А. А. Пожарский, Об операторах типа Ванье–Штарка с сингулярными потенциалами,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 1, 158–193

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 1

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ВАНЬЕ–ШТАРКА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

© А. А. Пожарский

Введение

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера

$$-\psi'' - Fx\psi + p(x)\psi = E\psi \tag{1}$$

на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$. Будем считать, что потенциал $p(x)$ — вещественная периодическая функция

$$p(x+1) = p(x),$$

удовлетворяющая условию

$$p(x) \in L_1[0,1].$$

Для упрощения формул будем предполагать, что постоянна $F > 0$ и

$$\int\limits_0^1 p(x)\,dx = 0;$$

последнего всегда можно добиться сдвигом спектрального параметра E.

Введем оператор

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - Fx + p(x) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}_+)$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ \varphi : \begin{array}{l} \varphi' \text{ — абсолютно непрерывна, } \varphi(0) = 0, \\ \operatorname{supp}\varphi \text{ — ограничен, } -\varphi'' + p\varphi \in L_2(\mathbb{R}_+). \end{array} \right\}$$

Замечание. Функция $-\varphi'' + p(x)\varphi$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $\varphi \in \mathrm{Dom}(H)$, но φ'' и $p\varphi$ по отдельности не обязательно принадлежат $L_2(\mathbb{R}_+)$. Однако они принадлежат $L_1(\mathbb{R}_+)$.

Несложно видеть, что H — существенно самосопряженный оператор. Этот факт может быть доказан теми же методами, что и теорема Титчмарша о существенной самосопряженности оператора

$$H_T = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{Dom}(H_T) = \{\varphi : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\},$$

где $q(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $q(x) \geqslant -Ax^2 + B$ для некоторых $A > 0$ и B [9]. В дальнейшем под оператором, заданным уравнением (1), мы будем понимать самосопряженный оператор $\overline{H}$.

Поскольку спектр $\overline{H}$ лежит на вещественной оси, то на протяжении всей работы будем рассматривать только вещественные значения параметра E.

Если потенциал $p(x)$ является гладким, то природа спектра уравнения (1) хорошо изучена [1–3, 10, 11, 18]. Например, известно, что если $p(x)$ имеет две непрерывные производные, то уравнение (1) имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий всю вещественную ось. Однако если потенциал $p(x)$ не является гладким, то вопрос о природе спектра до сих пор остается открытым, имеются лишь некоторые частные результаты [14, 15].

Исходной для нас была работа В. С. Буслаева [12], посвященная изучению уравнения (1) с потенциалом

$$p(x) = V \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - n), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В этой работе был предложен метод исследования асимптотического поведения решений уравнения (1) для сингулярного потенциала (2).

Идея этого метода такова. Сделаем сначала следующее наблюдение. Для этого заменим в уравнении (1) сумму $E + Fx$ на $\mathcal{E}$ и забудем на некоторое время, что $\mathcal{E}$ зависит от x. В результате мы получим периодическое уравнение

$$-\psi'' + p(x)\psi = \mathcal{E}\psi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Мы рассматриваем последнее уравнение на всей оси, чтобы не обсуждать дискретный спектр, который может появиться в случае уравнения на полуоси. Далекие лакуны в спектре чисто периодического уравнения располагаются около точек $\mathcal{E} = (\pi l)^2$. Как известно, решения уравнения (3) ведут себя существенно по-разному, когда $\mathcal{E}$ лежит в лакуне или на спектре соответствующего оператора. Поэтому можно ожидать, что точки поворота $\tilde{n}_l$, удовлетворяющие уравнению $E + F\tilde{n}_l = (\pi l)^2$, $l \in \mathbb{N}$, играют особую роль при изучении асимптотического поведения решений уравнения (1).

Вне окрестностей порядка $l^{2/3}$ точек поворота $\tilde{n}_l$ — на интервалах $I_l \subset (\tilde{n}_{l-1}, \tilde{n}_l)$ можно найти асимптотическое поведение решений уравнения (1):

$$\psi(x) = \frac{s_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + \frac{t_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + O\left(\frac{\sqrt{s_l^2 + t_l^2}}{\sqrt{x}}\right),$$
$$x \in I_l, \quad x \to +\infty. \qquad (4)$$

Вместе с этим можно найти асимптотическое поведение решений в окрестностях точек поворота $\tilde{n}_l$. Благодаря этому устанавливается связь между коэффициентами s_l, t_l и s_{l+1}, t_{l+1}, описывающими решение ψ. Эта связь задается преобразованием вида

$$\mathrm{s}_{l+1} = W_l \mathrm{s}_l, \quad \mathrm{s}_l = \begin{pmatrix} s_l \\ t_l \end{pmatrix}, \quad l \in \mathbb{N}, \qquad (5)$$

где

$$W_l = e^{-i\Gamma_l\sigma_3} S_l e^{i\Gamma_l\sigma_3}, \quad \Gamma_l = -\frac{1}{3F}(\pi l)^3 + \pi l\frac{E}{F}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица S_l имеет при больших l асимптотику

$$S_l = \begin{pmatrix} 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) & r(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d_l) \\ \bar{r}(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d_l) & 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) \end{pmatrix}.$$

Здесь r, ω, q и d определены формулами

$$r(l) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2F}} \int_0^1 p(t)e^{-2i\pi lt}\,dt\,, \quad \omega(l) = \int_0^1 \int_0^t p(y)p(t)e^{2i\pi lt}\,dy\,dt,$$

$$q(l) = \frac{1}{2}|r(l)|^2, \quad d_l = |r(l)| + |\omega(l)| + l^{-1/3}.$$

Отметим, что матрицы S_l, вообще говоря, зависят от параметров E и F.

Напомним два определения из теории меры, которые нам понадобятся в дальнейшем. Меру Лебега измеримого множества M обозначим через $\mathrm{mes}(M)$.

