

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ,
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ МЕРЫ НА ПРОЕКТОРАХ

В заметке приводится подробное изложение результата, анонсированного в [2].

Пусть H - сепарабельное Гильбертово пространство ($\dim H \geq 3$), B^n - класс всех ортопроекторов в H , m - неограниченная σ -конечная мера на B^n , т. е. функция $m: B^n \rightarrow [0, +\infty]$, такая, что

(i) $p = p_1 + p_2 + \dots$ ($p_i p_j = 0, i \neq j$) влечет $m(p) = \sum_{i=1}^{\infty} m(p_i)$

(ii) $m(I) = +\infty$ (неограниченность),
(iii) существует последовательность $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ попарно ортогональных проекторов, такая, что $m(p_i) < +\infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = I$ (σ - конечность).

Описание таких мер получено в [3].

1. Теорема. Пусть $m: B^n \rightarrow [0, +\infty]$ - произвольная σ -конечная мера. Тогда существует и определена однозначно положительная билинейная форма t такая, что

$$(1) \quad m(p) = \begin{cases} \tau_0(t \circ p), & \text{если } t \circ p \in \mathcal{J}_1, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Здесь \mathcal{J}_1 - класс ядерных операторов в H , $t \circ p$ - билинейная форма, определенная равенством $t \circ p(f, f) = t(pf, pf)$ ($f \in H$), τ_0 - стандартный след на алгебре B всех линейных ограниченных операторов, действующих в H . Запись $t \circ p \in \mathcal{J}_1$ означает, что билинейная форма $t \circ p$ определяется ядерным оператором).

Характеризация билинейных форм, определяющих с помощью формулы (1) меры на проекторах, будет получена на основе теоремы, доказанной в [4]:

2. Теорема. Пусть t - ненулевая сингулярная билинейная форма. Тогда функция $m: B^n \rightarrow [0, +\infty]$, заданная формулой (1), не является мерой.

Напомним, что сингулярной мы называем положительную билинейную форму, не мажорирующую никакую ненулевую замыкаемую положительную билинейную форму. Мы будем в

дальнейшем использовать разложение Саймона [7] произвольной положительной билинейной формы $t = t_r + t_s$,

где t_r - наибольшая замыкаемая положительная билинейная форма, мажорируемая формой t (регулярная компонента t), а $t_s = t - t_r$ (сингулярная компонента t).

Из теоремы Глисона [6] и теоремы 2 вытекает

3. Следствие. Если t - положительная билинейная форма такая, что формула (1) определяет неограниченную меру, то $t_r \notin \mathcal{R}_1$ (т. е. замыкание регулярной компоненты t не может определяться ядерным оператором).

Для доказательства теоремы о характеристизации билинейных форм, определяющих меры, нам понадобится следующая

4. Лемма. Пусть t - замкнутая положительная билинейная форма, и в H существует ортонормированный базис $(e_i)_i \subset \mathcal{D}(t)$ такой, что $\sum_i t(e_i, e_i) < +\infty$.

Тогда t ядерна.

Доказательство. По теореме Като [1] существует оператор $T \geq 0$ такой, что $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(T^{1/2})$ и

$$t(f, g) = (T^{1/2}f, T^{1/2}g) \quad (f, g \in \mathcal{D}(t)).$$

Покажем, что оператор T ограничен. Пусть $\sum_i t(e_i, e_i) = C$ и $f \in \mathcal{D}(t)$ произволен. Тогда

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \sum_i |(Tf, e_i)|^2 = \sum_i |(T^{1/2}f, T^{1/2}e_i)|^2 = \\ &= \sum_i |t(f, e_i)|^2 \leq \sum_i t(f, f) \cdot t(e_i, e_i) = \\ &= C \|T^{1/2}f\|^2 = C (Tf, f) \leq \|Tf\| \|f\|, \end{aligned}$$

откуда $\|Tf\| \leq C \|f\|$. Таким образом, оператор T , а вместе с ним и $T^{1/2}$, ограничен. Так как t замкнута, отсюда следует, что $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(T^{1/2}) = H$ и, следовательно, $t \in \mathcal{R}_1$. Лемма доказана.

