет место оценка*

$$\|R_1\| + \|R_2\| \leqslant (2r-1)\|L\|.$$

Отложим ненадолго доказательство леммы 4 и завершим вывод основной леммы. Параллелепипед $u \times v$ в (12) принадлежит к типу (i), если $r \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$, к типу (ii), если $r \geqslant 1$ и $t = 0$, к типу (iii), если $r = 0$ и $t \geqslant 1$, и к типу (iv), если $r = t = 0$. Комбинируя леммы 1 и 4 и учитывая, что соответствующий вариант леммы 4 справедлив и для операторов R_3 и R_4, введенных формулами (7), получим

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_{rt}\| \leqslant (2r+2t-2)\|L\| && \text{при } r \geqslant 1, t \geqslant 1;\\
&\|\sigma_{r0}\| \leqslant (2r-1)\|L\| && \text{при } r \geqslant 1;\\
&\|\sigma_{0t}\| \leqslant (2t-1)\|L\| && \text{при } t \geqslant 1;\\
&\|\sigma_{00}\| = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

После суммирования по r и t получаем следующую оценку для оператора R, введенного формулой (5):

$$\|R\| \leqslant (2m^3 + 2m^2)\|AT - TB\|.$$

Если теперь n произвольно, выберем m так, чтобы $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, тогда $m+1 \leqslant \log n + 1$ и

$$\|R\| \leqslant [2(\log n+1)^3 + 2(\log n+1)^2]\|AT - TB\|.$$

Осталось заметить, что выражение в квадратных скобках не превосходит числа $2(\log n + 2)^3$.

Нам остается доказать лемму 4. Для этого нам понадобится следующее элементарное тождество.

Лемма 5. *Пусть* $2^r = u$ *и* $r \geqslant 1$. *Тогда для любых элементов* B_k, $k = 1, \ldots, n$, *произвольного линейного пространства справедливо соотношение*

$$s = \sum_{k=1}^{u}(u-k)B_k = \sum_{l=1}^{r} 2^{l-1}\left(\sum_{q=0}^{2^{r-l}-1}\ \sum_{k=q\cdot 2^l+1}^{q\cdot 2^l+2^{l-1}} B_k\right).$$

Проверка представляется читателю. Заметим лишь, что при $u = 2^3 = 8$ эта формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &7B_1 + 6B_2 + \cdots + B_7 \\ &\quad = \underbrace{B_1 + B_3 + B_5 + B_7}_{l=1} + \underbrace{2(B_1 + B_2) + 2(B_5 + B_6)}_{l=2} \\ &\quad + 4\underbrace{(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)}_{l=3}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4. а) Пусть сначала $K_r^l \prec J_r^l$, т. е. l нечетно, $\alpha \in K_r^l$, $\alpha = l \cdot 2^{r-1} = \max\limits_{k \in K_r^l}\{k\}$. Если $r = 1$, то K_r^l состоит из числа $\{l\}$, а J_r^l из числа $\{l+1\}$. Значит, $R_2 = 0$, а $R_1 = \sum\limits_{\pi} \frac{G_{ij}LF_{ks}}{1+i(p-s)}$. По лемме 2 $\|R_1\| \leqslant \|L\|$. Поэтому при $r = 1$ лемма 4 верна.

Пусть теперь $r \geqslant 2$. Начнем, например, с оценки нормы оператора R_2. Сделаем в формуле (6) для R_2 замену $k = k_1 + (l-1)2^{r-1}$. Тогда k_1 меняется от 1 до 2^{r-1} и учитывая, что $\alpha = l \cdot 2^{r-1}$, получим

$$R_2 = \sum_{k_1=1}^{2^{r-1}} (2^{r-1} - k_1)B_{k_1}, \tag{14}$$

где

$$B_{k_1} = \sum_{j,s,p} \frac{G_{jp}LF_{k_1+(l-1)2^{r-1},s}}{j - (l-1)2^{r-1} - k_1 + i(p-s)}.$$

Преобразуя формулу (14) в соответствии с леммой 5, получим

$$R_2 = \sum_{l_1=1}^{r-1} 2^{l_1-1} \sum_{q=0}^{2^{r-1-l_1}-1} \sum_{k_1=q\cdot 2^{l_1}+1}^{q\cdot 2^{l_1}+2^{l_1-1}} B_{k_1}.$$