Определение 1. Множество M называют существенным носителем борелевской меры ν на $\mathbb{R}$, если

1) $\nu(\mathbb{R}\setminus M)=0$,

2) $\forall\ M_1\subset M,\ \nu(M_1)=0 \implies \operatorname{mes}(M_1)=0$.

Определение 2. Существенным замыканием множества M называют множество

$$\overline{M}^{\,\mathrm{ess}} \overset{\mathrm{def}}{=} \big\{x : \forall\ \varepsilon>0\ \operatorname{mes}\big(M\cap\{\varepsilon\text{-окрестность } x\}\big)>0\big\}.$$

Существенное значение для нас имеют результаты работы [16], которые мы сформулируем применительно к уравнению (1).

Определение 3. Решение $\psi^u(x)$ уравнения (1) называют подчиненным на $+\infty$, если для любого линейно-независимого с ним решения $\psi(x)$ верно

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x}|\psi^u(t)|^2\,dt}{\int_{x_0}^{x}|\psi(t)|^2\,dt}=0.$$

Пусть μ — спектральная мера оператора, заданного уравнением (1). Абсолютно непрерывный спектр этого оператора обозначим через $\sigma_{\mathrm{ac}}(1)$. Необходимое нам утверждение из статьи [16] может быть сформулировано следующим образом.

Теорема GP. *Пусть*

$$M_{\mathrm{ac}}=\{E : \textit{не существует подчиненного решения уравнения } (1) \textit{ на } +\infty\}.$$

Тогда M_{ac} — существенный носитель абсолютно непрерывной компоненты меры μ. При этом

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(1)=\overline{M}_{\mathrm{ac}}^{\,\mathrm{ess}}.$$

Если, кроме того, $M_{\mathrm{ac}}=\mathbb{R}$, то спектр (1) чисто абсолютно непрерывен.

Используя формулу (4), можно показать, что при больших l

$$\int\limits_{\tilde n_{l-1}}^{\tilde n_l} |\ \psi(x)\ |^2\ dx=\frac{2\pi}{F}\|s_l\|^2\big(1+o(1)\big).$$

Последнее соотношение вместе с теоремой GP позволяют описать спектральные свойства уравнения (1) в терминах системы (5). Для удобства этого описания введем следующие определения.

Определение 4. Решение s_l^u системы (5) называют подчиненным, если для любого линейно независимого с ним решения s_l верно

$$\lim_{L\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{L}\|\mathrm{s}_l^u\|^2\Big/\sum_{l=1}^{L}\|\mathrm{s}_l\|^2\right)=0.$$

Определение 5. Существенным носителем абсолютно непрерывного спектра системы (5) называют множество

$$X_{\mathrm{ac}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{E : \textit{не существует подчиненного решения системы } (5)\}.$$

Абсолютно непрерывным спектром системы (5) называют множество

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(5) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{X}_{\mathrm{ac}}^{\mathrm{ess}}.$$

Сразу обратим внимание на то, что два последних определения даны таким образом, чтобы существенные носители X_{ac} и M_{ac} абсолютно непрерывных спектров (1) и (5) совпали. Это следует из связи между поведениями решений задач (1) и (5) на бесконечности. Доказательство этого факта приводится во второй главе.

Отметим, что есть аналогия между системой (5) и уравнением

$$-\psi''+g(x)\psi=E\psi,\quad x\in\mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где $g\in L_2(\mathbb{R}_+)$. При этом аналогом потенциала g должны служить матрицы S_l-I.

Говорить о спектре уравнения (6) или системы (5) можно, лишь фиксировав дополнительное условие, например граничное условие при $x=0$ и начальное условие при $l=1$ соответственно. Однако мы будем изучать абсолютно непрерывный спектр (5) и (6), а, как известно, граничное условие влияет только на сингулярную часть спектра. Поэтому в дальнейшем мы не будем фиксировать никакие дополнительные граничные условия, изучая лишь поведение решений на бесконечности.

Хорошо известно, что в случае абсолютно интегрируемых потенциалов g:

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt<\infty,$$

абсолютно непрерывный спектр уравнения (6), далее $\sigma_{ac}(6)$, совпадает с $[0,\infty)$. При этом сингулярный (дискретный) спектр сосредоточен на $(-\infty,0)$ [8]. Аналог этого утверждения справедлив для (1) и (5). При этом мы сопоставляем спектры, расположенные на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$ для (6) и (1), (5) соответственно. Именно если коэффициенты $r(l)$ и $\omega(l)$ удовлетворяют предположению:

Предположение (A).

$$\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-1/2} < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty,$$

то спектры задач (1) и (5) — абсолютно непрерывны и заполняют всю вещественную ось. Доказательство этого факта приводится в гл. 2. Заметим, что из предположения (A) следует сходимость ряда:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|S_l - I\|.$$

Подобная аналогия есть и в случае медленно убывающих потенциалов. Например, если $|g(x)| \leqslant Cx^{-3/4-\varepsilon}$, то $\sigma_{ac}(6) = [0,\infty)$ [17]. В настоящей работе доказано, что для потенциалов $p(x)$, удовлетворяющих предположению:

Предположение (B).

$$\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)|^2 l^{-1/2} < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-3/4} < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty,$$

абсолютно непрерывные спектры $\sigma_{ac}(1)$ и $\sigma_{ac}(5)$ совпадают с $\mathbb{R}$. Подчеркнем, что в последнем утверждении нет никакой информации о сингулярном спектре (1).

Результат из [17] усилен в [13]: если $g \in L_2(\mathbb{R}_+)$, то $\sigma_{ac}(6) = [0,\infty)$. Можно предположить, что аналог последнего утверждения справедлив для (1) и (5). Именно если

$$\sum_{l \geqslant 1} |r(l)|^2 l^{-1} < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty,$$

то $\sigma_{ac}(1) = \sigma_{ac}(5) = \mathbb{R}$. Подчеркнем, что последнее утверждение является гипотезой.

