

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ $f$ -СТРУКТУРЫ

Н. Д. Поляков

### ВВЕДЕНИЕ

Понятие  $f$ -структуры ранга  $r$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$  введено Яно в 1961 году [65]. В силу определения, данного Яно [24], [65], [66],  $f$ -структура ранга  $r$  на  $M_n$  определяется заданием тензорного поля  $f$  типа (1.1) такого, что

$$f^3 + f = 0$$

и ранг аффинора  $f$  всюду на  $M_n$  равен  $r$ . Вскоре после работ Яно начались многочисленные исследования многообразий, снабженных  $f$ -структурой, а также подмногообразий в них. И в настоящее время интерес к исследованию  $f$ -многообразий не ослабевает. Обзоры работ, посвященных изучению многообразий  $f$ -структуры, были опубликованы в сборнике ИНТ [2], [15], [22], [23].

При изучении  $(f\xi\eta\rho)$ -структур на дифференцируемом многообразии  $M_n$  [12], [21] было установлено, что  $f$ -структура является подклассом  $(f\xi\eta\rho)$ -структуры. В классификационных таблицах, приведенных в работе [21],  $f$ -структуры занимают особое место (они заполняют последнюю клетку каждой строки таблиц).

В настоящей работе основные результаты, полученные при исследовании дифференцируемых многообразий, снабженных  $f$ -структурой ранга  $r$ , изложены на основе теории полей геометрических объектов на многообразиях, основанной Г. Ф. Лаптевым [3], [4] и продолженной его учениками [2], [12], [14], [16].

В § 1 даны основные понятия, необходимые для исследования многообразий  $f$ -структуры, указана связь  $f$ -структуры с  $\pi$ -структурой, а также с  $(f\xi\eta\rho)$ -структурой на  $M_n$ . Указаны основные свойства линейного оператора  $f_x$ , определенного структурным аффинором  $f$  в векторных пространствах  $T_x(M_n)$  многообразия  $M_n$ . Особо выделены нормальные  $f$ -структуры на  $M_n$ .

В § 2 приведены основные геометрические факты, полученные при исследовании реперированных  $f$ -многообразий.

В § 3 приведено доказательство теоремы о том, что на многообразии  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры при дополнительном оснащении объектом  $\{A\}$ , присоединенным к  $D_n^2$ , определяется внутренним образом симметрическая аффинная связность. Указаны явные формулы, определяющие компоненты объекта этой связности.

На протяжении всего изложения индексы приобретают следующие значения:  $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$ ;  $a, b, \dots = 1, 2, \dots, r$ ;  $\alpha, \beta, \dots = r+1, r+2, \dots, n$ ;  $\sigma, \tau, \dots = n+1, n+2, \dots, 2n-r$ ;  $I, K, \dots = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n-r$ .

Автор благодарит профессора Н. М. Остиану за научные консультации при написании обзора.

### § 1. МНОГООБРАЗИЯ $f$ -СТРУКТУРЫ

**1. Основные понятия.** Пусть  $M_n$  —  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие класса  $C^\infty$ . Локальные координаты текущей точки  $x$  некоторой окрестности  $U \subset M_n$  обозначим  $x^i$ . Над окрестностью  $U$  определяются формы

$$\omega^i = a_j^i dx^j \quad (\det \|a_j^i\| \neq 0),$$

являющиеся структурными формами многообразия  $M_n$ . Известно [5], что при помощи форм  $\omega^i$  над окрестностью  $U$  можно построить последовательность линейных дифференциальных форм  $\omega_j^i, \omega_{jk}^i, \dots$ , обладающих расслоенной структурой [4] по отношению к базовым формам:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В фиксированной точке  $x \in M_n$  формы

$$\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^l=0}, \quad \bar{\omega}_{jk}^i = \omega_{jk}^i|_{\omega^l=0}, \dots$$

являются инвариантными формами дифференциальной группы порядка  $s$  ( $s=1, 2, \dots$ ) [2], [5].

В слоях касательного расслоения порядка  $s$   $T^s(M_n)$  группа  $D_n^s$  представлена как группа преобразований репера  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_i \\ x \end{matrix}, \begin{matrix} \vec{e}_{i_1 i_2} \\ x \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \vec{e}_{i_1, i_2, \dots, i_s} \\ x \end{matrix} \right\}$  [2].

В частности,  $D_n^1$  с инвариантными формами  $\bar{\omega}_j^i$  представлена в слоях касательного расслоения первого порядка  $T(M_n)$  как группа преобразований репера  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_i \\ x \end{matrix} \right\}$ ,  $D_n^2$  с инвариантными формами  $\bar{\omega}_j^i, \bar{\omega}_{jk}^i$  — как группа преобразований локального вектор-

ного репера  $\left\{ \vec{e}_i, \vec{e}_{ij} \right\}_x$ :

$$\begin{aligned} \vec{\delta} e_i &= \bar{\omega}_i^j \vec{e}_j, \\ \vec{\delta} e_{ij} &= \bar{\omega}_{ij}^k \vec{e}_k + \bar{\omega}_i^k \vec{e}_{jk} + \bar{\omega}_j^k \vec{e}_{ik}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Над дифференцируемым многообразием  $M_n$  возникает [5] бесконечная последовательность главных расслоенных многообразий  $M_n^1, M_n^2, \dots$ , у которых общей базой является исходное многообразие  $M_n$ , а структурными группами — дифференциальные группы  $D_n^1, D_n^2, \dots$ , соответствующих порядков. Известно [5], что с многообразием  $M_n^p$  ассоциируются различные присоединенные расслоенные пространства, базой которых является  $M_n$ , а слоями — пространства представления группы  $D_n^p$ .

Г. Ф. Лаптев и Н. М. Остиану (см. [2], [9], [12]) ввели на дифференцируемом многообразии  $M_n$  понятие дифференциально-геометрической структуры. Дифференциально-геометрической структурой на  $M_n$  называется заданное на  $M_n$  поле некоторого геометрического объекта, присоединенного к некоторой группе Ли, в частности, к дифференциальной группе  $D_n^s$  порядка  $s$ .

Одним из примеров дифференциально-геометрических структур первого порядка на  $M_n$  является  $(f\xi\eta\rho)$ -структура, введенная Н. М. Остиану.  $(f\xi\eta\rho)$ -структурой на дифференцируемом многообразии  $M_n$  [12] называется расширенная дифференциально-геометрическая структура со структурными объектами  $f, \xi_u, \eta^v, \rho_u^v, (u, v, \dots, n+1, \dots, n+p)$  компоненты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_j^i f_l^j &= -\delta_l^i + \xi_u^i \eta_l^u, \\ f_j^i \xi_u^j &= -\rho_u^v \xi_v^i, \quad f_j^i \eta_l^u = -\rho_v^u \eta_j^v, \\ \rho_u^w \rho_w^v &= -\delta_u^v + \xi_u^i \eta_i^v. \end{aligned}$$

## 2. Понятие $f$ -структуры на $M_n$ .

1. Определение 1.  $f$ -структурой ранга  $r$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$  называется дифференциально-геометрическая структура первого порядка, заданная полем тензора  $f$  типа (1.1), компоненты которого удовлетворяют следующим конечным соотношениям:

$$f^3 + f = 0 \quad (1.3)$$

и ранг аффинора  $\|f\|$  постоянен на  $M_n$  и равен  $r$  ( $0 < r \leq n$ ).

Известно [56], что если  $f$  — тензорное поле типа (1.1), компоненты которого удовлетворяют соотношениям (1.3), то ранг аффинора  $\|f\|$  является непрерывной и целочисленной функцией на  $M_n$ .

Многообразие  $M_n$ , снабженное  $f$ -структурой ранга  $r$ , называется  $f$ -многообразием или многообразием  $f$ -структуры  $r$ .

Если  $\text{rang } \|f\| = r = n$ , то матрица  $\|f_j^i\|$  невырожденная. В этом случае из (1.3) следует, что  $f^2 = -I$ , а следовательно,  $M_n$  снабжено почти комплексной структурой (см. [2], [68]). Очевидно, что при этом  $n$  — четное число.

В настоящей работе мы исключаем из рассмотрения случаи, когда  $r = n$ , т. е. не будем рассматривать многообразие почти комплексной структуры.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что  $0 < r < n$ .

Дифференциальные уравнения поля структурного объекта  $\|f_j^i\|$  имеют следующий вид:

$$df_j^i - f_l^i \omega_j^l + f_j^l \omega_l^i = f_{jk}^l \omega^k. \quad (1.4)$$

Величины  $f_{jk}^l$  в общем случае не симметричны по нижним индексам.

Вопрос о существовании дифференцируемых многообразий, оснащенных  $f$ -структурой ранга  $r$ , решен. Показано, что  $f$ -структура ранга  $r$  возникает на нормально оснащенных подмногообразиях, вложенных в многообразия с определенными дифференциально-геометрическими структурами первого порядка.

Н. М. Остиану и автором настоящей статьи в работе [15] показано, что на подмногообразии в многообразии  $(f\xi\eta\rho)$ -структуры при специальном выборе нормального оснащения индуцируется  $f$ -структура определенного ранга.  $f$ -структура индуцируется также на нормально оснащенных подмногообразиях многообразия почти контактной структуры (см., например, [15], [22], [23]), а также на подмногообразиях многообразия почти комплексной структуры (см., например, [13], [69], [53], [44]).

2. Продолжив систему дифференциальных уравнений поля структурного объекта  $\{f_j^i\}$  (см. (1.4)), получим дифференциальные уравнения для величин  $\{f_{jk}^l\}$ :

$$\nabla f_{jk}^l - f_l^i \omega_{jk}^l + f_j^l \omega_{lk}^i = f_{jkl}^i \omega^l, \quad (1.5)$$

где  $f_{jhl}^i$  симметричны по индексам  $k$  и  $l$ , т. е.  $f_{jkl}^i = f_{ilk}^j$ .

Система величин  $\{f_j^i, f_{jk}^l\}$  образует геометрический объект, присоединенный к  $D_{n^2}$ -структурный объект первого порядка  $f$ -структуры на  $M_n$ . Его компоненты удовлетворяют соотношениям (1.3) и

$$f_{jk}^i f_l^j f_m^l + f_j^i f_{lk}^j f_m^l + f_j^i f_l^j f_{mk}^i = 0. \quad (1.6)$$

При последовательных продолжениях (1.5) получим дифференциальные уравнения продолженных структурных объектов порядка  $p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ).

$$\{f_j^i, f_{jk}^l, f_{jk_1 k_2}^l, \dots, f_{jk_1 k_2 \dots k_p}^l\}, \quad (1.7)$$

компоненты  $f_{jk_1 k_2 \dots k_s}^l$  ( $2 \leq s \leq p$ ) симметричны по индексам  $k_1, k_2, \dots, k_s$ .

Продолженный структурный объект (1.7) присоединен к дифференциальной группе  $D_n^{p+1}$ . Соотношения, которым удовлетворяют продолженные структурные объекты, получаются последовательным дифференцированием (1.6) с учетом соответствующих дифференциальных уравнений.

Бесконечная последовательность продолженных структурных объектов исследуемой  $f$ -структуры ранга  $r$ , заданной на дифференцируемом многообразии  $M_n$ , определяет всю геометрию этой структуры.

### 3. $\pi$ -структура, индуцированная на $f$ -многообразии.

1. Так как в каждой точке  $x$  многообразия  $M_n$  ранг аффинора  $\|f_j^i\|$  равен  $r$  ( $0 < r < n$ ), то с точностью до нумерации можно считать, что

$$\det \|f_b^a\| \neq 0. \quad (1.8)$$

Следовательно, существует обратная матрица  $\|f_b^{*a}\|$  матрицы  $\|f_b^a\|$ :

$$f_b^a f_c^{*b} = \delta_c^a, \quad f_b^{*a} f_c^b = \delta_c^a. \quad (1.9)$$

При этом для элементов матриц  $\|f_j^i\|$  и  $\|f_b^{*a}\|$  выполняются следующие равенства:

$$f_\beta^\alpha = f_a^\alpha f_b^a f_\beta^b. \quad (1.10)$$

Продифференцировав (1.9) с учетом (1.4) и воспользовавшись (1.10), получим:

$$\nabla f_b^{*a} - f_b^{*d} f_c^{*a} f_\alpha^c \omega_d^\alpha - f_b^{*d} f_c^a f_\alpha^c \omega_d^\alpha = f_{b1}^{*a} \omega^1. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что величины  $\{f_b^{*a}\}$  образуют вместе с  $\{f_j^i\}$  самостоятельный геометрический объект.

Введем теперь систему величин:

$$W_a^\alpha = -f_a^b f_b^\alpha, \quad (1.12)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений

$$dW_a^\alpha - W_b^\alpha \omega_a^b + W_a^\beta \omega_\beta^a + \omega_a^\alpha - W_b^\alpha W_a^\beta \omega_\beta^b = W_{a1}^\alpha \omega^1. \quad (1.13)$$

Следовательно, величины  $W_a^\alpha$  определяют геометрический объект, присоединенный к  $D_n^1$ .

