А. А. Фонарев, О приближенных решениях уравнения типа Гаммерштейна, *Сиб. матем. журн.*, 1980, том 21, номер 1, 226–228

Замечание 3. Предположим, что вместо (1) задано уравнение

$$A_n x = f,$$

где $D(A_n) \subset D(A)$, $\forall n > 0$, $\|A_n x - Ax\| \leqslant h_n$, $\forall x \in D(A_n)$, и пусть существует последовательность $l_n > 0$, $l_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} l_n h_n < \infty$.

Предполагая разрешимыми уравнения

$$l_n(A_n x - f) + x = x_{n-1}$$

при всех $n > 0$, можно установить справедливость теоремы 1 и для этого случая.

Замечание 4. Метод итераций удобно применять для уточнения решения, полученного, например, по методу (2).

Горький,
Радиофизический
научно-исследовательский институт

Статья поступила
10 февраля 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., «Наука», 1972.
[2] *Reich S.* Approximating zeros of accretive operatops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 51, № 2, 381—384.
[3] *Альбер Я. И.* О решении методом регуляризации операторных уравнений с аккретивными операторами в банаховом пространстве.— Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 12, 2242—2248.
[4] *Rockafellar R. T.* Monotone operators and the proximal point algorithm.— SIAM, J. Contr. and Optim., 1976, 14, № 5, 877—898.
[5] *Кряжев А. В.* Итерационный метод решения некорректных задач.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 1, 25—35.

УДК 518 : 517.948

А. А. ФОНАРЕВ

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

В ([1]) рассмотрена регуляризация нелинейного уравнения с монотонным отображением в банаховом пространстве, но результаты работы ([1]) неприменимы к уравнению типа Гаммерштейна. В данной заметке рассматривается регуляризация уравнения типа Гаммерштейна в гильбертовом пространстве и показывается, что при наличии решения исходного уравнения последовательность решений регуляризованных уравнений компактна, причем все ее предельные точки являются решениями исходного уравнения.

Далее будем придерживаться терминологии из ([2]).

Для уравнения типа Гаммерштейна

$$u + BF(u) = 0 \quad (u \in H), \tag{1}$$

где F — монотонное хеминепрерывное отображение из вещественного гильбертова пространства H в H, B — линейный ограниченный и положительный оператор из H в H, рассмотрим регуляризованные уравнения

$$u+B_nF(u)=0 \quad (u\in H), \tag{2}$$

где $B_nx=\alpha_nx+Bx$ для $x\in H$ и параметр регуляризации $\alpha_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Везде далее условия, наложенные на F, B в уравнении (1) и α_n в уравнении (2), не будем оговаривать.

Теорема 1. *Для любого фиксированного n уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Зафиксируем n и рассмотрим отображение $\psi_n(x)=B_n^*x+B_nF(B_n^*x)$ из H в H (B_n^* — оператор, сопряженный B_n). Имеем $(\psi_n(x)-\psi_n(y),\ x-y)\geqslant\alpha_n\|x-y\|^2$ для всех x, $y\in H$. Отсюда и из ([2], с. 263) следует, что уравнение $\psi_n(x)=0$ $(x\in H)$ имеет единственное решение $x_n\in H$. Значит, уравнение (2) имеет решение $u_n=B_n^*x_n$ и это решение единственно, ибо оператор B_n обратим. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение. Тогда последовательность $\{u_n\}$ решений уравнений* (2) *компактна и любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$ сходится к некоторому решению уравнения* (1).

Доказательство. Пусть $u_0\in H$ есть решение уравнения (1). Для последовательности $\{u_n\}$ решений уравнений (2) и u_0 имеем

$$u_n-u_0+BF(u_n)-BF(u_0)+\alpha_nF(u_n)=0 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям равенств (3) функционалы $F(u_n)-F(u_0)$, получим $(-\alpha_nF(u_n),\ F(u_n)-F(u_0))\geqslant 0$, что влечет

$$\|F(u_0)\|\geqslant\|F(u_n)\| \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Отсюда и из $u_n+B_nF(u_n)=0$ $(n=1, 2, \ldots)$ следует, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена. Из произвольной подпоследовательности последовательности $\{u_n\}$ выделим подпоследовательность $\{u_{n_i}\}$ такую, что последовательности $\{u_{n_i}\}$ и $\{F(u_{n_i})\}$ слабо сходятся соответственно к u' и z'. Тогда из $u_{n_i}+B_{n_i}F(u_{n_i})=0$ при $i\to\infty$ имеем

$$u'+Bz'=0. \tag{5}$$

Покажем, что $z'=F(u')$.