Справедливо следующее утверждение о точечном спектре $\sigma_p(6)$ [5]. Если

$$\int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x |g(t)|\, dt\Big)\, dx = \infty$$

для некоторого λ, то $[\lambda, \infty) \cap \sigma_p(6) = \varnothing$. В настоящей работе доказано, что для потенциалов $p(x)$, удовлетворяющих одновременно двум предположениям:

Предположение (C).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-2\sum_{l=1}^{k} |r(l)| l^{-1/2}\Big) = \infty,$$

Предположение (D).

$$\sum_{l=1}^{\infty} |r(l)| l^{-1} < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |\omega(l)| l^{-1} < \infty,$$

точечный спектр $\sigma_p(1)$ пуст.

Настоящая работа состоит из двух глав. Первая содержит формулировку и полное доказательство теоремы 6 об асимптотическом поведении при $x \to +\infty$ решений уравнения (1). Краткий вариант этой главы, содержащий описание основных результатов, опубликован ранее в [7]. Во второй главе устанавливается связь между спектральными свойствами уравнения (1) и системы (5). В последних двух параграфах этой главы изложен метод исследования асимптотических свойств решений системы (5), благодаря чему устанавливаются спектральные свойства уравнения (1) (см. теоремы 14–16).

Благодарность. Автор выражает благодарность В.С.Буслаеву за постановку задачи и многочисленные консультации по данной тематике.

Глава 1. Асимптотическое поведение решений уравнения Шрёдингера

§1.1. Адиабатическое решение

Этот параграф посвящен описанию асимптотик при $x \to +\infty$ решений уравнения (1) вне малых окрестностей точек поворота. Возможность асимптотического описания решений основана на адиабатических соображениях. Мы следуем здесь [4, 12].

Введем специальный базис решений основного уравнения

$$-\psi'' - Fx\psi + p(x)\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

Пусть $\theta(x, E)$ и $\varphi(x, E)$ — такие решения уравнения (1.1.1), что

$$\begin{cases} \theta(0, E) = 1, \\ \theta'(0, E) = iE^{1/2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(0, E) = iE^{-1/2}, \\ \varphi'(0, E) = 1, \end{cases} \quad E > 0.$$

Отметим, что решения $\theta(x,E)$ и $\varphi(x,E)$ определены при положительных значениях параметра E. При этом для любого вещественного E определены решения $\theta(x-n, E+Fn)$ и $\varphi(x-n, E+Fn)$ уравнения (1.1.1), заданные при достаточно больших целых n: $n > \max(-E/F, 0)$. Поскольку мы изучаем поведение решений на бесконечности, то будем предполагать, что $n > \max(-E/F, 0)$. Для краткости обозначим $\theta(1, E+Fn)$, $\theta'(1, E+Fn)$, $\varphi(1, E+Fn)$, $\varphi'(1, E+Fn)$ через θ_n, θ'_n, φ_n, φ'_n соответственно. При этом

$$\theta(x, E+Fn)\varphi'(x, E+Fn) - \theta'(x, E+Fn)\varphi(x, E+Fn) = \theta_n\varphi'_n - \theta'_n\varphi_n = 2.$$

На интервале $[n, n+1]$ произвольное решение уравнения (1.1.1) может быть представлено в виде

$$\psi(x) = a_1(n)\theta(x-n, E+Fn) + a_2(n)\varphi(x-n, E+Fn).$$

Введем вектор

$$a(n) = \begin{pmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \end{pmatrix}.$$

Так как решение $\psi(x)$ должно быть непрерывно дифференцируемо в точках $x = n$, то коэффициенты $a(n)$ обязаны удовлетворять следующему уравнению:

$$a(n+1) = M(n)a(n), \tag{1.1.2}$$

где

$$M(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\theta_n + \frac{1}{2ik_{n+1}}\theta'_n & \frac{1}{2}\varphi_n + \frac{1}{2ik_{n+1}}\varphi'_n \\ -\frac{ik_{n+1}}{2}\theta_n + \frac{1}{2}\theta'_n & -\frac{ik_{n+1}}{2}\varphi_n + \frac{1}{2}\varphi'_n \end{pmatrix}, \quad k_n = \sqrt{E+Fn}\,. \tag{1.1.3}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что $\det M(n) = 1$.

Полагая

$$\hat{a}(n) = e^{\Phi_n\sigma_3}a(n), \quad \Phi_n = \frac{1}{2}\ln k_n,$$

перепишем уравнение (1.1.2) в виде

$$\hat{a}(n+1) = T(n)\hat{a}(n), \tag{1.1.4}$$

где

$$T(n) = e^{\Phi_{n+1}\sigma_3}M(n)e^{-\Phi_n\sigma_3} = e^{i\Delta(n)\sigma_3}t(n), \quad \Delta(n) = k_n + \frac{F}{4k_n}. \tag{1.1.5}$$

Заметим, что $\det T(n) = 1$. Из интегральных представлений для $\theta(x, E+Fn)$ и $\varphi(x, E+Fn)$:

$$\theta(x, E+Fn) = e^{ik_n x} + \frac{1}{k_n}\int\limits_0^x \sin\{k_n(x-t)\}(p(t)-Ft)\theta(t, E+Fn)\,dt, \tag{1.1.6a}$$

$$\varphi(x, E+Fn) = -\frac{1}{ik_n}e^{-ik_n x} + \frac{1}{k_n}\int\limits_0^x \sin\{k_n(x-t)\}(p(t)-Ft)\varphi(t, E+Fn)\,dt \tag{1.1.6b}$$