Рассмотрим теперь следующие системы величин:

$$W_a^i = \begin{cases} \delta_a^b, & \text{при } i = b, \\ W_a^\alpha, & \text{при } i = \alpha, \end{cases} \quad (1.14)$$

которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dW_a^i - W_b^i \theta_a^b + W_a^j \omega_j^i = W_{a1}^i \omega^1, \quad (1.15)$$

где

$$\theta_a^b = \omega_a^b + W_{\alpha}^{\alpha} \omega_{\alpha}^b. \quad (1.16)$$

Формы (1.16) удовлетворяют уравнениям:

$$d\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b + \omega^t \wedge \theta_{at}^b, \quad (1.17)$$

где

$$\theta_{at}^b = \omega_{at}^b + W_{at}^{\alpha} \omega_{\alpha}^b + W_{\alpha}^{\alpha} \omega_{\alpha t}^b. \quad (1.18)$$

Из (1.17) следует, что формы  $\theta_a^b$  имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам  $\omega^t$  и при фиксированных параметрах  $x^t$  на  $M_n$  формы

$$\bar{\theta}_a^b = \theta_a^b |_{\omega^t=0}$$

подчинены структурным уравнениям:

$$d\bar{\theta}_a^b = \bar{\theta}_a^c \wedge \bar{\theta}_c^b. \quad (1.19)$$

Следовательно, формы  $\bar{\theta}_a^b$  являются инвариантными формами некоторой линейной группы. Обозначим эту группу через  $D'_{n,r}$ .

Из дифференциальных уравнений (1.15) следует, что величины  $W_a^i$  определяют геометрический объект, присоединенный к группе  $D'_{n,r} \times D'_{n,r}$  с инвариантными формами  $\bar{\omega}_j^i$ ,  $\bar{\theta}_b^a$ . Поле этого геометрического объекта определяет на  $M_n$  распределение  $r$ -мерных линейных элементов [7], [14]. Обозначим это распределение через  $W$ , а его элемент в точке  $x \in M_n$  через  $W_x$ . В силу принятой терминологии [7], [8], геометрический объект  $W_a^i$  будем называть структурным объектом или фундаментальным объектом нулевого порядка распределения  $W$ .

В каждом слое  $T_x(M_n)$  касательного расслоения многообразия  $M_n$  распределение  $W$  определяет  $r$ -мерную плоскость, проходящую через центр слоя и натянутую на  $r$ -линейно независимых векторов:

$$\vec{E}_a = W_a^i \vec{l}_i. \quad (1.20)$$

Плоскость  $W_x$  определяется системой уравнений

$$x^i = W_a^i t^a, \quad (1.21)$$

где  $x^i$  — текущие координаты точки  $x \in M_n$ ,  $a, t^a$  — параметры.

Величины  $W_{aj}^i$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (см. [14]):

$$\begin{aligned} dW_{aj}^i - W_{bj}^i \theta_a^b - W_{ai}^l \omega_j^l + W_{aj}^l \omega_l^i - \\ - W_b^i \theta_{aj}^b + W_a^l \omega_{lj}^i = W_{aj}^l \omega^k. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.15), (1.22) следует, что  $\{W_a^j, W_{aj}^i\}$  есть геометрический объект — фундаментальный объект первого порядка распре-

ления  $W$ . При последовательных продолжениях (1.22) получим последовательность вложенных друг в друга фундаментальных объектов распределения  $W$ :

$$\{W_a^i\} \subset \{W_a^i, W_{a_j}^i\} \subset \dots$$

Построим следующую систему величин:

$$r_{ab}^i = \frac{1}{2} (W_{a_j}^i W_b^j - W_{b_j}^i W_a^j), \quad (1.23)$$

$$dr_{ab}^i - r_{cb}^i \theta_a^c - r_{ac}^i \theta_b^c + r_{ab}^i \omega_j^i = r_{abk}^i \omega^k. \quad (1.24)$$

Система величин  $r_{ab}^i$  образует геометрический объект, присоединенный к группе  $D_{n'} \times D'_{n,r}$ . Этот объект будем называть объектом неголономности распределения  $W$ .

Известно, что тождественное обращение в нуль всех компонент объекта неголономности выделяет класс распределений, называемых голономными или интегрируемыми. В случае голономности распределения  $W$ , многообразие  $M_n$  расслаивается на  $(n-r)$ -параметрическое семейство  $r$ -мерных поверхностей, огибающих  $(n-r)$ -параметрическое семейство элементов распределения  $W$ . Каждый элемент  $W_x$  распределения  $W$  касается соответствующей  $r$ -мерной поверхности в своем центре.

2. Определим теперь дифференциально-геометрическую структуру на распределении  $W$ . В силу определения, данного Н. М. Остиану [12], дифференциально-геометрической структурой на распределении линейных элементов на дифференцируемом многообразии  $M_n$  будем называть заданное на  $M_n$  поле геометрического объекта, присоединенного к группе, которая представлена в элементах распределения как группа преобразований векторного репера.

На распределении  $W$  определяется внутренним образом дифференциально-геометрическая структура, если на  $M_n$  определено поле геометрического объекта, присоединенного к группе  $D'_{n,r}$ , компоненты которого охвачены структурными объектами, продолженными структурными объектами  $f$ -структуры.

Рассмотрим систему функций

$$\psi_b^a = f_i^a W_b^i. \quad (1.25)$$

Дифференцируя (1.25), получим

$$d\psi_b^a - \psi_c^a \theta_b^c + \psi_b^c \theta_a^c = \psi_{b_i}^a \omega^i, \quad (1.26)$$

а следовательно,  $\{\psi_b^a\}$  — геометрический объект, присоединенный к  $D'_{n,r}$ .

Компоненты геометрического объекта  $\{\psi_b^a\}$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\psi_b^a \psi_c^b = -\delta_c^a. \quad (1.27)$$

Следовательно, поле геометрического объекта  $\psi_b^a$  является внутренне присоединенным полем структурного объекта почти комплексной структуры (см., например, [2]) на распределении  $W$  в  $f$ -многообразии  $M_n$ .

Из этого следует, что размерность элементов распределения  $W$ , а значит, и ранг матрицы  $\|f_j^i\|$  всегда четная, т. е. в каждой точке  $x \in M_n$   $\dim W_x = r = 2m$ .

В случае голономности распределения  $W$ , получаем  $(n-r)$ -параметрическое семейство  $r$ -мерных поверхностей. Каждая поверхность этого семейства несет почти комплексную структуру [66].

Таким образом, на дифференцируемом многообразии  $M_n$   $f$ -структуры ранга  $r$  индуцируется распределение  $r$ -мерных линейных элементов, которое снабжено почти комплексной структурой со структурным объектом  $\{\psi_b^a\}$  (см. (1.27)).

3. Распределение  $\varepsilon$ . Рассмотрим систему величин:

$$m_j^i = f_k^i f_j^k + \delta_j^i. \quad (1.28)$$

Величины  $m_j^i$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$dm_j^i - m_i^k \omega_j^k + m_j^k \omega_k^i = m_{jk}^i \omega^k. \quad (1.29)$$

Тензор (1.28) в  $f$ -многообразии впервые был введен Яно [66]. Он показал, что компоненты объектов  $f$  и  $m$  подчинены следующим соотношениям:

$$f_j^i m_k^j = 0, \quad m_j^i f_k^j = 0. \quad (1.30)$$

Соотношения (1.30) получены из равенств (1.3) с учетом (1.28). Так как ранг матрицы  $\|f_j^i\|$  равен  $r$ , то из (1.30) следует, что ранг матрицы  $\|m_j^i\|$  равен  $n-r$ . В силу выполнения условий  $0 < r < n$ , матрица  $\|m_j^i\|$  — ненулевая.

Из равенств (1.12) и (1.30) следует

$$m_b^i = W_b^\alpha m_\alpha^i. \quad (1.31)$$

Элементы каждого столбца матрицы  $\|m_j^i\|$  примем за координаты векторов в  $T_x(M_n)$ :  $\vec{m}_i = m_i^j \vec{e}_j$ . При этом равенства (1.31) можно записать в векторной форме:

$$\vec{m}_b = -W_b^\alpha \vec{m}_\alpha. \quad (1.32)$$

В связи с тем, что ранг матрицы  $\|m_j^i\|$  равен  $(n-r)$ , существует  $(n-r)$  линейно независимых векторов-столбцов. Из (1.32) следует, что векторы  $\vec{m}_\alpha = m_\alpha^i \vec{e}_i$  линейно независимы в  $T_x(M_n)$ .

Введем обозначения:

$$\varepsilon_\alpha^i = m_\alpha^i. \quad (1.33)$$

При этом

$$\nabla_\alpha^i m_\alpha^j = m_\alpha^i \omega_\alpha^j = \varepsilon_{\alpha j}^i \omega^j. \quad (1.34)$$

Рассмотрим формы:

$$\theta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - W_{\alpha}^\beta \omega_\alpha^a. \quad (1.35)$$

Эти формы [14] имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам  $\omega^i$ :

$$d\theta_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma^\beta + \omega^i \wedge \theta_{\alpha i}^\beta, \quad (1.36)$$

где

$$\theta_{\alpha i}^\beta = \omega_{\alpha i}^\beta - W_{\alpha i}^\beta \omega_\alpha^a - W_{\alpha}^\beta \omega_{\alpha i}^a. \quad (1.37)$$

Следовательно, формы  $\bar{\theta}_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\beta|_{\omega^i=0}$  являются инвариантными формами некоторой линейной группы  $GL(n-r, R)$ .

Величины (1.34) подчинены следующим дифференциальным уравнениям:

$$de_\alpha^i - e_\beta^i \theta_\alpha^\beta + e_\alpha^j \omega_j^i = e_\alpha^j \omega_j^i, \quad (1.38)$$

а следовательно,  $e_\alpha^i$  является геометрическим объектом относительно группы  $D_n' \times GL(n-r, R)$ . Поле этого геометрического объекта определяет на  $M_n$  распределение  $(n-r)$ -мерных линейных элементов, каждый элемент которого натянут на  $(n-r)$  линейно независимых векторов  $\vec{e}_\alpha = \vec{m}_\alpha$ . Обозначим это распределение через  $\varepsilon$  и его элемент в точке  $x \in M_n$  через  $\varepsilon_x$ . Эта плоскость определяется системой уравнений

$$x^i = e_\alpha^i s^\alpha, \quad (1.39)$$

где  $x^i$  — текущие координаты точки  $x \in M_n$ , а  $s^\alpha$  — параметры.

При этом группа  $GL(n-r, R)$  представлена как группа преобразований векторов  $\vec{e}_\alpha$ :

$$\vec{\delta} \vec{e}_\alpha = \vec{\theta}_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \quad (1.40)$$

Объект  $\{e_\alpha^i\}$  называется структурным объектом или фундаментальным объектом первого порядка распределения  $\varepsilon$ .

При продолжении (1.38) получим

$$de_{\alpha j}^i - e_{\beta j}^i \theta_\alpha^\beta - e_{\alpha i}^j \omega_j^i + e_{\alpha j}^i \omega_i^j - e_\beta^i \theta_{\alpha j}^\beta + e_\alpha^i \omega_{j k}^i = e_{\alpha j k}^i \omega^k. \quad (1.41)$$

Объект  $\{e_\alpha^i, e_{\alpha j}^i\}$  называется фундаментальным объектом первого порядка распределения  $\varepsilon$ .

Система величин

$$r_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (e_{\alpha j}^i e_\beta^j - e_{\beta j}^i e_\alpha^j), \quad (1.42)$$

где

$$dr_{\alpha\beta}^i - r_{\gamma\beta}^i \theta_\alpha^\gamma - r_{\alpha\gamma}^i \theta_\beta^\gamma + r_{\alpha\beta}^j \omega_j^i = r_{\alpha\beta k}^i \omega^k, \quad (1.43)$$

образует геометрический объект, присоединенный к группе  $D_n' \times GL(n-r, R)$  и являющийся объектом неголономности рас-

пределения  $\varepsilon$ . При тождественном обращении в нуль всех компонент объекта неголономности, распределение  $\varepsilon$  расслаивается на  $r$ -параметрическое семейство  $(n-r)$ -мерных поверхностей, огибающих  $r$ -параметрическое семейство элементов распределения  $\varepsilon$ .

4. Векторы  $\{\vec{E}_a, \vec{\varepsilon}_\alpha\}$  линейно независимы, а следовательно, образуют векторный репер в касательной плоскости  $T_x(M_n)$  [14]. В связи с этим распределения  $W$  и  $\varepsilon$  определяют на многообразии  $M_n$   $\pi$ -структуру.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.  $f$ -структура ранга  $r$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$  индуцирует  $\pi$ -структуру, определенную распределениями  $W$  и  $\varepsilon$ .

Пара распределений  $W$  и  $\varepsilon$  определяет на многообразии  $M_n$   $f$ -структуры неголономную композицию [1].