Зафиксируем l_1 и обозначим $K_{l_1}^q = \{q\cdot 2^{l_1}+1,\ldots,q\cdot 2^{l_1}+2^{l_1-1}\}$ и $K_{l_1} = \bigcup\limits_{q=0}^{2^{r-1-l_1}-1} K_{l_1}^q$. Множество $\pi_{l_1} = K_{l_1}\times J_r^l \times S\times P$ есть параллелепипед и

$$R_2 = \sum_{l_1=1}^{r-1} \sum_{(k_1,j,s,p)\in\pi_{l_1}} \frac{2^{l_1-1} G_{jp} L F_{k_1+(l-1)2^{l-1},s}}{j-(l-1)2^{r-1}-k_1+i(p-s)} = \sum_{l_1=1}^{r-1} \Phi_{l_1},$$

где через Φ_{l_1} обозначена внутренняя сумма (по π_{l_1}). Заметим, что множества J_r^l и $K = K_{l_1}+(l-1)2^{r-1}$ строго разделены. Кроме того, $\max K_{l_1} = 2^{r-1}-2^{l_1-1}$, а $\min J_r = l\cdot 2^{r-1}+1$. Значит, вещественная часть знаменателя дроби в выражении для Φ_{l_1} оценивается снизу числом $l\cdot 2^{r-1}+1-(l-1)2^{r-1}-2^{r-1}+2^{l_1-1} = 2^{l_1-1}+1 \geqslant 2^{l_1-1}$. Из леммы 2 получаем $\|\Phi_{l_1}\| \leqslant \|L\|$. Наконец,

$$\|R_2\| \leqslant \sum_{l_1=1}^{r-1} \|\Phi_{l_1}\| \leqslant (r-1)\|L\|.$$

Оценим R_1. Сделаем в формуле (6) для R_1 замену $j_1 = (l+1)2^{r-1}-j+1$. Тогда j_1 меняется от 1 до 2^{r-1} и

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{j_1=1}^{2^{r-1}} (2^{r-1}-j_1+1) \sum_{k,s,p} \frac{G_{(l+1)2^{r-1}-j_1+1,p} L F_{ks}}{(l+1)2^{r-1}-j_1+1-k+i(p-s)} \\ &= \sum_{j_1=1}^{2^{r-1}} (2^{r-1}-j_1) \sum_{k,s,p} \frac{G_{ip} L F_{ks}}{(j-k)+i(p-s)} + \sum_{j_1=1}^{2^{r-1}} \sum_{k,s,p} \frac{G_{ip} L F_{ks}}{j-k+i(p-s)} \end{aligned}$$

(в обеих суммах $j = (l+1)2^{r-1}-j_1+1$). Первая сумма оценивается точно так же, как R_2, а ко второй непосредственно применима лемма 2, так как $j-k \geqslant 1$. Поэтому $\|R_1\| \leqslant r\|L\|$, и окончательно $\|R_1\|+\|R_2\| \leqslant 2r-1$, как и требовалось.

б) Если $J_l^r \prec K_l^r$, то l четно и $\alpha \in J_l^r$. Легко понять, что в сравнении с пунктом а) операторы R_1 и R_2 меняются ролями (так как теперь $\alpha \in J$).

Поэтому $\|R_2\| \leqslant r\|L\|$, а $\|R_1\| \leqslant (r-1)\|L\|$, и мы снова приходим к утверждению леммы. •

Замечание. Пусть $A_1, \dots, A_r$ — набор коммутирующих между собой самосопряженных операторов с конечным спектром, а $B_1, \dots, B_r$ — еще один такой набор. Пусть собственные числа всех операторов A_s лежат среди чисел $\lambda_k^{(s)}$, а собственные числа операторов B_s — среди чисел μ_k^s, причем $\lambda_k^{(s)} - \lambda_j^{(s)} = c(k-j)$ и $\mu_k^{(s)} - \mu_j^{(s)} = c(k-j)$. Пусть φ — функция r вещественных переменных, удовлетворяющая условию Липшица в r-мерном кубе, который содержит спектры всех операторов $A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_s$, а T — ограниченный линейный оператор. Тогда

$$\begin{aligned} &\|\varphi(A_1, \dots, A_r)T - T\varphi(B_1, \dots, B_r)\| \\ &\qquad \leqslant c_1 r(\log n + 2)^{r+1}[\varphi] \sum_{k=1}^{n} \|A_k T - TB_k\|, \end{aligned}$$

где c_1 — абсолютная константа.