можно получить асимптотику при $n\to\infty$ для матрицы $t(n)$:

$$t(n) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\zeta_n}{4k_n^2}+O\left(\frac{a_n+k_n^{-1}}{k_n^3}\right) & \frac{\bar a_n}{2k_n}+O\left(\frac{a_n+c_n+k_n^{-1}}{k_n^2}\right) \\ \frac{a_n}{2k_n}+O\left(\frac{a_n+c_n+k_n^{-1}}{k_n^2}\right) & 1+\frac{\bar\zeta_n}{4k_n^2}+O\left(\frac{a_n+k_n^{-1}}{k_n^3}\right)\end{pmatrix}, \tag{1.1.7}$$

$$a_n = \int\limits_0^1 p(t)e^{2ik_n t}\,dt,$$

$$\zeta_n = \int\limits_0^1\int\limits_0^t p(y)p(t)e^{2ik_n(y-t)}\,dy\,dt,$$

$$c_n = \int\limits_0^1\int\limits_0^t p(y)p(t)e^{2ik_n t}\,dy\,dt.$$

С учетом принятых обозначений решение $\psi(x)$ может быть записано в виде

$$\psi(x) = \left(e^{-\frac{1}{2}\ln k_n\sigma_3}\hat a(n), \mathbf{w}(x-n, E+Fn)\right)_r, \quad \mathbf{w}(x,E) = \begin{pmatrix}\theta(x,E)\\ \varphi(x,E)\end{pmatrix}, \quad x\in[n, n+1]. \tag{1.1.8}$$

Здесь и далее вещественное скалярное произведение отмечено индексом r, а комплексное скалярное произведение оставлено без индекса:

$$(a,b)_r = a_1b_1 + a_2b_2, \quad (a,b) = a_1\bar b_1 + a_2\bar b_2.$$

Матрица $T(n)$ при $n > \max(-E/F, 0)$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma_1\overline{T(n)}\sigma_1 = T(n), \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{1.1.9}$$

Это следует из того факта, что

$$\overline{\varphi(x,E)}\cdot iE^{1/2}=\theta(x,E) \quad \text{при } E>0.$$

Таким образом, зная одно решение $\hat{a}^{(1)}(n)$ уравнения (1.1.4), второе можно найти в виде

$$\hat{a}^{(2)}(n)=\sigma_1\overline{\hat{a}^{(1)}(n)}. \tag{1.1.10}$$

Для больших n уравнение (1.1.4) может быть решено адиабатически. Это значит, что решение может быть представлено в виде

$$\hat{a}(n)=e^{i\Theta(n)}b(n), \tag{1.1.11}$$

где b и Θ гладкие функции параметра n и, кроме того, b — *медленно меняющаяся функция*[1].Мы можем найти такие адиабатические решения везде, за исключением относительно малых окрестностей точек поворота $\tilde{n}_l$. Уравнение (1.1.4) с помощью подстановки (1.1.11) может быть сведено к следующему:

$$e^{i\chi(n)}b(n+1)=T(n)b(n),\qquad \chi(n)=\Theta(n+1)-\Theta(n). \tag{1.1.12}$$

Для того чтобы отразить предположение, что $b(n)$ меняется медленно, заменим уравнение (1.1.12) на уравнение

$$e^{i\chi(n)}b(n+\varepsilon)=T(n)b(n), \tag{1.1.13}$$

содержащее вспомогательный параметр ε. При этом переменную n будем временно считать непрерывной. Из представлений (1.1.3), (1.1.5), (1.1.6) видно, что матрица $T(n)$ является бесконечно дифференцируемой функцией параметра n. Функцию $b(n)$ будем искать в виде формального ряда

$$b(n)\sim\sum_{p\geqslant 0}\varepsilon^p b_p(n),\quad b_p(n)=\begin{pmatrix}\alpha_p\\ \beta_p\end{pmatrix}. \tag{1.1.14}$$

Соответственно функция $b(n+\varepsilon)$ представляется формальным рядом

$$b(n+\varepsilon)\sim\sum_{p\geqslant 0}\varepsilon^p b_p(n+\varepsilon). \tag{1.1.15}$$

[1]Точный смысл данного термина станет ясен из приведенной ниже конструкции.

Разлагая в (1.1.15) функции $b_p(n+\varepsilon)$ в формальный ряд Тейлора, получим

$$b(n+\varepsilon) \sim \sum_{p\geqslant 0}\varepsilon^p \sum_{s\geqslant 0}\frac{\varepsilon^s}{s!}b_p^{(s)}(n) \sim \sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s \sum_{p=0}^{s}\frac{b_p^{(s-p)}(n)}{(s-p)!}. \tag{1.1.16}$$

Через $b^{(s)}(n)$ обозначена производная порядка s по переменной n. Подставим представления (1.1.14) и (1.1.16) для функций $b(n)$ и $b(n+\varepsilon)$ в уравнение (1.1.13). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие уравнения на $b_s(n)$:

$$\bigl(T(n)-e^{i\chi(n)}\bigr)b_s(n) = e^{i\chi(n)}\sum_{p=0}^{s-1}\frac{b_p^{(s-p)}(n)}{(s-p)!}, \quad s=1,2,\ldots \tag{1.1.17}$$

Решив эти уравнения и положив $\varepsilon = 1$, найдем ряд для $b(n)$, который при дополнительных условиях будет асимптотическим при $n\to\infty$.