В случае голономности распределений  $W$  и  $\varepsilon$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$   $\pi$ -структуры ранга  $r$  получим композицию А. П. Нордена (см. [11]), определенную этими распределениями.

Так как векторы  $\{\vec{E}_a, \vec{\varepsilon}_\alpha\}$  линейно независимы, то

$$H = \det \begin{vmatrix} W_a^i \\ \varepsilon_\alpha^i \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.44)$$

и можно ввести обращенные объекты  $\overset{*}{W}_i^a, \overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha$ :

$$\overset{*}{W}_i^a = \frac{\partial \ln H}{\partial W_a^i}, \quad (1.45)$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha = \frac{\partial \ln H}{\partial \varepsilon_\alpha^i} \quad (1.46)$$

такие, что

$$d\overset{*}{W}_i^a - \overset{*}{W}_j^a \omega_i^j + \overset{*}{W}_i^b \theta_b^a = \overset{*}{W}_{ij}^a \omega^j, \quad (1.47)$$

$$d\overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha - \overset{*}{\varepsilon}_j^\alpha \omega_i^j + \overset{*}{\varepsilon}_i^\beta \theta_\beta^\alpha = \overset{*}{\varepsilon}_i^{\alpha j} \omega^j. \quad (1.48)$$

Уравнения (1.47) определяют поле геометрического объекта, присоединенного к  $D_n' \times D_{n,r}$ , а (1.48) — поле геометрического объекта, присоединенного к  $D_n' \times GL(n-r, R)$ . Очевидно, что поля геометрических объектов  $\{\overset{*}{W}_i^a\}, \{\overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha\}$  определяют, соответственно, те же распределения  $\varepsilon$  и  $W$ .

Компоненты величин  $W_a^i, \varepsilon_\alpha^i, \overset{*}{W}_i^a, \overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha$  связаны следующими конечными соотношениями:

$$\begin{aligned} W_a^i \overset{*}{W}_i^b &= \delta_a^b, & \varepsilon_\alpha^i \overset{*}{\varepsilon}_i^\beta &= \delta_\alpha^\beta, & W_a^i \overset{*}{\varepsilon}_i^\alpha &= 0, \\ \overset{*}{W}_i^a \varepsilon_\alpha^i &= 0, & \overset{*}{W}_i^a W_a^j + \varepsilon_i^\alpha \varepsilon_\alpha^j &= \delta_i^j. \end{aligned} \quad (1.49)$$

## Тензор

$$P_j^i = \delta_j^i - 2W_a^i \overset{*}{W}_j^a = -\delta_j^i + 2e_\alpha^i e_j^\alpha \quad (1.50)$$

является структурным объектом  $\pi$ -структуры на  $M_n$ , определенной распределениями  $W$  и  $e$ .

Компоненты тензоров

$$\Pi_j^i = W_a^i \overset{*}{W}_j^a, \quad \overset{\prime}{\Pi}_j^i = e_\alpha^i e_j^\alpha \quad (1.51)$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Pi^2 = \Pi, \quad \overset{\prime}{\Pi}^2 = \overset{\prime}{\Pi}, \quad \Pi \overset{\prime}{\Pi} = \overset{\prime}{\Pi} \Pi = 0, \quad \Pi + \overset{\prime}{\Pi} = I. \quad (1.52)$$

Из (1.52) следует, что операторы  $\Pi$  и  $\overset{\prime}{\Pi}$  являются операторами проектирования на плоскости  $W$  и  $e$ , соответственно.

Хорошо известно, что с  $f$ -структурой, заданной на многообразии  $M_n$ , ассоциируется пара распределений, возникающих при проектировании векторов в  $T_x(M_n)$  с помощью операторов  $m_j^i$  (см. (1.28)) и

$$l_j^i = -f_k^i f_j^k. \quad (1.53)$$

Заметим, что

$$m_j^i = \Pi_j^i, \quad l_j^i = \overset{\prime}{\Pi}_j^i.$$

Формулы (1.14), (1.13) определяют охваты структурных объектов этих двух распределений  $L$  и  $M$ , соответственно. Это и вскрывает геометрический смысл построенных объектов  $\{W_a^i\}$ ,  $\{e_\alpha^i\}$ .

**4. Поле линейного оператора  $f$  на  $M_n$ .** Известно, что всякая квадратная ненулевая матрица размерности  $n \times n$  определяет линейный оператор в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  связи с этим, в каждой точке  $x \in M_n$  матрица  $\|f_j^i\|$ , индуцированная структурным объектом  $\{f_j^i\}$ ,  $f$ -структуры ранга  $r$  на  $M_n$ , также определяет линейный оператор в  $n$ -мерном векторном пространстве  $T_x(M_n)$ . Обозначим этот линейный оператор через  $f_x$ . На  $M_n$  при этом определяется поле линейного оператора  $f = \bigcup_{x \in M_n} f_x$ .

Укажем теперь основные свойства поля линейного оператора  $f$ , порожденного полем структурного объекта  $\{f_j^i\}$   $f$ -структуры на  $M_n$ .

1) В каждой точке  $x \in M_n$  ранг линейного оператора  $f_x$  равен  $r$ , а дефект —  $(n-r)$ .

2) В каждой точке  $x \in M_n$   $(n-r)$ -мерное векторное пространство  $e_x$  элемента распределения  $e$  под действием линейного оператора  $f_x$  отображается в нулевой вектор, т. е. для любого вектора  $\vec{X}_x \in e_x$   $f_x(\vec{X}_x) = 0$ .

3) В каждой точке  $x \in M_n$   $r$ -мерное векторное пространство  $W_x$  элемента распределения  $W$  является инвариантным вектор-

ным пространством относительно действия линейного оператора  $f_x$ .

4) В каждой точке  $x \in M_n$  образом линейного оператора  $f_x$  является  $r$ -мерное векторное пространство  $W_x$  элемента распределения  $W$ , а ядром линейного оператора  $f_x$  является  $(n-r)$ -мерное векторное пространство  $e_x$  элемента распределения  $e$ .

Следовательно,  $\text{Im } f_x = W_x$  и  $\text{Ker } f_x = e_x$ .

Теорема 2. В каждой точке  $x \in M_n$  линейный оператор  $f_x$  в  $M_n$  имеет  $(n-r)$  ненулевых собственных значений и  $r$  мнимо сопряженных собственных значений [41].

Для нахождения собственных значений линейного оператора  $f_x$  в  $T_x(M_n)$  выберем векторный базис, векторы которого удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \vec{A}_\alpha \in W_x, \quad \vec{A}_\alpha \in e_x, \\ \vec{A}_{m+1} = f \vec{A}_1, \quad \vec{A}_{m+2} = f \vec{A}_2, \quad \dots, \quad \vec{A}_r = f \vec{A}_m, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где  $2m \neq r$ . Такой репер назовем адаптированным репером  $f$ -структуре ранга  $r$  на  $M_n$ . Относительно такого репера собственные значения линейного оператора  $f_x$  определяются из уравнения:

$$\lambda^{n-r} (\lambda^2 + 1)^m = 0. \quad (1.55)$$

Из (1.53) следует, что собственными значениями линейного оператора  $f_x$  являются  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = i$ ,  $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_r = -i$ ,  $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$ .

Очевидно, что линейно независимые собственные векторы, отвечающие нулевому собственному значению, образуют векторный базис в элементе распределения  $e$ , а линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $i$  и  $-i$ , лежат в плоскостях распределения  $W$ . Обозначим через  $\pi$  распределение  $m$ -мерных плоскостей, каждый элемент которого натянут на собственные векторы, отвечающие собственному значению  $i$ , а через  $\tilde{\pi}$  — распределение  $m$ -мерных плоскостей, каждый элемент  $\tilde{\pi}_x$  которого натянут на собственные векторы, отвечающие собственному значению  $-i$ . Распределение  $\tilde{\pi}$  сопряжено с  $\pi$  и элементы этих распределений лежат в плоскостях  $W_x$ , причем  $W_x = \pi_x \oplus \tilde{\pi}_x$  [41], [58]. Следовательно, доказана теорема.

Теорема 3. В многообразии  $M_n$   $f$ -структуры ранга  $r$  определяются распределение  $e$   $(n-r)$ -мерных линейных элементов, распределение  $\pi$   $m$ -мерных линейных элементов и распределение  $\tilde{\pi}$ , сопряженное с  $\pi$ , причем  $T_x(M_n) = e_x \oplus W_x = e_x \oplus \pi_x \oplus \tilde{\pi}_x$ .

Теорема 4 (Мишра [41]). Необходимым и достаточным условием задания  $f$ -структуры ранга  $r$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$  является задание на  $M_n$  3л-структуры, опре-

деленной распределением  $\pi$  комплексной размерности  $m$ , распределением  $\bar{\pi}$  ( $\bar{\pi}$  комплексно сопряженное с  $\pi$ ) и распределением  $\varepsilon$  действительной размерности  $(n-r)$ .

Доказательство этой теоремы приведено в работе [41].

Мишра [41] нашел собственные значения и собственные векторы линейных операторов  $l_x$  и  $m_x$ , определенных, соответственно, матрицами  $\|l_j^i\|$  (см. (1.53)) и  $\|m_j^i\|$  (см. (1.28)). В частности, показано, что собственные значения линейного оператора  $l_x$  определяются решением уравнения

$$\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r=0,$$

а собственные значения линейного оператора  $m_x$  —

$$\lambda^r(\lambda-1)^{n-r}=0.$$

В работе [42] найдены связи между собственными векторами линейных операторов  $l_x$  и  $m_x$ , а также  $m_x$  и  $f_x$ .

5.  $(f\xi\eta\rho)$ -структура, индуцированная на  $f$ -многообразии  $M_n$ . Геометрические объекты  $\xi_j^i, \varepsilon_\alpha^i$ , определенные внутренним образом на  $f$ -многообразии и присоединенные к группе  $D_n^1 \times GL(n-r, R)$ , вместе со структурным объектом  $f_j^i$   $f$ -структуры становятся структурными объектами  $(f\xi\eta\rho)$ -структуры на  $M_n$ . Действительно, из формул (1.14), (1.33) и равенств (1.3), (1.49) следует

$$f_j^i f_i^j = -\delta_j^i + \varepsilon_\alpha^i \varepsilon_j^\alpha, \quad (1.56)$$

$$f_j^i \varepsilon_\alpha^j = 0, \quad f_j^i \varepsilon_i^\alpha = 0, \quad \varepsilon_\alpha^i \varepsilon_i^\beta = \delta_\alpha^\beta.$$

**Теорема 5.** Заданная на дифференцируемом многообразии  $M_n$   $f$ -структура ранга  $r$  определяет на нем внутренне присоединенную  $(f\xi\eta\rho)$ -структуру ранга  $r$  и коранга 0.

В работе [21] введено понятие рода  $(f\xi\eta\rho)$ -структуры. В данном случае индуцированная  $(f\xi\eta\rho)$ -структура на  $f$ -многообразии — рода  $(r, n-r, r, 0)$ .

Если  $r=n-1$  ( $n$  — нечетное число, то  $\alpha$  принимает лишь одно значение:  $\alpha=n$ . При этом равенства (1.56) примут вид:

$$f_j^i f_i^j = -\delta_j^i + \xi_n^i \xi_j^n,$$

$$f_j^i \varepsilon_n^j = 0, \quad f_j^i \xi_i^n = 0, \quad \xi_n^i \xi_i^n = 1. \quad (1.57)$$

Из (1.57) следует, что геометрические объекты  $f_j^i, \varepsilon_n^i, \xi_n^i$  являются структурными объектами почти контактной структуры на  $M_n$  [18], [22].

**Теорема 6.** Заданная на дифференцируемом многообразии  $M_n$  ( $n$  — нечетное число)  $f$ -структура ранга  $r=n-1$  определяет на нем внутренне присоединенную почти контактную структуру.

## 6. Нормальные и интегрируемые $f$ -структуры на $M_n$ .

### 1. Тензор

$$n_{jk}^i = f_j^i f_{kl}^i - f_k^i f_{jl}^i - (f_{kj}^i - f_{jk}^i) f_l^i \quad (1.58)$$

называется тензором Нейенхейса аффинора  $\{f_j^i\}$   $f$ -структуры ранга  $r$  на  $M_n$  [2], [22]. Используя тензор Нейенхейса в работе [35], Яно и Исихара указали необходимые и достаточные условия, при выполнении которых распределения  $\varepsilon$  и  $W$  становятся интегрируемыми.

Теорема 7 [35]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости распределения  $\varepsilon$  является выполнение условий

$$n_{jk}^i m_l^j m_i^k = 0 \quad (1.59)$$

или эквивалентно

$$l_i^m n_{jk}^i m_l^j m_i^k = 0. \quad (1.60)$$

Действительно, при выполнении одного из равенств (1.59) или (1.60) тензор неголономности  $r_{\alpha\beta}^i$  (1.42) распределения  $\varepsilon$  тождественно обращается в нуль. Верно и обратное утверждение, если  $r_{\alpha\beta}^i$  равен нулю, то выполняются равенства (1.59) и (1.60).