5. Теорема. Положительная билинейная форма t определяет с помощью формулы (1) σ -конечную меру на B^n тогда и только тогда, когда

$$(2) \forall p \in B^n (\text{top} \notin \gamma_1 \Rightarrow \overline{(\text{top})_z} \notin \gamma_1).$$

Доказательство. Пусть отображение, заданное формулой (1), является мерой. Пусть $\text{top} \notin \gamma_1$ для некоторого $p \in B^n$. Возможны два случая.

Случай 1: $p \in H \cap \mathcal{D}(t)$ плотно в pH . Тогда $m_p = m|_{(B(pH))^n}$ - неограниченная σ -конечная мера на $(B(pH))^n$. Следовательно, по теореме 1 m_p определяется некоторой положительной билинейной формой a плотно заданной в pH ($\mathcal{D}(a) = pH \cap \mathcal{D}(t)$). При этом для $f \in \mathcal{D}(a)$, $\|f\| = 1$:

$$a(f, f) = m_p(p_f) = m(p_f) = t(f, f) = \text{top}(f, f).$$

Таким образом, $a = \text{top}|_{\mathcal{D}(a)}$. Согласно следствию 3 $\overline{a_z} \notin \gamma_1$. Отсюда $\overline{(\text{top})_z} \notin \gamma_1$.

Случай 2: $pH \cap \mathcal{D}(t)$ не плотно в pH . В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{(\text{top})_z}) &= \mathcal{D}(\text{top}) - \{f \in H \mid p_f \in \mathcal{D}(t)\} = \\ &= [pH \cap \mathcal{D}(t)] \oplus (1-p)H \end{aligned}$$

- линейал не плотный в H . Следовательно, $\overline{(\text{top})_z}$ - не плотно задана в H , так что $\overline{(\text{top})_z} \notin \gamma_1$. Таким образом, необходимость доказана.

Переходим к доказательству достаточности. Пусть выполнено условие (2) и отображение m определено формулой (1). Пусть $p = p_1 + p_2 + \dots$ ($p, p_k \in B^n$, $p_i p_j = 0$, $i \neq j$). Требуется доказать, что

$$(3) \quad m(p) = \sum_{k=1}^{\infty} m(p_k).$$

Возможны три случая.

Случай 1: $\text{top} \in \gamma_1$. Равенство (3) следует из теоремы 2 [5].

Случай 2: $\text{top} \notin \gamma_1$, существует K_0 такое, что $m(p_k) = +\infty$. Равенство (3), очевидно, справедливо.

Случай 3: $\text{top} \notin \gamma_1$, причем $m(p_k) < +\infty$ для любого k . Предположим, напротив, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(p_k) < +\infty$. Пусть $(f_i^k)_i$ - ортонормированный базис в $p_k H$ для

каждого K . Тогда $(\varphi_i^K)_{i,K}$ - ортонормированный базис в ρH . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i,K} \overline{(t \circ p)_\tau(\varphi_i^K, \varphi_i^K)} &= \sum_{i,K} (t \circ p)_\tau(\varphi_i^K, \varphi_i^K) \leq \\ &\leq \sum_{i,K} t \circ p(\varphi_i^K, \varphi_i^K) = \sum_{K=1}^{\infty} \sum_i t \circ p_K(\varphi_i^K, \varphi_i^K) = \\ &= \sum_{K=1}^{\infty} m(p_K) < +\infty. \end{aligned}$$

По лемме 4 билинейная форма $\overline{(t \circ p)_\tau} \in \delta_1$, что противоречит условию (2). Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. - 740 с.
2. Луговая Г. Д. Билинейные формы, определяющие меры на проекторах. - Изв. вузов. Математика, 1983, № 2, с. 88.
3. Луговая Г. Д., Шерстнев А. Н. О теореме Глисона для неограниченных мер. - Изв. вузов. Математика, 1980, № 12, с. 30 - 32.
4. Луговая Г. Д. О строении неограниченных мер на проекторах гильбертова пространства. - В сб.: Исслед. по прикл. матем., вып. 10, Изд-во Казанск. ун-та, 1984, с. 202 - 205.
5. Шерстнев А. Н. О представлении мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта, билинейными формами. - Изв. вузов. Математика, 1970, № 9, с. 90 - 97.
6. Gleason A.M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. - J. Math. and Mech., 1957, v.6, no.6, p.885-893.
7. Simon B. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. - J. Funct. Anal., 1978, v.28, no.3, p.377-385.