Функция $\chi(n)$ находится из условия разрешимости уравнения для $b_0(n)$:

$$\det\bigl(T(n)-e^{i\chi(n)}\bigr)=0.$$

Учитывая, что $\det T(n) = 1$, последнее уравнение можно переписать в виде $\cos\chi(n) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}T(n)$. Это уравнение имеет несколько решений. Для наших целей достаточно фиксировать какое-нибудь одно решение. С учетом вещественности $\operatorname{tr}T(n)$ (см. (1.1.9)), находим

$$\cos\chi = \cos\Delta(n) + \operatorname{Re}(\zeta_n)\cos\Delta(n) - \operatorname{Im}(\zeta_n)\sin\Delta(n) + O\bigl((a_n + k_n^{-1})k_n^{-3}\bigr), \tag{1.1.18}$$

$$\chi(n) = \Delta(n) - \frac{\operatorname{Re}(\zeta_n)}{4k_n^2}\operatorname{ctg}k_n + \frac{\operatorname{Im}(\zeta_n)}{4k_n^2} + O\left(\frac{a_n + k_n^{-1}}{k_n^3\sin^2 k_n}\right). \tag{1.1.19}$$

Представление (1.1.19) справедливо вне окрестностей нулей $\sin k_n$, но мы должны построить *асимптотический ряд* для $b(n)$. Построим его и покажем, что он является асимптотическим на интервалах

$$I_l = (\tilde n_{l-1}, \tilde n_l)\setminus(\tilde i_{l-1}\cup\tilde i_l), \quad \tilde n_l = \frac{(\pi l)^2}{F} - \frac{E}{F}, \tag{1.1.20}$$

$$\tilde i_l = \{n : |n-\tilde n_l| \leqslant \gamma_l^{-1}f^{-1}(l) = O(l^{2/3})\}, \quad \gamma_l^2 = \frac{F}{2\pi l}, \quad f(l) = \gamma_l^{1/3}. \tag{1.1.21}$$

На интервалах I_l правая часть в (1.1.18) меньше единицы, поэтому функция $\chi(n)$, определенная в (1.1.19), вещественна.

Согласно (1.1.12), функция $\Theta(n)$ определяется рекуррентным соотношением $\Theta(n+1) = \Theta(n) + \chi(n)$, откуда

$$\Theta(n) = C_l + \sum_{k=n_0}^{n-1} \chi(k). \tag{1.1.22}$$

Здесь n_0 — ближайшее целое число к левой границе интервала I_l. Коэффициент C_l зависит от интервала I_l и может быть выбран так, что асимптотика для $\Theta(n)$ будет задаваться выражением

$$\Theta(n) = \frac{2}{3F}k_n^3 + O(l^{-1/2}).$$

Оценку членам формального ряда (1.1.14) дает следующая лемма.

Лемма 1. *На интервалах I_l, заданных условиями* (1.1.20) *и* (1.1.21), *существуют решения уравнений* (1.1.17), *удовлетворяющие при $l \to \infty$ оценкам*

$$\alpha_0 = 1 + O(l^{-1} f^2(l)), \ \beta_0 = -i\frac{a_n}{4k_n} \operatorname{ctg} k_n + O(l^{-1}(a_n + c_n + l^{-1})), \tag{1.1.23}$$

$$\alpha_p = O(l^{-1} f^{2+2p}(l)), \ \beta_p = O(l^{-1/2} f^{1+2p}(l)), \ p \geqslant 1. \tag{1.1.24}$$

В последних оценках О-большое может зависеть от p, но не зависит от l и n.

Доказательство. Решая уравнение (1.1.17) при $s = 0$, находим

$$\beta_0 = \alpha^+ \alpha_0, \tag{1.1.25}$$

где

$$\alpha_+ = \frac{t_{21}}{e^{i\chi} - t_{22}} = -i\frac{a_n}{4k_n} \operatorname{ctg} k_n + O\left(\frac{a_n + c_n + k_n^{-1}}{k_n}\right), \ \alpha'_+ = O\left(\frac{1}{k_n^2 \sin^2 k_n}\right). \tag{1.1.26}$$

Здесь введены обозначения

$$T(n) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha'_+ = \frac{d}{dn}\alpha_+(n).$$

Введем собственный вектор η эрмитово сопряженной матрицы:

$$(T - e^{i\chi})^* \eta = 0,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\tau} \end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{t_{21}}{e^{i\chi} - t_{22}} = e^{2ik_n} i \frac{\bar{a}_n}{4k_n} \operatorname{ctg} k_n + O\left(\frac{a_n + c_n + k_n^{-1}}{k_n}\right).$$

Отметим, что матрица $T - e^{i\chi}$ может вырождаться в нулевую. Однако, как нетрудно видеть, это может произойти только вблизи точек поворота. Интервалы I_l определены таким образом, что матрица $T - e^{i\chi}$ на них не вырождается в нулевую.

При $s = 1$ уравнение (1.1.17) имеет вид

$$(T - e^{i\chi}) b_1 = e^{i\chi} b_0'.$$

Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы векторы b_0' и η были ортогональны:

$$(b_0', \eta) = \alpha_0' + \tau \beta_0' = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим α_0:

$$\alpha_0 = \exp\left(-\int\limits_{n_0}^{n} \frac{\alpha_+' \tau}{1 + \alpha_+ \tau}\, dn\right), \tag{1.1.27}$$

где n_0 — нижняя граница интервала I_l. Постоянная, с точностью до которой определяется α_0, предполагается равной единице.

Учитывая оценки (1.1.26), а также неравенства

$$k_n^{-1} \leqslant C l^{-1}, \quad |\sin^{-1} k_n| \leqslant C\big((k_n - \pi(l-1))^{-1} + \pi l - k_n^{-1}\big), \quad |\sin^{-1} k_n| \leqslant C l^{1/2} f(l), \tag{1.1.28}$$

справедливые на интервале I_l в силу (1.1.20) и (1.1.21), получаем из (1.1.27) первую формулу (1.1.23). Теперь вторая формула (1.1.23) вытекает из (1.1.25) и (1.1.26). Итак, мы установили справедливость соотношений (1.1.23).