Теорема 8 [35]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости распределения  $W$  является выполнение одного из условий: 1)  $m_i^t n_{jk}^i = 0$ , 2)  $m_i^t n_{ik}^i l_s^j l_p^k = 0$ , 3)  $m_i^t n_{ik}^i f_m^j f_s^k = 0$ .

Теорема 9 [35]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости обоих распределений  $\varepsilon$  и  $W$  является выполнение условий:

$$n_{jk}^i = l_i^t n_{ms}^t l_j^m l_k^s + n_{ms}^t l_j^m m_k^s + n_{ms}^t m_j^m l_k^s. \quad (1.61)$$

Отсюда следует, что распределения  $\varepsilon$  и  $W$  в  $f$ -многообразии определяют композицию А. П. Нордена тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1.61).

Мишра в работе [41] нашел необходимые и достаточные условия интегрируемости распределения  $\pi$ -комплексной размерности  $m$  и  $\bar{\pi}$ -комплексное сопряженное с  $\pi$ .

2. Определение 2 [66] (см. также [35], [44]). Если распределение  $W$  интегрируемо и почти комплексная структура  $\psi$  интегрируема (т. е. тензор Нейенхейса аффинора  $\psi_j^i$  равен нулю) для каждого интегрируемого многообразия, то говорят, что  $f$ -структура на многообразии  $M_n$  частично интегрируема.

Тензор Нейенхейса для аффинора  $\psi_b^a$  (см. (1.25) определяется по формулам вида (1.58).  $f$ -структура на  $M_n$  частично интегрируема тогда и только тогда [35], [66], когда тензор Нейенхейса удовлетворяет условиям:

$$n_{jk}^i l_t^j l_s^k = 0$$

или

$$n_{jk}^i f_l^j f_s^k = 0,$$

или

$$n_{ji}^i - m_j^i n_{ii}^i + m_i^i n_{ij}^i + m_i^i m_j^s n_{is}^i = 0.$$

3. Определение 3 [45], [69].  $f$ -структура на  $M_n$  называется интегрируемой, если в каждой точке  $x \in M_n$  имеется координатная система, относительно которой матрица  $f$  имеет постоянные компоненты

$$\|f_j^i\| = \begin{vmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где  $I_m$  — единичная матрица размерности  $m \times m$  ( $2m = r$ ).

Теорема 10 [35], [69]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости  $f$ -структуры является равенство нулю всех компонент тензора  $n_{jk}^i$ .

В [41] найдены условия интегрируемости  $f$ -структуры, с точки зрения инволютивности распределений  $\pi$ ,  $\pi$ ,  $\varepsilon$ .

4. В работе [34] (см. также [53], [69]) Исихара ввел понятие нормальной  $f$ -структуры на дифференцируемом многообразии. Для введения этого понятия он рассмотрел топологическое произведение многообразия  $M_n$  на  $R_{n-r}$ , где  $R_{n-r}$  —  $(n-r)$ -мерное векторное пространство, натянутое в точке  $x \in M_n$  на векторы  $\vec{v}_\sigma$ . Группу преобразований векторного репера  $\vec{v}_\sigma$  в  $R_{n-r}$  обозначим через  $GL(n-r, R)$ , а инвариантные формы —  $\bar{\theta}_\sigma^r$ . Следовательно,

$$\delta v_\sigma = \bar{\theta}_\sigma^r \vec{v}_\tau. \quad (1.62)$$

Предположим теперь, что в главном расслоенном многообразии  $E$ , базой которого является исходное многообразие  $M_n$ , а структурной группой  $GL(n-r, R)$ , задана аффинная связность  $\gamma$  с объектом связности  $\gamma_{\sigma i}^r$ . При этом формы

$$\bar{\theta}_\sigma^r = \theta_\sigma^r - \gamma_{\sigma i}^r \omega^i \quad (1.63)$$

становятся формами связности  $\gamma$ .

Пусть  $\mathfrak{M}_{2n-r}$  — присоединенное расслоенное многообразие, базой которого является  $M_n$ , а слоями  $(2n-r)$ -мерные векторные пространства  $B_x(M_n)$ , натянутые на векторы  $\vec{l}_i$ ,  $\vec{v}_\sigma$ . В каждом слое  $B_x(M_n)$  выберем репер  $\vec{B}_I$  так, чтобы уравнения плоскости  $T_x(M_n)$  имели вид:

$$y^\sigma = \Gamma_i^\sigma y^i, \quad (1.64)$$

где

$$\Gamma_i^\sigma = \Gamma_{\tau i}^\sigma y^\tau, \quad (1.65)$$

а уравнения плоскости  $v_x$ , натянутой на векторы  $\vec{v}_x$  —

$$y^i = 0. \quad (1.66)$$

В векторном пространстве  $B_x(M_n)$  существует линейный оператор  $F_K^I$ , удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} F\vec{B}_i &= f_i^j \vec{B}_j + W_i^\alpha \vec{B}_{n+\alpha}, \\ F\vec{B}_{n+\alpha} &= -\varepsilon_\alpha^j \vec{B}_j. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Из (1.64), (1.65) и (1.67) следует, что компоненты  $F_K^I$  определяются по формулам [34]:

$$\|F_K^I\| = \left\| \begin{array}{cc} f_j^i - \Gamma_j^{n+\alpha} \varepsilon_\alpha^i & -\varepsilon_\alpha^i \\ W_j^\beta - f_j^i \Gamma_i^{n+\beta} + \Gamma_j^{n+\gamma} \varepsilon_\gamma^i \Gamma_i^{n+\beta} & \varepsilon_\beta^i \Gamma_i^{n+\alpha} \end{array} \right\| \quad (1.68)$$

и

$$F^2 = -I. \quad (1.69)$$

**Теорема 11** [34]. Если на дифференцируемом многообразии  $M_n$  задана  $f$ -структура ранга  $r$ , то на  $\mathfrak{M}_{2n-r}$  существует почти комплексная структура. Относительно связности  $\gamma$  компоненты объекта  $F$  почти комплексной структуры определяются по формулам (1.68).

Тензор

$$N_{KL}^I = F_K^M F_{LM}^I - F_L^M F_{KM}^I - (F_{LK}^M - F_{KL}^M) F_M^I \quad (1.70)$$

является тензором Нейенхейса почти комплексной структуры на  $\mathfrak{M}_{2n-r}$ .

**Определение 4** (Исихара [34]). Если почти комплексная структура, определенная по формулам (1.68), комплексная (т. е.  $N_{KL}^I = 0$ ), то говорят, что  $f$ -структура на  $M_n$  нормальна относительно связности  $\gamma$ .

В работе [34] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых  $f$ -структура на  $M_n$  становится нормальной. Показано [34], что если  $f$ -структура нормальна, то распределение  $\varepsilon$  интегрируемо.

**7. Метрическая  $f$ -структура ранга  $r$  на  $M_n$ .** Пусть на многообразии  $M_n$  задано поле симметрического тензора  $g_{ij}$ :

$$dg_{ij} - g_{ij} \omega_i^l - g_{il} \omega_j^l = g_{ijk} \omega^k. \quad (1.71)$$

**Определение 5** [66]. Если на  $f$ -многообразии  $M_n$  метрический тензор  $g_{ij}$  удовлетворяет условиям

$$g_{ij} = f_i^k f_j^l g_{kl} + m_i^k g_{kj}, \quad (1.72)$$

то говорят, что на  $M_n$  задана метрическая  $f$ -структура.

Многообразие  $M_n$ , снабженное метрической  $f$ -структурой ранга  $r$ , называют метрическим  $f$ -многообразием или  $(f, g)$ -многообразием.

Метрический тензор  $g_{ij}$  определяет метрический тензор на распределении  $W$ :

$$g_{ab} = g_{ij} W_a^i W_b^j \quad (1.73)$$

и метрический тензор на распределении  $\varepsilon$

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij} \varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\beta}^j. \quad (1.74)$$

Из соотношений (1.72) следует, что в каждой точке  $x \in M_n$  элементы распределений  $\varepsilon_x$  и  $W_x$  ортогональны в метрике  $g_{ij}$ , т. е.  $g_{i\alpha} = g_{ij} W_{\alpha}^i \varepsilon_{\alpha}^j = 0$ .

Если на дифференцируемом многообразии  $M_n$   $f$ -структуры ранга  $r$  задана некоторая положительно определенная риманова метрика  $a_{ij}$ , то в нем существует метрический тензор  $g_{ij}$ , компоненты которого удовлетворяют соотношениям (1.71) (см. [66], [69]). При этом компоненты  $g_{ij}$  охватываются по формулам [66]:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} + f_i^l f_j^k \bar{a}_{lk} + m_i^l m_j^k \bar{a}_{lk}),$$

где

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{2} [a_{ij} + (l_i^l - m_i^l)(l_j^k - m_j^k) a_{jk}].$$

В метрическом  $f$ -многообразии  $M_n$  можно выбрать ортонормированный репер в метрике  $g_{ij}$ , векторы  $\{\vec{A}_i\}$  которого удовлетворяют условиям (1.54). Такой репер на  $T_x(M_n)$  называется репером, адаптированным  $(f, g)$ -структуре. Семейство всех векторных реперов в  $T_x(M_n)$ , адаптированных  $(f, g)$ -структуре, обозначим через  $H$ . В произвольной фиксированной точке  $x \in M_n$  матрица перехода из одного репера  $R_1 \in H$  в любой другой репер  $R_2 \in H$  задается ортогональной матрицей вида:

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_m & B_m & 0 \\ -B_m & A_m & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array} \right\|.$$

Следовательно, группа касательного пучка  $D_n^1$  метрической  $f$ -структуры может быть редуцирована до  $U(m) \times O(n-r)$ , где  $U(m)$  — унитарная группа [66].

Теорема 12 [66]. Необходимым и достаточным условием задания  $f$ -структуры ранга  $r$  на  $M_n$  является выполнение следующих условий:

1)  $r$  — четное число, 2) группа касательного расслоения может быть редуцирована до группы  $U(m) \times O(n-r)$ .

Теорема 13. Заданная на многообразии  $M_n$   $(f, g)$ -структура определяет на нем внутренне присоединенную метрическую  $(f\xi\eta\rho)$ -структуру ранга  $r$  и коранга 0.

## § 2. РЕПЕРИРОВАННАЯ $f$ -СТРУКТУРА РАНГА $r$ НА $M_n$

1. Определение 1 (см. [31], [32]). Если на многообразии  $M_n$  заданы поле тензора  $\{f_i^j\}$  ( $\text{rang } \|f\| = r = \text{const}$ ),  $(n-r)$  линейно независимых векторных полей  $\vec{\xi}_{\sigma}$  и  $(n-r)$  линейно не-

зависимых ковекторных полей  $\vec{\eta}^\sigma$  (инвариантных относительно группы  $D_n^1$ ), компоненты которых подчинены соотношениям:

$$f_j^i f_l^j = -\delta_l^i + \xi_\sigma^i \eta_l^\sigma, \quad \xi_\sigma^i \eta_i^\sigma = \delta_\sigma^\tau, \quad (2.1)$$

то говорят, что на  $M_n$  задана реперированная  $f$ -структура ранга  $r$ .

В литературе (см., например, [63]) реперированную  $f$ -структуру ранга  $r$  также называют почти  $r$ -контактной структурой.

Из равенств (2.1) следуют равенства:

$$f_j^i \xi_\sigma^j = 0, \quad f_j^i \eta_i^\sigma = 0. \quad (2.2)$$

Так как каждый вектор  $\vec{\xi}_\sigma$  инвариантен относительно действия группы  $D_n^1$ , то при фиксированных главных параметрах

$$\vec{\delta}_{\xi_\sigma} = \vec{\theta}_\sigma^\sigma \vec{\xi}_\sigma,$$

где  $\sigma$  — некоторое произвольно фиксированное значение из ряда  $n+1, n+2, \dots, 2n-r$ . Форма  $\vec{\theta}_\sigma^\sigma$  при каждом фиксированном значении  $\sigma$  является инвариантной формой одночленной группы, которая действует в одномерном векторном пространстве  $\{\xi_\sigma\}$ .

Дифференциальные уравнения поля структурного объекта  $\{f_j^i\}$  имеют вид (1.4), а полей структурных объектов  $\{\xi_\sigma^i\}$  и  $\{\eta_i^\sigma\}$ , соответственно:

$$d\xi_\sigma^i + \xi_\sigma^j \omega_j^i - \xi_\sigma^i \theta_\sigma^\sigma = \bar{\xi}_\sigma^i \omega^j, \quad (2.3)$$

$$d\eta_i^\sigma - \eta_j^\sigma \omega_i^j + \eta_i^\sigma \theta_\sigma^\sigma = \bar{\eta}_i^\sigma \omega^j. \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.3), (2.4)  $\sigma$  — произвольно фиксированный индекс из ряда  $n+1, n+2, \dots, 2n-r$ .