Доказательство этой формулы можно провести по аналогии с доказательством основной леммы. При разбиении основного оператора $\varphi(A_1, \dots, A_r)T - T\varphi(B_1, \dots, B_r)$ возникнут $(m+1)^r$ семейств $(2r)$-мерных параллелепипедов. Формула, аналогичная представлению (5), усложнится — надо будет следить за тем, чтобы в частичной сумме, соответствующей одному такому параллелепипеду, в знаменателе стояли положительные числа (мнимой единицы i, разумеется, не будет). Это приведет к тому, что в роли оператора L будут выступать операторы $L' = \sum_{k=1}^{r} \pm(A_k T - TB_k)$; знаки будут зависеть от параллелепипеда и подбираются так, чтобы в сумме по нему в знаменателе стояло число $\sum_{s=1}^{r} c|j_s - k_s|$. Но все операторы L' оцениваются одинаково: $\|L'\| \leqslant \sum_{k=1}^{r} \|A_k T - TB_k\|$, поэтому дальнейшие детали легко согласуются. Вместо леммы 2 используется замечание 3° после ее доказательства. Множитель r возникнет потому, что главное слагаемое в оценке (то, которое в предыдущих рассмотрениях соответствовало первому из неравенств (13)) будет иметь вид $\sum_{q_1, \dots, q_r = 1}^{m} (2q_1 + 2q_2 + \dots + 2q_r - r) = rm^{r+1}$.

§3. Основное неравенство

Следующее простое утверждение о перестановочных операторах является для нас вспомогательным и названо „теоремой“ лишь ввиду его общности.

Теорема 1. *Пусть A и A_1 — два перестановочных нормальных оператора, а f — функция из класса Липшица. Тогда*

$$\|f(A) - f(A_1)\| \leqslant [f]\|A - A_1\|.$$

Доказательство полностью аналогично случаю самосопряженных операторов. Разложения единицы E_λ^A и $E_\lambda^{A_1}$ операторов A и A_1 также перестановочны. Потому при любых x и y из H функция $(E_\lambda^A E_\mu^{A_1} x, y)$ двух переменных (λ, μ) является функцией ограниченной вариации, причем

$$\operatorname{var}(E_\lambda^A E_\mu^{A_1} x, y) \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Так как $E_\lambda^A E_\mu^{A_1}(A - A_1) = (\lambda - \mu) E_\lambda^A E_\mu^{A_1}$, мы можем написать

$$((f(A) - f(A_1))x, y) = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} d^2(E_\lambda^A E_\mu^{A_1}(A - A_1)x, y)$$

для произвольных x, $y \in H$.

Оценивая последнее выражение как обычный интеграл Стилтьеса, получим

$$\begin{aligned}|((f(A) - f(A_1))x, y)| &\leqslant \sup\left|\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}\right| \operatorname{var}(E_\lambda^A E_\mu^{A_1}(A - A_1)x, y)| \\ &\leqslant [f]\|A - A_1\|\|x\|\|y\|. \quad \bullet\end{aligned}$$

Наконец, докажем главный результат этой работы.

Теорема 2. *Пусть A и B — ограниченные нормальные операторы, f — функция из класса Липшица, заданная в квадрате, содержащем спектры обоих операторов A и B, d — длина стороны этого квадрата. Тогда*

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 6[f](\log M + 2)^3 \|AT - TB\|,$$

где

$$M = \frac{d\|T\|}{\|AT - TB\|} + 1.$$

Доказательство. Построим в упомянутом квадрате решетку размера $n \times n$ с шагом $\delta > 0$ (число δ мы выберем позже). Очевидно, что $n \leqslant d/\delta + 1$. Пусть

$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ — координаты точек нашей решетки по оси x, а $\mu_1 < \cdots < \mu_n$ — координаты по оси y; тогда $\lambda_j - \lambda_i = \delta(j-i)$ и $\mu_j - \mu_i = \delta(j-i)$.