Для доказательства существования α_p и β_p при $p \geqslant 1$ и оценок (1.1.24) нам понадобятся оценки производных α_r и β_r по n при $r \leqslant p - 1$. Получим их вначале для α_0 и β_0. В силу (1.1.27) имеем

$$\alpha_0' = -\frac{\alpha_+' \tau}{1 + \alpha_+ \tau} \exp\left(-\int\limits_{n_0}^{n} \frac{\alpha_+' \tau}{1 + \alpha_+ \tau}\, dn\right) = \frac{1}{\sin^2 k_n} O(l^{-5/2} f(l)).$$

При каждом последующем дифференцировании оценка будет улучшаться на $O(l^{-1/2}f(l))$. Действительно, в силу (1.1.20) и (1.1.21)

$$(\sin^{-2}k_n)' = -\frac{F\cos k_n}{k_n\sin^3 k_n} = \sin^{-2}k_n O(l^{-1/2}f(l)).$$

При дифференцировании остальных членов оценка будет улучшаться на $O(l^{-1})$. Таким образом, справедлива оценка

$$\alpha_0^{(k)} = \sin^{-2}k_n O\big(l^{-(4+k)/2}f^k(l)\big), \quad k \geqslant 1.$$

Аналогичная оценка в силу (1.1.25) справедлива для $\beta_0^{(k)}$:

$$\beta_0^{(k)} = \sin^{-2}k_n O\big(l^{-(3+k)/2}f^{k-1}(l)\big), \quad k \geqslant 1.$$

Оценки производных α_p и β_p даются следующими формулами:

$$\alpha_p^{(k)} = \sin^{-2}k_n O(l^{-(4+k)/2}f^{2p+k}(l)), \qquad k \geqslant 1, \tag{1.1.29a}$$
$$\beta_p^{(k)} = \sin^{-2}k_n O(l^{-(3+k)/2}f^{2p+k-1}(l)), \quad k \geqslant 1. \tag{1.1.29b}$$

Доказательство этих оценок проведем методом индукции. Как было показано, оценки (1.1.24) и (1.1.29) верны при $p = 0$ и уравнения (1.1.17) разрешимы при $s = 1$. Пусть (1.1.24) и (1.1.29) верны при $p \leqslant m - 1$ и уравнения (1.1.17) разрешимы при $s \leqslant m$. Для доказательства леммы достаточно доказать справедливость (1.1.24) и (1.1.29) при $p = m$ и разрешимость (1.1.17) при $s = m + 1$.

Перепишем уравнение (1.1.17) в виде

$$\big(T(n) - e^{i\chi(n)}\big)b_p(n) = e^{i\chi(n)}P_{p-1}, \tag{1.1.30}$$

где

$$P_{p-1} = \begin{pmatrix} A_{p-1} \\ B_{p-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{b_k^{(p-k)}}{(p-k)!}, \quad A_m \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m}\frac{\alpha_k^{(m-k+1)}}{(m-k+1)!}, \quad B_m \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m}\frac{\beta_k^{(m-k+1)}}{(m-k+1)!}.$$

Для разрешимости (1.1.30) при $p = m + 1$ необходимо и достаточно выполнения условия $(P_m, \eta) = 0$, что эквивалентно

$$A_m + \tau B_m = 0. \tag{1.1.31}$$

Положим

$$A_m = \alpha'_m + A^0_{m-1}, \quad A^0_{m-1} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{(m-k+1)}}{(m-k+1)!},$$

$$B_m = \beta'_m + B^0_{m-1}, \quad B^0_{m-1} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\beta_k^{(m-k+1)}}{(m-k+1)!}.$$

Перепишем уравнение (1.1.31) в виде

$$\alpha'_m + \tau\beta'_m + A^0_{m-1} + \tau B^0_{m-1} = 0. \tag{1.1.32}$$

Из (1.1.30) при $p = m$ имеем

$$\beta_m = \alpha_+\alpha_m + \frac{B_{m-1}}{t_{22} - e^{i\chi}} e^{i\chi}. \tag{1.1.33}$$

Подставляя последнее выражение в (1.1.32), получим уравнение на α_m. Решая его, находим

$$\alpha_m = C_m\alpha_0, \quad C_m = -\int_{n_0}^{n} \left(\tau\left(\frac{B_{m-1}}{t_{22} - e^{i\chi}} e^{i\chi}\right)' + A^0_{m-1} + \tau B^0_{m-1}\right) \frac{1}{\alpha_0(1 + \alpha_+\tau)}\, dn. \tag{1.1.34}$$

Оценим B_{m-1}, используя (1.1.29b):

$$B_{m-1} = \sin^{-2} k_n \sum_{k=0}^{m-1} O(l^{(k-m-3)/2} f^{k+m-1}(l)) = \sin^{-2} k_n O(l^{-2} f^{2m-2}(l)).$$

Согласно (1.1.31),

$$A_{m-1} = -\tau B_{m-1} = \sin^{-2} k_n O(l^{-5/2} f^{2m-1}(l)).$$

Так же, как и раньше, получим, что

$$B'_{m-1} = \sin^{-2} k_n O(l^{-5/2} f^{2m-1}(l)).$$

Аналогично для A^0_{m-1} и B^0_{m-1}:

$$A^0_{m-1} = \sin^{-2} k_n O(l^{-3} f^{2m}(l)), \quad B^0_{m-1} = \sin^{-2} k_n O(l^{-5/2} f^{2m-1}(l)).$$

Собирая все последние оценки, можем оценить C_m:

$$C_m = \int_{n_0}^{n} \sin^{-2} k_n O(l^{-3} f^{2m}(l))\, dn.$$

Таким образом, согласно (1.1.28), имеем

$$C_m = O(l^{-1} f^{2m+2}(l)).$$

Отсюда в силу (1.1.34) находим

$$\alpha_m = O(l^{-1} f^{2m+2}(l)).$$

Используя (1.1.33), оценим β_m:

$$\beta_m = \alpha_+ \alpha_m + \frac{B_{m-1}}{t_{22} - e^{i\chi}} e^{i\chi} = O(l^{-1/2} f^{2m+1}(l)).$$

Как и раньше, несложно показать, что при дифференцировании оценки улучшаются на $O(l^{-1/2} f(l))$, откуда

$$\alpha_m^{(k)} = \sin^{-2} k_n O(l^{-(4+k)/2} f^{2m+k}(l)),$$
$$\beta_m^{(k)} = \sin^{-2} k_n O(l^{-(3+k)/2} f^{2m+k-1}(l)).$$

Этим и завершается доказательство леммы.