Из (2.1), (2.2) следует, что  $f^3 + f = 0$ . Следовательно, реперированная  $f$ -структура ранга  $r$  является частным классом  $f$ -структуры ранга  $r$  и частным классом  $(f\xi\eta\rho)$ -структуры ранга  $r$  и коранга 0.

Почти контактная структура на  $M_n$  ( $n$  — нечетное число) является реперированной  $f$ -структурой ранга  $n-1$ .

$(n-r)$  линейно независимых векторов  $\vec{\xi}_\sigma$  определяют на многообразии  $M_n$  распределение  $\xi$   $(n-r)$ -мерных линейных элементов  $\xi_x$ . Из соотношений (2.1) следует, что в каждой точке  $x \in M_n$   $\xi_x = \text{Ker } f_x$ , т. е. векторное пространство  $\xi_x$  является ядром линейного оператора  $f_x$ . В каждой точке  $x \in M_n$   $(n-r)$  линейно независимых ковекторов  $\eta_x^\sigma$  определяют пучок с  $r$ -мерной осью  $\eta_x$ , порождающей на  $M_n$  распределение  $r$ -мерных линейных элементов  $\eta$ .

Очевидно, что в каждой точке  $x \in M_n$   $\eta_x = \text{Im } f_x$ , т. е. векторное пространство  $\eta_x$  является образом линейного оператора  $f_x$ . Распределения  $\eta$  и  $\xi$  в  $M_n$  определяют  $\pi$ -структуру.

Определение 2 [26], [50]. Реперированная  $f$ -структура ранга  $r$  на дифференцируемом многообразии  $M_n$  называется метрической реперированной  $f$ -структурой ранга  $r$ , если на  $M_n$  задана риманова метрика  $g$  с метрическим тензором  $g_{ij}$ , компоненты которого связаны с компонентами структурных тензоров следующими соотношениями:

$$g_{ki}f_i^k f_j^l = g_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \eta_i^\alpha \eta_j^\beta. \quad (2.5)$$

Метрическую реперированную  $f$ -структуру ранга  $r$  также называют метрической почти  $r$ -контактной структурой или  $(f, g, \xi, \eta)$ -структурой (см., например, [50], [63]).

В работе [30] доказано существование реперированных  $f$ -структур. Если в многообразии  $M_n$  почти эрмитовой структуры задано распределение  $(n-r)$ -мерных линейных элементов ( $r$  — четное число), каждый элемент которого натянут на  $(n-r)$  линейно независимых, инвариантных относительно действия группы  $D_n^1$  векторных полей, то на нем индуцируется реперированная  $f$ -структура ранга  $r$ .

Пусть  $M_n$  — многообразие  $f$ -структуры ранга  $r$ . Если в каждой плоскости  $e_x$  (см. (§ 1)) задать  $(n-r)$  линейно независимых векторов, то многообразие  $f$ -структуры становится многообразием реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$ . Выделение реперированных  $f$ -структур из класса  $f$ -структур аналитически осуществляется требованием

$$\theta_\alpha^\beta = \alpha_\beta^\alpha \omega^i \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2.6)$$

Следовательно, формы  $\theta_\beta^\alpha$  ( $\alpha \neq \beta$ ) становятся главными.

2. В дальнейшем будем считать, что каждый вектор  $\vec{\xi}_\sigma$  ( $\sigma$  — произвольно фиксированное число) нормирован так, что уравнения (2.3) примут вид:

$$d\xi_\sigma^i + \xi_\sigma^j \omega_j^i = \xi_{\sigma j}^i \omega^j, \quad (2.7)$$

а уравнения (2.4) — вид:

$$d\eta_i^\sigma - \eta_i^\sigma \omega_j^i = \eta_{ij}^\sigma \omega^j. \quad (2.8)$$

При продолжении (2.7) и (2.8), соответственно, получим

$$d\xi_{\sigma j}^i - \xi_{\sigma i}^j \omega_j^i + \xi_{\sigma j}^i \omega_i^i + \xi_{\sigma i}^j \omega_{ij}^i = \xi_{\sigma jk}^i \omega^k, \quad (2.9)$$

$$d\eta_{ij}^\sigma - \eta_{ij}^\sigma \omega_i^i - \eta_{ij}^\sigma \omega_j^i - \eta_{ij}^\sigma \omega_{ij}^i = \eta_{ijk}^\sigma \omega^k. \quad (2.10)$$

Геометрические объекты  $\{f_j^i, f_{jk}^i\}$ ,  $\{\xi_\sigma^i, \xi_{\sigma k}^i\}$ ,  $\{\eta_i^\sigma, \eta_{ik}^\sigma\}$  называются продолженными структурными объектами  $\{f, \xi, \eta\}$ -структуры на  $M_n$ . Их компоненты удовлетворяют соотношениям (2.1), (2.2) и

$$\begin{aligned} f_{jk}^i f_{l'}^j + f_j^i f_{lk}^j &= \xi_{\sigma k}^i \eta_l^\sigma + \xi_\sigma^i \eta_{lk}^\sigma, \\ f_{jk}^i \xi_\sigma^j + f_j^i \xi_{\sigma k}^j &= 0, \quad f_{jk}^i \eta_l^\sigma + f_j^i \eta_{lk}^\sigma = 0, \\ \xi_{\sigma k}^i \eta_l^\sigma + \xi_\sigma^i \eta_{lk}^\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Если размерность дифференцируемого многообразия  $M_r$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ )-структуры четная, то можно ввести тензор типа (1.1) по формулам [31], [32]:

$$\hat{f}_j^i = f_j^i + \eta_j^{2\sigma_1} \xi_{2\sigma_1-1}^i - \eta_j^{2\sigma_1-1} \xi_{\sigma_1}^i, \quad (2.12)$$

где  $\sigma_1 = n+1, \dots, n + \frac{n-r}{2}$ . Компоненты тензора  $\hat{f}_j^i$  удовлетворяют соотношениям

$$\hat{f}_j^i \hat{f}_i^j = -\delta_j^i, \quad (2.13)$$

а следовательно,  $\hat{f}_j^i$  является структурным объектом почти комплексной структуры на  $M_n$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ ).

Если же размерность  $M_n$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ )-структуры нечетная, то тензоры

$$\bar{f}_j^i = f_j^i + \eta_j^{2\sigma_2} \xi_{2\sigma_2-1}^i - \eta_j^{2\sigma_2-1} \xi_{\sigma_2}^i, \quad (2.14)$$

где  $\sigma_2 = n+1, \dots, n + \frac{n-r-1}{2}$ , вместе с  $\xi_{2n-r}^i$ ,  $[\eta_j^{2n-r}]$  являются структурными объектами почти контактной структуры на  $M_n$ .

Теорема 1 [31], [32]. В многообразии  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$  при  $n$  четном естественным образом определяется почти комплексная структура, а при  $n$  нечетном — почти контактная структура.

Теорема 2 [68]. Если на  $M_n$  задана реперированная  $f$ -структура ранга  $r$ , то на  $M_n$  индуцируется также реперированная  $\bar{f}$ -структура ранга  $(r+2)$ .

Формулы для определения в  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$  структурных объектов реперированной  $f$ -структуры ранга  $r+2$  ( $0 < r \leq n-2$ ) приведены в [68].

Теорема 3 [63]. Пусть  $\xi_\sigma$  и  $\eta^\sigma$  ( $n-r$ )-векторных и ( $n-r$ )-ковекторных полей таких, что  $\xi_\sigma^i \eta_j^\sigma = \delta_j^i$ . Тогда существует положительно определенная риманова метрика  $\bar{g}$  такая, что

$$\bar{g}_{ij} \xi_\alpha^i = \delta_{\alpha\beta} \eta_j^\beta.$$

Теорема 4 [63]. На многообразии  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$  существует положительно определенная риманова метрика  $g$  такая, что выполняются (2.5).

При этом компоненты  $g_{ij}$  определяются по формулам

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ik} f_i^l f_j^k + \delta_{\alpha\beta} \eta_i^\alpha \eta_j^\beta). \quad (2.15)$$

Определение 3 [49]. Кососимметрический тензор

$$F_{ij} = g_{lj} f_i^l \quad (2.16)$$

на  $M_n$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ ) называется фундаментальной формой реперированной  $f$ -структуры на  $M_n$ .

Определение 4 [49]. Реперированная метрическая  $f$ -структура называется квазисимплектической, если  $F$  замкнута и параллельна вдоль интегральных кривых векторных полей  $\vec{\xi}_\sigma$ .

Известно [30], [31], [35], что реперированная  $f$ -структура на  $M_n$  нормальна тогда и только тогда, когда тензор

$$S_{jk}^i = f_j^i f_{ki}^i - f_k^i f_{ji}^i - (f_{kj}^i - f_{jk}^i) f_l^i + (\eta_{kj}^\sigma - \eta_{jk}^\sigma) \xi_\sigma^i = 0. \quad (2.17)$$

Если реперированная  $f$ -структура на  $M_n$  нормальна, то выполняются следующие равенства:

$$S_{ij}^\sigma = f_j^i \eta_{il}^\sigma - f_l^i \eta_{ji}^\sigma - (f_{ij}^i - f_{ji}^i) \eta_l^\sigma = 0,$$

$$S_{j\sigma}^k = -f_j^i \xi_{\sigma i}^k + \xi_\sigma^i f_{ji}^k + \xi_{\sigma j}^i f_l^k = 0,$$

$$S_{j\tau}^\sigma = \xi_\tau^i \eta_{ji}^\sigma + \xi_{\tau j}^i \eta_l^\sigma = 0.$$

Теорема 5 [31]. Если реперированная  $f$ -структура на  $M_n$  ( $n$  — четное число) нормальна, то индуцированная почти комплексная структура на  $M_n$  со структурным тензором  $\hat{f}_j^i$  (2.12) интегрируема.

Теорема 6 [31]. Если реперированная  $f$ -структура на  $M_n$  ( $n$  — нечетное число) нормальна, то индуцированная на  $M_n$  почти контактная структура со структурными объектами  $\bar{f}_j^i$  (2.14),  $\xi_{2n-r}^i$ ,  $\eta_j^{2n-r}$  также нормальна.

Определение 5 [62]. Нормальная метрическая реперированная  $f$ -структура с замкнутой 2-формой  $F$  (2.16) называется  $K$ -структурой.

В работах [36], [37] изучены так называемые скрученные  $f$ -структуры.

### § 3. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ НА $M_n$ РЕПЕРИРОВАННОЙ $f$ -СТРУКТУРЫ РАНГА $r$

Пусть на  $M_n$  задана реперированная  $f$ -структура ранга  $r$  со структурными объектами  $f_j^i$ ,  $\xi_\sigma^i$ ,  $\eta_j^\sigma$ .

Согласно Г. Ф. Лантеву [2], [3], [16], в главном расслоенном многообразии  $M_n'$  формы

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i,$$

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k \quad (3.1)$$

будут формами аффинной связности без кручения тогда и только тогда, когда удовлетворяется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{jk}^i &= d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{mk}^i \omega_j^m - \Gamma_{jm}^i \omega_k^m + \Gamma_{jk}^m \omega_m^i - \\ &- \Gamma_{jk}^m \Gamma_{mi}^i \omega^l + \omega_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jki}^i \omega^l, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ . При этом структурные уравнения для форм  $\tilde{\omega}^i = \omega^i$ ,  $\tilde{\omega}_j^i$  удовлетворяют условиям теоремы Картана — Лаптева [2], [16]:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega_k^i, \\ d\tilde{\omega}_j^i &= \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$R_{jkl}^i = \frac{1}{2} (\tilde{\Gamma}_{j(kl)}^i + \Gamma_{j[kl}^m \Gamma_{m]l}^i) \quad (3.4)$$

— тензор кривизны связности  $\Gamma$ .

Связность  $\Gamma$  будет внутренне присоединена к многообразию  $M_n (f\xi_a \eta^\sigma)$ , если компоненты объекта связности  $\{\Gamma_{jk}^i\}$  будут охвачены структурными объектами реперированной  $f$ -структуры, заданной на  $M_n$ , и их продолжениями. Практически достаточно построить охват объекта  $\Gamma$  типа (1.2), присоединенного к  $D_n^2$ , компоненты которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l, \quad (3.5)$$

где

$$\Gamma_{jkl}^i = \Gamma_{jkl}^i + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i. \quad (3.6)$$

**1. Репер  $R_\eta$ .** Геометрические объекты  $\{\eta_\alpha^\sigma\}$  определяют  $(n-r)$ , инвариантных относительно группы  $D_n^1$ , распределений гиперплоскостных элементов  $\eta^\sigma$  и распределение  $r$ -мерных линейных элементов  $\eta$ , каждый элемент  $\eta_x$  которого содержится в элементах  $\eta_x^\sigma$  распределений  $\eta^\sigma$ . При этом можно всегда считать, что матрица  $\|\eta_\alpha^\sigma\|$  размерности  $(n-r)^2$  невырождена, а следовательно, существует матрица  $\|\eta_\sigma^{\alpha*}\|$ , являющаяся обратной матрицей матрицы  $\|\eta_\alpha^\sigma\|$ :

$$\eta_\alpha^\sigma \eta_\tau^{\alpha*} = \delta_\tau^\sigma, \quad \eta_\alpha^\sigma \eta_\sigma^{\beta*} = \delta_\alpha^\beta. \quad (3.7)$$

При этом система величин

$$\eta_a^\alpha = -\eta_a^\sigma \eta_\sigma^{\alpha*}, \quad (3.8)$$

удовлетворяющая дифференциальным уравнениям

$$\nabla \eta_a^\alpha + \omega_a^\alpha - \eta_b^\alpha \eta_a^\beta \omega_b^\beta = \eta_{a\alpha}^\alpha \omega^a, \quad (3.9)$$

является структурным объектом распределения  $\eta$ , а уравнения (3.9) являются дифференциальными уравнениями этого распределения.