Для любого $u\in H$ имеем $(F(u)-F(u_{n_i}),\ u-u_{n_i})\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что $(F(u),\ u-u_{n_i})-(F(u_{n_i}),\ u)\geqslant(F(u_{n_i}),\ BF(u_{n_i}))+(F(u_{n_i}),\ \alpha_{n_i}F(u_{n_i}))$ $(i=1, 2, \ldots)$. Переходя в последних неравенствах к пределу по нижнему пределу последовательности $(BF(u_{n_i}),\ F(u_{n_i}))$, имеем $(F(u),\ u-u')-(z',\ u)\geqslant(z',\ Bz')$, что вместе с (5) влечет $(F(u)-z',\ u-u')\geqslant 0$ для всех $u\in H$. Отсюда по лемме 18.1 из ([2]) имеем $F(u')=z'$. Следовательно, $u'+BF(u')=0$.

Взяв в (4) $u_0=u'$, имеем $\|F(u')\|\geqslant\|F(u_{n_i})\|$ $(i=1, 2, \ldots)$. Но $F(u_{n_i})$ сходится слабо к $F(u')$ при $i\to\infty$; следовательно, $\|F(u_{n_i})\|\to\|F(u')\|$ при $i\to\infty$. Значит, $F(u_{n_i})\to F(u')$ при $i\to\infty$. Но тогда $B_{n_i}F(u_{n_i})\to BF(u')$ при $i\to\infty$, что влечет сходимость u_{n_i} к u' при $i\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение $u_0\in H$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ решений уравнений* (2) *сходится к u_0.*

Замечание 1. Если H — сепарабельное гильбертово пространство с ортогональным базисом φ_1, φ_2, …; P_m — оператор ортогонального проектирования H на H_m (H_m — подпространство H, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$); отображение F из H в H непрерывно, то для фиксированного n последовательность $x_m \in H_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) решений галеркинских уравнений $x + P_m B_n P_m F(x) = 0$ ($x \in H_m$) уравнения (2) сходится к решению уравнения (2).

Замечание 1 следует из неравенств $\|P_m B_n P_m F(P_m x_0) - B_n F(x_0)\| + \|P_m x_0 - x_0\| \geqslant \alpha_n \|P_m(F(x_m) - F(P_m x_0))\|$ ($m = 1, 2, \ldots$), где x_0 — решение уравнения (2).

Автор благодарен В. А. Треногину за внимание к работе.

Москва,
Московский институт стали и сплавов

Статья поступила
27 июня 1978 г.

УДК 517.11

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Альбер Я. И.* О решении нелинейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве.— Сиб. мат. ж., 1975, 16, № 1, 3—11.
[2] *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., «Наука», 1972.

А. Д. ТАЙМАНОВ, Ю. И. ХМЕЛЕВСКИЙ

РАЗРЕШИМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

В ([1]) Г. С. Маканин доказал следующее.

Теорема. *Существует алгоритм, который по всякому уравнению в свободной полугруппе S указывает, имеет оно решения или нет.*

Из этой теоремы вытекает ряд следствий, не отмеченных в ([1]). Поскольку эти следствия представляют самостоятельный интерес, мы сформулируем их в виде отдельных теорем.

Теорема 1. *Существует алгоритм, который по всякой системе уравнений и неравенств в свободной полугруппе указывает, имеет она решения или нет.*

Теорема 2. *Существует алгоритм, который по любым двум системам уравнений и неравенств в свободной полугруппе указывает, эквивалентны они или нет.*

Теорема 3. *Универсальная теория любой свободной полугруппы разрешима.*

Поскольку теоремы 1, 2 содержатся в теореме 3, достаточно установить справедливость последней теоремы. Эта теорема получается из теоремы Маканина с помощью следующих рассуждений.

Ниже слово «формула» означает произвольную формулу, полученную из уравнений в S с помощью связок $\& \vee \neg$ и кванторов $\exists\forall$.

Назовем $\exists^+$ формулой всякую формулу, полученную из уравнений в S с помощью связок $\&\vee$ и квантора $\exists$.

Лемма 1. *Можно указать $\exists^+$ формулу $\Phi(x, y)$ с двумя свободными переменными x, y такую, что $\Phi(x, y)$ истинно в S тогда и только тогда, когда $x \neq y$ в S.*