Для доказательства существования точного решения уравнения (1.1.12), допускающего асимптотическое разложение вида (1.1.14) при $\varepsilon = 1$, необходима следующая лемма.

Лемма 2. *Существует бесконечно дифференцируемая функция $b(n)$, заданная на интервалах I_l, такая, что*

$$b(n) \sim \sum_{p \geqslant 0} b_p(n), \quad b(n) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad b_p(n) = \begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix}, \tag{1.1.35}$$

где α_p и β_p определены в лемме 1. Соотношение (1.1.35) означает, что

$$|\alpha(n) - \sum_{p=0}^{N} \alpha_p(n)| \leqslant A(l) l^{-1} f^{2+2N}, \ |\beta(n) - \sum_{p=0}^{N} \beta_p(n)| \leqslant B(l) l^{-1/2} f^{1+2N}, \quad n \in I_l, \tag{1.1.36}$$

для любых $N \geqslant 0$. При этом

$$\lim_{l\to\infty} A(l) = 0, \quad \lim_{l\to\infty} B(l) = 0.$$

Доказательство. Основная идея построения функции $b(n)$ хорошо известна, мы заимствовали ее из [4]. Построим первую компоненту вектора $b(n)$. Пусть

$$\delta_p(n) = 1 - \exp(-d_p g^{-1}(n)).$$

Здесь $g(n)$ — монотонно убывающая функция, причем $g(\tilde{n}_l) = f(l)$; положительные коэффициенты d_p будут определены позднее. Согласно лемме 1, с некоторыми C_p справедливы оценки

$$|\alpha_p(n)| \leqslant \delta_{0p} + C_p l^{-1} f^{2+2p}, \quad n \in I_l, \quad \delta_{0p} = \begin{cases} 1, & p = 0; \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Выбирая коэффициенты d_p следующим образом:

$$d_p = \begin{cases} C_p^{-1}, & C_p \neq 0; \\ 0, & C_p = 0, \end{cases}$$

получим, что

$$|\delta_p(n)\alpha_p(n)| \leqslant d_p g^{-1}(\tilde{n}_l) C_p l^{-1} f^{2+2p} \leqslant l^{-1} f^{1+2p}, \quad n \in I_l, \quad p \geqslant 1. \tag{1.1.37}$$

Теперь заменим исходный асимптотический ряд $\sum_{p\geqslant 0} \alpha_p(n)$ на следующий:

$$\sum_{p\geqslant 0} \alpha_p(n)\delta_p(n).$$

В силу оценки (1.1.37) последний ряд равномерно сходится

$$\left|\sum_{p\geqslant 1} \alpha_p(n)\delta_p(n)\right| \leqslant \sum_{p\geqslant 1} l^{-1} f^{1+2p} = \frac{l^{-1} f^3}{1 - f^2}.$$

Положим по определению

$$\alpha(n) = \sum_{p\geqslant 0} \alpha_p(n)\delta_p(n).$$

Для доказательства леммы осталось показать, что ряд $\sum_{p\geqslant 0}\alpha_p(n)$ является асимптотическим для $\alpha(n)$. Действительно,

$$\left|\alpha(n)-\sum_{p=0}^{N}\alpha_p(n)\right|\leqslant\left|\sum_{p=0}^{N}\alpha_p(n)e^{-d_p g^{-1}(n)}\right|+\left|\sum_{p=N+1}^{\infty}\alpha_p(n)(1-e^{-d_p g^{-1}(n)})\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{p=0}^{N}\alpha_p(n)e^{-d_p f^{-1}(l-1)}\right|+\left|\sum_{p=N+1}^{\infty}\alpha_p(n)(1-e^{-d_p f^{-1}(l-1)})\right|.$$

Первое слагаемое при $l\to\infty$ экспоненциально стремится к нулю. Второе имеет следующую оценку:

$$\left|\sum_{p=N+1}^{\infty}\alpha_p(n)(1-e^{-d_p f^{-1}(l-1)})\right|\leqslant\sum_{p=N+1}^{\infty}l^{-1}f^{1+2p}(l-1)=\frac{l^{-1}f^{3+2N}(l-1)}{1-f^2(l-1)}.$$

Таким образом, существует последовательность $A(l)\to 0$ такая, что

$$\left|\alpha(n)-\sum_{p=0}^{N}\alpha_p(n)\right|\leqslant A(l)l^{-1}f^{2+2N}.$$

Для второй компоненты вектора $b(n)$ построение проводится аналогично.

Итак, существует гладкая функция $\hat{a}_0(n)$, допускающая асимптотическое разложение

$$\hat{a}_0(n)\sim e^{i\Theta(n)}\sum_{p\geqslant 0}b_p(n).$$

Здесь и далее символ $\sim$ понимается в смысле определения, данного в лемме 2. Так как последний асимптотический ряд формально удовлетворяет уравнению (1.1.4), то верно равенство

$$T(n)\hat{a}_0(n)-\hat{a}_0(n+1)=c(n),\quad \text{где}\quad c(n)\sim 0. \tag{1.1.38}$$

Далее, параметр n снова считается целым.

Теорема 3. *На интервалах I_l, заданных соотношениями* (1.1.20) *и* (1.1.21), *уравнение* (1.1.4) *имеет решение $\hat{a}^{(1)}(n)$, удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $\hat{a}^{(1)}(n)=e^{i\Theta(n)}b(n)$,
(ii) $\Theta(n)=\frac{2}{3F}k_n^3+O(l^{-1/2})$,

(iii) *функция $b(n)$ допускает при $n \to \infty$ асимптотическое разложение*

$$b(n) \sim \sum_{p \geqslant 0} b_p(n),$$

причем компоненты функции $b_p(n)$ удовлетворяют оценкам (1.1.23), (1.1.24).