Векторы

$$\vec{E}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \eta_\alpha^\sigma \vec{e}_\sigma \quad (3.10)$$

натягивают в каждой точке  $x \in M_n$  элемент распределения  $\eta$ .

Если первые  $r$  векторов репера  $\{\vec{e}_i\}$  расположить в плоскостях элемента распределения, то будем иметь

$$\eta_a^\alpha = 0 \quad (3.11)$$

и  $\vec{E}_a = \vec{e}_a$ . Такой репер назовем репером  $R_\eta$ .

В репере  $R_\eta$  система дифференциальных уравнений (3.9) распределения  $\eta$  имеет вид:

$$\omega_a^\alpha = \eta_{ai}^\alpha \omega^i. \quad (3.12)$$

В силу проведенной канонизации, дифференциальные уравнения для компонент  $\{\eta_{ai}^\alpha\}$  (2.10) фундаментального объекта первого порядка распределения  $\eta$  примут вид:

$$\nabla \eta_{ab}^\alpha + \omega_{ab}^\alpha = \eta_{abi}^\alpha \omega^i, \quad (3.13)$$

$$\nabla \eta_{a\beta}^\alpha - \eta_{ab}^\alpha \omega_\beta^b + \omega_{a\beta}^\alpha = \eta_{a\beta i}^\alpha \omega^i. \quad (3.14)$$

Из (3.13) видно, что компоненты  $\{\eta_{ab}^\alpha\}$  фундаментального объекта  $\{\eta_{ai}^\alpha\}$  первого порядка распределения  $\eta$  образуют самостоятельный геометрический объект, присоединенный к группе  $D_n^2$ . Этот объект называется фундаментальным подобъектом первого порядка [8] распределения  $\eta$ .

Компоненты структурных объектов  $\{f_j^i\}$ ,  $\{\xi_\sigma^i\}$ ,  $\{\eta_j^\sigma\}$  удовлетворяют следующим соотношениям в репере  $R_\eta$ :

$$\begin{aligned} f_i^a = 0, \quad \eta_\alpha^\sigma \xi_\sigma^\alpha = \delta_\sigma^\sigma, \quad \eta_\alpha^\sigma \xi_\sigma^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad f_b^a \xi_\sigma^b + f_\alpha^a \xi_\sigma^\alpha = 0, \\ f_b^a f_c^b = -\delta_c^a, \quad f_b^a f_\gamma^b = -\xi_\sigma^a \eta_\gamma^\sigma. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Соотношения на компоненты  $\{f_j^i, f_{jk}^i\}$ ,  $\{\xi_\sigma^i, \xi_{\sigma k}^i\}$ ,  $\{\eta_j^\sigma, \eta_{jk}^\sigma\}$  получаются из равенств (2.11) с учетом проведенной канонизации:

$$\begin{aligned} f_{bi}^a f_c^b + f_j^a f_{ci}^j &= \xi_\sigma^a \eta_{ci}^\sigma, \\ f_{bi}^a f_\alpha^b + f_b^a f_{ci}^b &= \xi_\sigma^a \eta_{ci}^\sigma + \xi_\sigma^a \eta_{ci}^\sigma, \\ f_{bi}^a f_c^b &= \xi_\sigma^a \eta_{ci}^\sigma, \quad f_\alpha^a \xi_\sigma^a = 0, \\ f_{ai}^a f_\beta^a &= \xi_\sigma^a \eta_\beta^\sigma + \xi_\sigma^a \eta_{\beta i}^\sigma, \\ f_{ji}^a \xi_\sigma^j + f_j^a \xi_{ci}^j &= 0, \quad f_{ai}^a \eta_\alpha^\sigma + f_a^b \eta_{bi}^\sigma = 0, \\ \eta_{ji}^a \xi_\sigma^j + \eta_\alpha^a \xi_{ci}^\alpha &= 0, \quad f_{\beta i}^a \eta_\alpha^\sigma + f_\beta^a \eta_{ci}^\sigma = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Дифференциальные уравнения компонент структурных объектов  $(f_\sigma^\alpha \eta^\sigma)$ -структур относительно репера  $R_\eta$  принимают вид:

$$df_b^a - f_c^a \omega_b^c + f_b^c \omega_c^a = \bar{f}_{bi}^a \omega^i, \quad (3.17)$$

$$df_\alpha^a - f_\beta^a \omega_\alpha^\beta + f_\alpha^c \omega_c^a - f_c^a \omega_\alpha^c = \bar{f}_{\alpha i}^a \omega^i, \quad (3.18)$$

$$d\bar{\xi}_\sigma^a + \bar{\xi}_\sigma^b \omega_b^a + \bar{\xi}_\sigma^\alpha \omega_\alpha^a = \bar{\xi}_{\sigma l}^a \omega^l, \quad (3.19)$$

$$d\xi_\sigma^\alpha + \xi_\sigma^\beta \omega_\beta^\alpha = \bar{\xi}_{\sigma l}^\alpha \omega^l, \quad (3.20)$$

$$d\eta_\alpha^\sigma - \eta_\beta^\sigma \omega_\alpha^\beta = \bar{\eta}_{\alpha l}^\sigma \omega^l. \quad (3.21)$$

Запишем теперь дифференциальные уравнения компонент  $\{\xi_\sigma^i, \xi_{\sigma h}^i\}$ ,  $\{\eta_\sigma^i, \eta_{ik}^i\}$  в репере  $R_\eta$ :

$$\nabla \xi_{\sigma b}^a + \xi_{\sigma b}^\beta \omega_\beta^a + \xi_\sigma^c \omega_{cb}^a + \xi_\sigma^\beta \omega_{\beta b}^a = \bar{\xi}_{\sigma b l}^a \omega^l, \quad (3.22)$$

$$\Delta \xi_{\sigma \beta}^a - \xi_{\sigma b}^a \omega_\beta^b + \xi_{\sigma \beta}^\alpha \omega_\alpha^a + \xi_\sigma^b \omega_{\beta b}^a + \xi_\sigma^\alpha \omega_{\alpha \beta}^a = \bar{\xi}_{\sigma \beta l}^a \omega^l, \quad (3.23)$$

$$\nabla \xi_{\sigma b}^\beta + \xi_\sigma^\alpha \omega_{ab}^\beta + \xi_\sigma^\alpha \omega_{\alpha b}^\beta = \bar{\xi}_{\sigma b l}^\beta \omega^l, \quad (3.24)$$

$$\nabla \xi_{\sigma \beta}^\alpha - \xi_{\sigma a}^\alpha \omega_\beta^a - \xi_\sigma^a \omega_{a\beta}^\alpha + \xi_\sigma^\gamma \omega_{\gamma \beta}^\alpha = \bar{\xi}_{\sigma \beta l}^\alpha \omega^l, \quad (3.25)$$

$$\nabla \eta_{ab}^\sigma - \eta_\beta^\sigma \omega_{ab}^\beta = \bar{\eta}_{ab l}^\sigma \omega^l, \quad (3.26)$$

$$\nabla \eta_{\alpha a}^\sigma - \eta_{ab}^\sigma \omega_\alpha^b - \eta_\beta^\sigma \omega_{\alpha a}^\beta = \bar{\eta}_{\alpha a l}^\sigma \omega^l. \quad (3.27)$$

2. Внутренне присоединенные поля геометрических объектов на  $M_n (f \xi_\sigma \eta^\sigma)$ , оснащенных полем  $\{A_{ab}^\alpha\}$ .

1. На многообразии  $M_n (f \xi_\sigma \eta^\sigma)$ -структуры определяется внутренним образом симметрическая аффинная связность, если на  $M_n$  задано поле геометрического объекта  $\{A_{ab}^\alpha\}$ , определенное в репере  $R_\eta$  дифференциальными уравнениями:

$$\nabla A_{ab}^\alpha + \omega_{ab}^\alpha = A_{ab l}^\alpha \omega^l, \quad (3.28)$$

где  $A_{ab}^\alpha = A_{ba}^\alpha$  и  $A_{ab}^\alpha \neq \eta_{ab}^\alpha$ .

Из (4.26) видно, что  $\{A_{ab}^\alpha\}$  присоединен к дифференциальной группе  $D_n^2$ .

В соприкасающемся пространстве  $T_x^2(M_n)$  рассмотрим векторы:

$$\vec{E}_{ab} = \vec{e}_{ab} + A_{ab}^\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (3.29)$$

Очевидно, что  $\vec{E}_{ab} = \vec{E}_{ba}$ . Дифференцируя (4.27), при  $\omega_l = 0$  получим:

$$\delta \vec{E}_{ab} = \bar{\omega}_a^c \vec{E}_{cb} + \bar{\omega}_b^c \vec{E}_{ca} + (\bar{\omega}_{ab}^c + A_{ab}^\alpha \bar{\omega}_\alpha^c) \vec{E}_c. \quad (3.30)$$

Из (3.30) видно, что совокупность векторов  $\{\vec{E}_a, \vec{E}_{ab}\}$  инвариантна относительно преобразования группы  $D_n^2$ . Инвариантную  $p$ -мерную плоскость  $(p = \frac{r(r+1)}{2} + r)$ , проходящую через центр пространства  $T_x^2(M_n)$  и определенную векторами  $\vec{E}_a$  и  $\vec{E}_{ab}$ , обозначим через  $\alpha_x$ . Таким образом, заданием поля геометрического объекта  $\{A_{ab}^\alpha\}$  в  $M_n (f \xi_\sigma \eta^\sigma)$ , присоединенного к  $D_n^2$ , определяется на  $M_n$  распределение  $p$ -мерных плоскостей  $\alpha$ , каждый элемент которого натянут на векторы  $\vec{E}_a, \vec{E}_{ab}$ .

Очевидно, что элемент распределения  $\eta$  принадлежит элементу распределения  $\alpha$ . Такова геометрическая характеристика оснащения многообразия  $M_n$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ ) полем геометрического объекта  $\{A_{ab}^\alpha\}$ .

В дальнейшем мы будем считать, что многообразие  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$  оснащено полем  $\{A_{ab}^\alpha\}$ .

2. Величины:

$$\Lambda_{ab}^\alpha = \eta_{ab}^\alpha - A_{ab}^\alpha \neq 0 \quad (3.31)$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \Lambda_{ab}^\alpha = \Lambda_{ab i}^\alpha \omega^i. \quad (3.32)$$

Следовательно,  $\{\Lambda_{ab}^\alpha\}$  — тензор, который в общем случае не симметричен по нижним индексам.

Объектом  $\{\Lambda_{ab}^\alpha\}$  охватывается тензор

$$a_{ab}^\alpha = \frac{1}{2} (\Lambda_{ab}^\alpha + \Lambda_{ba}^\alpha), \quad (3.33)$$

симметричный по нижним индексам.