Построим кусочно-постоянную функцию $\varphi(z)$ такую, что если z удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} -\delta/2 \leqslant \Re z - \lambda_k < \delta/2, \\ -\delta/2 \leqslant \Im z - \mu_s < \delta/2, \end{cases}$$

то $\varphi(z) = \lambda_k + i\mu_s$. Тогда функция φ определена на всем квадрате и $|\varphi(z) - z| \leqslant \delta\sqrt{2}/2$. Это означает, что $\|\varphi(A) - A\| \leqslant \delta\sqrt{2}/2$ и $\|\varphi(B) - B\| \leqslant \delta\sqrt{2}/2$. Положим $A_1 = \varphi(A)$ и $b_1 = \varphi(B)$. Так как A_1 коммутирует с A, то по теореме 1 имеем

$$\|f(A_1) - f(A)\| \leqslant [f]\|A_1 - A\| \leqslant [f]\frac{\delta\sqrt{2}}{2}.$$

Аналогично оценивается величина $\|f(B_1) - f(B)\|$. Так как A_1 и B_1 — нормальные операторы, удовлетворяющие условиям основной леммы, то

$$\begin{aligned} &\|f(A)T - Tf(B)\| \\ &\quad\leqslant \|(f(A_1) - f(A))T + f(A_1)T - Tf(B_1) + T(f(B_1) - f(B))\| \\ &\quad\leqslant [f]\delta\sqrt{2}\|T\| + [f]2(\log n + 2)^3 \cdot \|A_1T - TB_1\|. \end{aligned}$$

Выбирая $\delta = \frac{\|AT - TB\|}{\|T\|}$, найдем

$$\begin{aligned} \|A_1T - TB_1\| &\leqslant \|(A_1 - A)T + T(B - B_1) + AT - TB\| \\ &\leqslant \delta\sqrt{2}\|T\| + \|AT - TB\| \leqslant (\sqrt{2} + 1)\|AT - TB\|, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \|f(A)T - Tf(B)\| &\leqslant [f]\{\sqrt{2} + 2(\log(n+2)^3(\sqrt{2} + 1)\}\|AT - TB\| \\ &\leqslant 6[f]\|AT - TB\|(\log n + 2)^3. \end{aligned}$$

Так как $n \leqslant d\|T\|/\|AT - TB\| + 1$, то отсюда следует утверждение теоремы. •

Заметим также, что $d \leqslant 2\|A\| + 2\|B\|$.

Учитывая замечание в конце §2, можно формулировать и следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $A_1, \ldots, A_r$ — набор коммутирующих между собой ограниченных самосопряженных операторов в H, $B_1, \ldots, B_r$ — еще один такой набор. Пусть φ — функция из класса Липшица, заданная в R^r. Пусть d_1 (соответственно d_2) — длина интервала, содержащего спектры операторов $A_1, \ldots, A_r$ (соответственно $B_1, \ldots, B_r$) и $d = \max\{d_1, d_2\}$. Если T — ограниченный оператор в H, то*

$$\begin{aligned}&\|\varphi(A_1, \ldots, A_r)T - T\varphi(B_1, \ldots, B_r)\| \\ &\quad \leqslant c_2 r(\log M + 2)^{r+1} \sum_{k=1}^{r} \|A_k T - TB_k\|,\end{aligned}$$

где

$$M = \frac{d\|T\|}{\sum_{k=1}^{r} \|A_k T - TB_k\|} + 1. \quad \bullet$$

Заметим еще, что $d \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{r} (\|A_k\| + \|B_k\|)$.

Список литературы

[1] Фарфоровская Ю. Б., *Оценка нормы $\|f(A_1, A_2) - f(B_1, B_2)\|$ для пар самосопряженных коммутирующих операторов*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **135** (1984), 175–177.

[2] Moore R., *An asymptotic Fuglede theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 138–142.

[3] Johnson B. E., Williams J. P., *The range of a normal derivation*, Pacific J. Math. **58** (1975), no. 1, 105–122.

[4] Kato T., *Continuity of the map $S \to |S|$ for linear operators*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 157–160.

[5] Фарфоровская Ю. Б., *Двойные операторные интегралы и их оценки в равномерной норме*, Зап. науч. семин. ПОМИ **232** (1996), 148–173.

[6] Bastian J. J., Harrison K. J., *Subnormal weighted shifts and asymptotic properties of normal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 475–479.

[7] Halmos P. K., *What does the spectral theorem say?*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 241–247.

Государственный университет телекоммуникаций им. Бонч-Бруевича
191186 Санкт-Петербург, наб. Мойки, 61
E-mail: rabk@sut.ru

Поступило 25 августа 1998 г.