Объект  $\{A_{ab}^\alpha\}$  выбран так, что из компонент  $a_{ab}^\alpha$  можно построить нетривиальный относительный инвариант  $I$  (см. [8]):

$$I = I(a_{ab}^\alpha), \quad (3.34)$$

$$d \ln I = 2(n-r) \omega_a^a - r \omega_\alpha^\alpha + I_i \omega^i. \quad (3.35)$$

Следуя Н. М. Остиану [8], при помощи относительного инварианта  $I$  введем следующий объект:

$$V_\alpha^{ab} = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda_{ab}^\alpha}, \quad (3.36)$$

$$\nabla V_\alpha^{ab} = V_{\alpha i}^{ab} \omega^i, \quad (3.37)$$

компоненты которого симметричны по верхним индексам, т. е.  $V_\alpha^{ab} = V_\alpha^{ba}$  объект  $V_\alpha^{ab}$  связан с компонентами  $\Lambda_{ab}^\alpha$  и  $a_{ab}^\alpha$  следующими соотношениями [8]:

$$V_\alpha^{ab} \Lambda_{ab}^\beta = r \delta_\alpha^\beta, \quad (3.38)$$

$$V_\alpha^{ab} a_{cb}^\alpha = (n-r) \delta_c^a. \quad (3.39)$$

Продолжая (3.32), получаем систему дифференциальных уравнений для компонент  $\Lambda_{abi}^\alpha$ :

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{abi}^\alpha - (\Lambda_{cb}^\alpha \eta_{ai}^\beta + \Lambda_{ac}^\alpha \eta_{bi}^\beta + \Lambda_{ab}^\beta \eta_{ci}^\alpha) \omega_\beta^c - \\ - \Lambda_{cb}^\alpha \omega_{ai}^c - \Lambda_{ac}^\alpha \omega_{bi}^c + \Lambda_{ab}^\beta \omega_{\beta i}^\alpha = \Lambda_{ab i j}^\alpha \omega^j. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Величины

$$T_{a\beta}^\alpha = \xi_{\sigma\alpha}^\alpha \xi_{\beta\sigma}^\alpha - \xi_{\beta\sigma}^\alpha A_{ba}^\alpha \quad (3.41)$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla T_{\alpha\beta}^{\alpha} - A_{ab}^{\alpha}\omega_{\beta}^b + \omega_{\beta a}^{\alpha} = T_{\alpha\beta i}^{\alpha}\omega^i. \quad (3.42)$$

Следовательно, система величин  $\{T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}$  является геометрическим объектом, присоединенным к  $D_n^2$ , причем объект  $\{A_{ab}^{\alpha}\}$  является подобъектом этого объекта.

Введем величины:

$$T_{\beta\gamma}^{\alpha} = \xi_{\sigma(\gamma}^{\alpha} \xi_{\beta)}^{\sigma} - T_{\alpha(\beta}^{\alpha} \xi_{\gamma)}^{\alpha}. \quad (3.43)$$

Непосредственным дифференцированием устанавливаем, что

$$\nabla T_{\beta\gamma}^{\alpha} - T_{\alpha\gamma}^{\alpha}\omega_{\beta}^a - T_{\alpha\beta}^{\alpha}\omega_{\gamma}^a + \omega_{\beta\gamma}^{\alpha} = T_{\beta\gamma i}^{\alpha}\omega^i. \quad (3.44)$$

Следовательно, система величин  $\{T_{\beta\gamma}^{\alpha}, T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}$  также образует геометрический объект, присоединенный к  $D_n^2$ . Геометрические объекты  $\{T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}, \{A_{ab}^{\alpha}\}$  являются его подобъектами.

Поля геометрических объектов  $\{T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}, \{T_{\beta\gamma}^{\alpha}, T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}$  допускают следующее геометрическое истолкование: поле объекта  $\{T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}$  определяет на  $M_n$  распределение  $\bar{\alpha}$  ( $p+r(n+r)$ )-мерных плоскостей, каждый элемент которого принадлежит  $T_x^2(M_n)$ , а геометрический объект  $\{T_{\beta\gamma}^{\alpha}, T_{\alpha\beta}^{\alpha}, A_{ab}^{\alpha}\}$  — распределение  $\bar{\alpha}$  ( $N-(n-r)$ )-мерных линейных элементов, причем  $\alpha_x$  также принадлежит  $T_x^2(M_n)$ . В каждой фиксированной точке  $x \in M_n$   $\bar{\alpha}_x \supset \bar{\alpha}_x \supset \alpha_x$ .

3. При помощи структурных и продолженных структурных объектов второго порядка ( $f\xi_{\sigma}\eta^{\sigma}$ )-структуры на  $M_n$  последовательно определяются новые величины второго порядка:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{abc}^{\alpha} = & \Lambda_{abc}^{\alpha} + \xi_{\beta}^d (\Lambda_{ab}^{\alpha} \eta_{ac}^{\beta} + \Lambda_{ad}^{\alpha} \eta_{bc}^{\beta} + \Lambda_{ab}^{\beta} \eta_{dc}^{\alpha}) - \\ & - \Lambda_{ab}^{\beta} T_{c\beta}^{\alpha} - \Lambda_{ab}^{\beta} A_{ca}^{\alpha} \xi_{\beta}^d, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\nabla \hat{B}_{abc}^{\alpha} - \Lambda_{ab}^{\alpha} \omega_{ac}^d - \Lambda_{aa}^{\alpha} \omega_{bc}^d + \xi_{\beta}^d \Lambda_{ab}^{\alpha} \omega_{ac}^{\beta} + \xi_{\beta}^d \Lambda_{aa}^{\alpha} \omega_{bc}^{\beta} = \hat{B}_{abc i}^{\alpha} \omega^i, \quad (3.46)$$

$$\tilde{B}_{abc}^{\alpha} = \hat{B}_{abc}^{\alpha} - \xi_{\beta}^d (\Lambda_{ab}^{\alpha} A_{ac}^{\beta} + \Lambda_{ad}^{\alpha} A_{bc}^{\beta}), \quad (3.47)$$

$$\nabla \tilde{B}_{abc}^{\alpha} - \Lambda_{ab}^{\alpha} \omega_{ac}^d - \Lambda_{aa}^{\alpha} \omega_{bc}^d - (\Lambda_{ab}^{\alpha} A_{ac}^{\beta} + \Lambda_{ad}^{\alpha} A_{bc}^{\beta}) \omega_{\beta}^d = \tilde{B}_{abc i}^{\alpha} \omega^i, \quad (3.48)$$

$$B_{abc}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\tilde{B}_{a(bc)}^{\alpha} + \tilde{B}_{(c|a|b)}^{\alpha} - \tilde{B}_{(bc)a}^{\alpha}), \quad (3.49)$$

$$\nabla B_{abc}^{\alpha} - a_{ad}^{\alpha} \omega_{bc}^d - a_{ad}^{\alpha} A_{bc}^{\beta} \omega_{\beta}^d = B_{abc i}^{\alpha} \omega^i, \quad (3.50)$$

$$P_{bc}^{\alpha} = -\frac{1}{n-r} B_{abc}^{\alpha} V_{\alpha}^{da}, \quad (3.51)$$

$$\nabla P_{bc}^{\alpha} + A_{bc}^{\alpha} \omega_{\alpha}^a + \omega_{bc}^a = P_{bc i}^{\alpha} \omega^i, \quad (3.52)$$

$$P_{b\alpha}^{\alpha} = \xi_{\sigma b}^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\sigma} - P_{bc}^{\alpha} \xi_{\beta}^c, \quad (3.53)$$

$$\nabla P_{bc}^a - P_{bc}^a \omega_c^\alpha + T_{bc}^\beta \omega_\beta^a + \omega_{bc}^a = P_{bc\alpha}^a \omega^\alpha, \quad (3.54)$$

$$P_{\alpha\beta}^a = \xi_\alpha^a(\alpha \xi_\beta^a) - P_{b(\alpha \xi_\beta^b)}, \quad (3.55)$$

$$\nabla P_{\alpha\beta}^a - P_{b(\beta \omega_\alpha^b)} + T_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^a + \omega_{\alpha\beta}^a = P_{\alpha\beta i}^a \omega^i. \quad (3.56)$$

Величины  $\{P_{bc}^a, A_{bc}^\alpha\}$ ,  $\{P_{bc}^a, P_{bc}^a, A_{bc}^\alpha, T_{bc}^\beta\}$ ,  $\{P_{\alpha\beta}^a, P_{\beta\beta}^a, P_{bc}^a, T_{\alpha\beta}^\gamma, T_{\beta\beta}^\gamma, A_{bc}^\alpha\}$  образуют геометрические объекты, причем:  $\{A_{bc}^\alpha\} \subset \{P_{bc}^a, A_{bc}^\alpha\} \subset \{P_{bc}^a, P_{bc}^a, A_{bc}^\alpha, T_{bc}^\beta\} \subset \{P_{\alpha\beta}^a, P_{\beta\beta}^a, P_{bc}^a, T_{\alpha\beta}^\gamma, T_{\beta\beta}^\gamma, A_{bc}^\alpha\}$ .

Поле геометрического объекта  $\{P_{bc}^a, A_{bc}^\alpha\}$  определяет распределение  $N(p-r)$ -мерных линейных элементов в  $T_x^2(M_n)$ ; поле геометрического объекта  $\{P_{bc}^a, P_{bc}^a, T_{bc}^\beta, A_{bc}^\alpha\}$  — распределение  $\tilde{N}(p+r(n-r))$ -мерных плоскостей, также принадлежащих  $T_x^2(M_n)$ , и поле геометрического объекта  $\{P_{\alpha\beta}^a, P_{\beta\beta}^a, P_{bc}^a, T_{\alpha\beta}^\gamma, T_{\beta\beta}^\gamma, A_{bc}^\alpha\}$  — распределение  $\bar{N}(N-n)$ -мерных плоскостей  $\bar{N}_x$  из  $T_x^2(M_n)$ .

В каждой точке  $x \in M_n$  элемент распределения  $\bar{N}$  не имеет общих направлений с касательной плоскостью  $T_x(M_n)$ , т. е.  $\bar{N}_x \cap T_x(M_n) = \{x\}$ . Следовательно, плоскость  $\mathbb{W}_x$  является для  $T_x(M_n)$  нормально оснащающей плоскостью в  $T_x^2(M_n)$ . Такое оснащение в расслоенных пространствах Ю. Г. Лумисте называется центро-аффинным оснащением [10].

**3. Внутренне определенная аффинная связность на  $M_n$  ( $f\xi_\sigma\eta^\sigma$ ).** Как было отмечено в п. 1, для определения аффинной связности достаточно построить охват объекта  $\Gamma_{ji}^i$ , присоединенного к  $D_n^2$ , компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3.5).

Связность  $\Gamma$  внутренне определяется на дифференцируемом многообразии  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$ , оснащенном дифференциально-геометрической структурой второго порядка со структурным объектом  $\{A_{ab}^\alpha\}$ , если компоненты объекта связности охвачены структурными объектами и их продолжениями, а также объектом  $\{A_{ab}^\alpha\}$ .

В репере  $R_\eta$  дифференциальные уравнения (4.6), с учетом симметрии  $\Gamma_{jl}^i$  по индексам  $j$  и  $l$ , записываются в следующем виде:

$$\nabla \Gamma_{ab}^\alpha + \omega_{ab}^\alpha = \Gamma_{abi}^\alpha \omega^i, \quad (3.57)$$

$$\nabla \Gamma_{\alpha\beta}^a - \Gamma_{ab}^\beta \omega_\beta^b + \omega_{\alpha\beta}^a = \Gamma_{\alpha\beta i}^a \omega^i, \quad (3.58)$$

$$\nabla \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha \omega_\beta^a + \omega_{\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta i}^\alpha \omega^i, \quad (3.59)$$

$$\nabla \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bc}^\alpha \omega_\alpha^a + \omega_{bc}^a = \Gamma_{bc i}^a \omega^i, \quad (3.60)$$

$$\nabla \Gamma_{\beta\beta}^a + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha \omega_\alpha^a - \Gamma_{bc}^\alpha \omega_\beta^c + \omega_{\beta\beta}^a = \Gamma_{\beta\beta i}^a \omega^i, \quad (3.61)$$

$$\nabla \Gamma_{\alpha\beta}^a + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^a - \Gamma_{\beta\beta}^\alpha \omega_\alpha^b - \Gamma_{ab}^\alpha \omega_\beta^b + \omega_{\alpha\beta}^a = \Gamma_{\alpha\beta i}^a \omega^i. \quad (3.62)$$

Следовательно, для построения объекта связности необходимо построить охваты шести систем величин  $\Gamma_{ab}^\alpha$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$ ,  $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ ,  $\Gamma_{bc}^a$ ,  $\Gamma_{\beta\beta}^a$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^a$ , симметричных по нижним индексам, которые удовлетворяют, соответственно, дифференциальным уравнениям (3.57) — (3.62).

В качестве объекта связности  $\Gamma_{ji}^i$  можно принять построенные, ранее охваченные объекты. А именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^\alpha &= A_{ab}^\alpha, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = T_{\alpha\beta}^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = T_{\beta\gamma}^\alpha, \\ \Gamma_{bc}^a &= P_{bc}^a, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = P_{\beta\gamma}^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\beta}^a = \Gamma_{\beta\beta}^a = P_{\beta\beta}^a. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Итак, доказана теорема.

**Теорема 1.** На многообразии  $M_n$  реперированной  $f$ -структуры ранга  $r$ , оснащенном полем геометрического объекта  $\{A_{ab}^a\}$ , во второй дифференциальной окрестности возникает аффинная связность  $\Gamma$  с нулевым тензором кручения, внутренне связанная с этим многообразием.

Почти контактная структура на  $M_n$  ( $n$  — нечетное) является реперированной  $f$ -структурой ранга  $n-1$ . В работе [18] определена внутренним образом симметрическая аффинная связность на многообразии  $M_n$  почти контактной структуры.

**Теорема 2** [18], [19]. На многообразии  $M_n$  ( $n$  — нечетное) почти контактной структуры, оснащенном полем геометрического объекта  $\{A_{ab}^a\}$  ( $a, b, \dots = 1, 2, \dots, r = n-1$ ), присоединенного к  $D_n^2$ , во второй дифференциальной окрестности возникает аффинная связность  $\Gamma$  с нулевым тензором кручения, внутренне связанная с этим многообразием.

В работе [19] даны явные формулы, определяющие компоненты объекта связности  $\Gamma$ .

Так как почти контактная структура является частным классом реперированной  $f$ -структуры, то теорема 1 является обобщением теоремы 2 на случай реперированной  $(f\xi_\sigma\eta^\sigma)$ -структуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский Р. Ф., О неголомомных композициях на поверхности  $M_{n,r}$  в  $R_n$ . Всес. научн. конференции по неевкл. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, Тезисы докл., 1976, 69
2. Евстигук Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1979, 5—246 (РЖМат, 1980, 1A800)
3. Лангев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
4. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. мат. съезда, 1961, Т. 2. Л., Наука, 1964, 226—233 (РЖМат, 1964, 12A391)

5. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. В сб.: «Тр. Геометр. семинара. Т. I (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, 139—190 (РЖМат, 1967, 6A382)
6. —, Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. В сб.: «Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР». М., 1969, 2, 161—178 (РЖМат, 1970, 4A623)
7. —, Распределение касательных элементов. В сб.: «Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР». М., 1971, 3, 29—48 (РЖМат, 1972, 6A685)
8. —, *Остиану Н. М.*, Распределение  $m$ -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. В сб.: «Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ.» М., 1971, 3, 49—94 (РЖМат, 1972, 6A680)
9. —, —,  $(f \xi \eta \rho)$ -структура на дифференцируемых многообразиях. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1975, 5—22 (РЖМат, 1976, 9A622)
10. *Лумисте Ю. Г.*, Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965(1966), вып. 177, 6—42 (РЖМат, 1967, 12A575)
11. *Норден А. П.*, Теория композиций. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 10 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1978, 117—145 (РЖМат, 1979, 5A638)
12. *Остиану Н. М.*, Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1A632)
13. —, *Балазюк Т. Н.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. IV. Подмногообразия коразмерности 1 в многообразиях почти комплексной структуры. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 15 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1983, 96—130 (РЖМат, 1983, 00000)
14. —, *Домбровский Р. Ф., Поляков П. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ, Пробл. геометрии, 1982, 13, 27—76 (РЖМат, 1982, 9A590)
15. —, *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1980, 11, 3—64 (РЖМат, 1980, 11A728)
16. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. М., 1973, 4, 7—70 (РЖМат, 1974, 3A451)
17. *Поляков П. Д.*, Геометрия дифференцируемых многообразий почти контактной структуры. I. ВИНТИ АН СССР. М., 1976, 26 с., библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ, 26 авг. 1976, № 3200—76 Деп) (РЖМат, 1976, 10A417 ДЕП)
18. —, Аффинные связности на почти контактном многообразии. Тезисы докл. Всес. геометр. конференции «150 лет неевклидовой геометрии». Казань, 1976, 168 (РЖМат, 1976, 11A739K)
19. —, Связности на почти контактном многообразии. В сб.: «Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 7. Калининград, 1976, 73—78 (РЖМат, 1977, 3A653)
20. —, Дифференциально-геометрические структуры на почти контактном многообразии. В сб.: «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 113—137 (РЖМат, 1978, 1A639)
21. —, Классификация  $(f \xi \eta \rho)$ -структур. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, М., 1983, 14, 57—72 (РЖМат, 1983, 5A592)
22. *Широков А. П.*, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб.: «Алгебра. Топология. Геометрия, 1967 (Итоги науки. ВИНТИ АН СССР)». М., 1969, 127—188 (РЖМат, 1967, 2A629)

23. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1974, 153—207 (РЖМат, 1974, 11А395)
24. Яно Кентаро, Исихара Сигэру, О структуре  $f$ , удовлетворяющей условию  $f^3 + f = 0$ . Сугару, 1964, 16, № 2, 65—69 (РЖМат, 1965, 11А437)
25. Adati Tyuzi, Kanemaki Shoji, On torsion tensor fields of twisted  $f$ -structures. Tensor, 1976, 30, N 3, 213—218 (РЖМат, 1977, 9А796)
26. Blair D. E., Geometry of manifolds with structural group  $U(n) \times O(s)$ . J. Different. Geom., 1970, 4, N 2, 155—167 (РЖМат, 1971, 4А707)
27. —, Yano Kentaro, Affine almost contact manifolds and  $f$ -manifolds, with affine killing structure tensors. Kodai Math. Semin. Repts, 1971, 23, N 4, 473—479 (РЖМат, 1972, 6А661)
28. Cordero Luis A., Sur une connexion linéaire canonique définie dans une variété douée d'une  $f$ -structure. An. şti. Univ. Iaşi, 1973, Sec. 1a, 19, N 1, 1975, 21, № 3, 271—278 (РЖМат, 1977, 1А665)
29. Gancarzewicz Jacek,  $f$ -structures à noyau parallélisable. C. r. Acad. sci., 1976, 283, N 7, А495—А497 (РЖМат, 1977, 4А707)
30. Goldberg S. I., On the existence of manifolds with an  $f$ -structure. Tensor, 1972, 26, 323—329 (РЖМат, 1974, 2А628)
31. —, Yano Kentaro, On normal globally framed  $f$ -manifolds. Tohoku Math. J., 1970, 22, N 3, 362—370 (РЖМат, 1971, 9А593)
32. —, —, Globally framed  $f$ -manifolds. III. J. Math., 1971, 15, N 3, 456—474 (РЖМат, 1972, 4А792)
33. Ichijyo Yoshihiro, Differentiable manifolds admitting complex distributions. J. Math. Kyoto Univ., 1965, 5, N 1, 67—85 (РЖМат, 1967, 3А430)
34. Ishihara Shigeru, Normal structure  $f$  satisfying  $f^3 + f = 0$ . Kodai Math. Semin. Repts., 1966, 18, N1, 36—47 (РЖМат, 1967, 6А385)
35. —, Yano Kentaro, On integrability conditions of a structure of satisfying  $f^3 + f = 0$ . Quart. J. Math. Oxford, 1964, 15, N 59, 217—222 (РЖМат, 1965, 5А393)
36. Kanemaki Shoji, Twisted  $f$ -structures. I. Tensor, 1973, 27, N 1, 63—69 (РЖМат, 1974, 10А571)
37. —, Twisted  $f$ -structures. II. Tensor, 1973, 27, N 1, 70—72 (РЖМат, 1974, 10А572)
38. Kotô Satoshi, Infinitesimal transformations of a manifold with  $f$ -structure. Kodai Math. Semin. Repts, 1964, 16, N 2, 116—126 (РЖМат, 1965, 3А515)
39. Ludden G. D., Submanifolds of manifolds with an  $f$ -structure. Kodai Math. Semin. Repts, 1969, 21, N 2, 160—166 (РЖМат, 1970, 2А631)
40. Millman R. S.  $f$ -structures with parallelizable kernel on manifolds. J. Different. Geom., 1974, 9, N 4, 531—535 (РЖМат, 1975, 4А758)
41. Mishra R. S., A differentiable manifold with  $f$ -structure of rank  $r$ . Tensor, 1973, 27, N 3, 369—378 (РЖМат, 1974, 4А794)
42. —, Submanifolds of codimension  $m-n$ . Yokohama Math. J., 1975, 23, N 1—2, 91—106 (РЖМат, 1976, 8А872)
43. Moskal E. M., On the tridegree of forms on  $f$ -manifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1977, 28, N 2—3, 115—128 (РЖМат, 1978, 1А636)
44. Nakagawa Hisao,  $f$ -structures induced on submanifolds in spaces, almost hermitian or kaehrlirian. Kodai Math. Semin. Repts, 1968, 18, N 2, 161—183 (РЖМат, 1967, 6А386)
45. —, On framed  $f$ -manifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1966, 18, N 4, 293—306 (РЖМат, 1968, 2А588)
46. Ogata Takehide, A remark on  $f$ -manifolds. Mem. Fac. Sci. Kyushi Univ., 1969, А23, N 2, 79—83 (РЖМат, 1971, 1А616)
47. Okumura Masafumi, Submanifolds with  $L$ -flat normal connection of the complex projective space. Pacif. J. Math., 1978, 78, N 2, 447—454 (РЖМат, 1979, 6А569)
48. Petre S. Some properties of the  $F$ -structure. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1975(1977), 10, N 3—4, 371—374 (РЖМат, 1978, 1А638)

49. *Prakash Nirmala*, Period matrix domains of a quasi-symplectic manifold. Indian J. Pure and Appl. Math., 1975, 6, N 6, 604—613 (PJKMar, 1978, 8A689)
  50. —, *Sneh L.*, Generalised exterior-derivations in framed manifolds. Indian J. Pure and Appl. Math., 1977, 8, N 10, 1193—1204 (PJKMar, 1980, 1A805)
  51. *Rathore M. P. S., Mishra R. S.*, On framed metric submanifolds. Yokohama Math. J., 1976, 24, N 1—2, 13—20 (PJKMar, 1977, 8A679)
  52. —, *Pal S.*, On framed manifolds with a specified affine connexion. Istanbul univ. Fen. fak. mecm. Rev. fac. Sci. Univ. Istanbul. 1978(1975), 440, 59—66 (PJKMar, 1979, 2A587)
  53. *Sasagawa Hiroshi*, The  $f$ -structure induced on the submanifold of on O-space. Res. Repts. Nagaoka Tech. Coll., 1966, 2, N 3, 183—201 (PJKMar, 1967, 4A521)
  54. *Singh K. D., Singh Rakeshwar*, Some  $f(3, \epsilon)$ -structure manifolds. Demonstr. math., 1977, 10, N 3—4, 637—645 (PJKMar, 1978, 10A551)
  55. —, *Srivastava Nilma*, On some  $f$ -structure manifolds with torsion. Demonstr. math., 1974, 7, N 2, 183—196 (PJKMar, 1975, 2A714)
  56. *Stong R. E.*, The rank of au  $f$ -structure. Kodai Math. Semin. Repts, 1977, 24, N 1—2, 207—209 (PJKMar, 1978, 8A687)
  57. *Subhash Prabha, Nirmala Prakash*, Some transformations in a pseudo-manifold with  $(f_r, g)$ -structure. Tensor, 1969, 20, N 3, 310—314 (PJKMar, 1970, 4A636)
  58. *Taketa Hiroshige*, Note on the rank of  $f$ -structure. Tensor, 1972, 23, N 2, 197—198 (PJKMar, 1973, 1A677)
  59. *Tong-van-Duc*. Sur les structures définies par une 1-forme vectorielle  $F$  telle que  $F^3 = \pm F$ . Kodai Math. Semin. Repts, 1973, 25, N 3, 367—376 (PJKMar, 1974, 4A547)
  60. *Upadhyay M. D., Dube K. K.*, Study of  $F$ -structure manifold defined by  $f^3 + f = 0$ . Acta mex. cienc. y technol., 1974, 8, N 1—3, 11—18 (PJKMar, 1978, 1A738)
  61. *Vaisman Izu*, Connexions remarquables, sur les variétés hor-ehresmanniennes. C. r. Acad. sci., 1971, 273, N 25, A1253—A1256 (PJKMar, 1972, 6A663)
  62. *Vanhecke L.*, Two theorems on tensor fields with applications to metric  $f$ -structures. J. London Math. Soc., 1976, 13, N 3, 507—512 (PJKMar, 1977, 3A668)
  63. *Vanzura Jiri*, Almost  $r$ -contact structures. Ann. Sci. fis. e mat., 1972, 26, N 1, 97—115 (PJKMar, 1973, 2A589)
  64. *Vohra U. C., Singh K. D.*, Some structures on an  $f$ -structures manifold. Ann. Pol. math., 1972, 27, N 1, 85—91 (PJKMar, 1973, 6A744)
  65. *Yano K.*, On a structure  $f$  satisfying  $f^3 + f = 0$ . Technical Report, 1961, N 12, Univ. Washington
  66. —, On a structure defined by a tensor field  $f$  of type (1.1) satisfying  $f^3 + f = 0$ . Tensor, 1963, 14, 99—109 (PJKMar, 1965, 10A436)
  67. —, Invariant submanifolds of an  $f$ -manifolds with complemented frames. Kodai Math. Semin. Repts, 1973, 25, N 2, 163—174 (PJKMar, 1974, 2A616)
  68. —, *Ishihara Shigeru*, Structure defines by  $F$  satisfying  $F^3 + F = 0$ . Proc. U. S. — Japan Seminar Different. Geometry, Kyoto, 1965. Tokyo, Nippon Hyoronsha Co., Ltd, 1966, 153—166 (PJKMar, 1967, 8A446)
  69. —, —, The  $f$ -structure induced on submanifolds of complex almost complex spaces. Kodai. Math. Semin. Repts, 1966, 18, N 2, 120—160 (PJKMar, 1967, 12A617)
-