Кроме того, существует линейно-независимое решение

$$\hat{a}^{(2)}(n) = \sigma_1 \overline{\hat{a}^{(1)}(n)}.$$

Доказательство. Из формулы (1.1.10) вытекает существование второго решения. При этом в силу (1.1.23) и (1.1.36) справедливы оценки

$$\hat{a}^{(1)}(n) = e^{i\Theta(n)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{a_n}{4k_n} \operatorname{ctg} k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(l^{-1}f^2) \\ O(l^{-1}(a_n + c_n + l^{-1})) \end{pmatrix} \right\}, \tag{1.1.39a}$$

$$\hat{a}^{(2)}(n) = e^{-i\Theta(n)} \left\{ \begin{pmatrix} i\frac{\bar{a}_n}{4k_n} \operatorname{ctg} k_n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(l^{-1}(a_n + c_n + l^{-1})) \\ O(l^{-1}f^2) \end{pmatrix} \right\}. \tag{1.1.39b}$$

Линейная независимость решений $\hat{a}^{(1)}(n)$ и $\hat{a}^{(2)}(n)$ следует из (1.1.39). Таким образом, последнее утверждение теоремы доказано.

Подчеркнем, что параметр n является целым. Подставим функцию $\hat{a}(n) = \hat{a}_0(n) + u(n)$ в уравнение (1.1.4). Учитывая (1.1.38), получим, что

$$u(n+1) = T(n)u(n) + c(n), \quad c(n) \sim 0. \tag{1.1.40}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует решение $u(n)$ уравнения (1.1.40), асимптотически равное нулю. Рассмотрим матричное рекуррентное соотношение

$$G(n+1) = T(n)^{-1}G(n), \quad G(n_0) = I, \quad n \in I_l,$$

где n_0 — ближайшее целое число к левой границе интервала I_l. Имеют место следующие оценки (ср. [6, гл. 1, п. 4, 3]):

$$\begin{aligned} &\|T(n)\| = \|T^{-1}(n)\| \leqslant 1 + C_0 l^{-1}, \quad \det T(n) = 1, \\ &\|G(n)\| = \|G^{-1}(n)\| \leqslant \prod_{k=n_{l-1}}^{n-1} \|T^{-1}(k)\| \leqslant (1 + C_0 l^{-1})^{C_1 l} \leqslant C_2. \end{aligned} \tag{1.1.41}$$

Мы учли, что число целых точек, входящих в I_l, не превосходит $C_1 l$.

Пусть $v(n) = G(n)u(n)$, тогда в силу (1.1.38)

$$v(n+1) = v(n) + d(n), \quad \text{где} \quad d(n) = G(n+1)c(n).$$

Так как $c(n) \sim 0$, то, согласно (1.1.41), имеем $\|d(n)\| < C_N l^{-N-1}$ для любого $N \geqslant 1$. Мы использовали здесь, что из $c(n) \sim 0$ следует оценка $\|c(n)\| < C_1(N)l^{-N}$.

Пусть $v(n_0) = 0$, тогда

$$\|v(n)\| < \sum_{k \in I_l} \|d(k)\| \leqslant \sum_{k \in I_l} C_N l^{-N-1} \leqslant C_3(N)l^{-N}.$$

Отсюда

$$\|u(n)\| \leqslant \|G(n)\| \|d(n)\| \leqslant C_2 C_3(N) l^{-N}, \quad \forall\ N \geqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

§1.2. Точки поворота

Этот параграф посвящен построению асимптотических решений уравнения (1.1.4) в относительно малых окрестностях точек поворота.

Перепишем уравнение (1.1.4) в виде

$$\hat{a}(n+1) = e^{i\Delta(n)\sigma_3} t(n)\hat{a}(n). \tag{1.2.1}$$

Рассмотрим точки поворота $\tilde{n}_l$, которые определены равенствами $k_{\tilde{n}_l} = \pi l$, $l \in \mathbb{N}$. Точки $\tilde{n}_l$ не являются целыми, поэтому введем целое число n_l, ближайшее к $\tilde{n}_l$. Рассмотрим уравнение (1.2.1) на интервалах i_l более широких, чем $\tilde{i}_l$, а именно в точках $n = n_l + m$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$|m| \leqslant (\gamma_l^{-1} + 1) f^{-1}(l), \tag{1.2.2}$$

где γ_l^{-1} и $f(l)$ вводятся, согласно (1.1.21).

Основная идея при решении уравнения (1.2.1) состоит в том, чтобы заменить $\Delta(n)$ и $t(n)$ на первые члены рядов Тейлора в окрестности точки $\tilde{n}_l$. Используя (1.1.7), получим

$$t(n) = t_l, \quad \Delta(n) = \Delta_l + \gamma_l^2 m,$$

где

$$t_l = I + \frac{\gamma_l^2}{F}\begin{pmatrix} 0 & \bar{b}_l \\ b_l & 0 \end{pmatrix} + \gamma_l^4 \begin{pmatrix} O(1) & O(d_l) \\ O(d_l) & O(1) \end{pmatrix}, \quad \Delta_l = \pi l + O(l^{-1}). \tag{1.2.3}$$

Отметим, что O-большие в формуле (1.2.3) дают равномерную оценку по n. Здесь введены следующие обозначения:

$$b_l = \frac{a_{\tilde{n}_l}}{F}, \quad d_l = |a_{\tilde{n}_l}| + |c_{\tilde{n}_l}| + l^{-1/3}.$$

Удобно выделить главный осциллирующий член. Для этого введем новую функцию

$$\hat{a}(n) = e^{\frac{i}{2}y(y-\gamma)\sigma_3 + i\Delta_l m\sigma_3} g(y+\delta\gamma), \quad y = \gamma m. \tag{1.2.4}$$

Параметр δ будет определен позднее. Здесь и далее индекс l в обозначениях γ_l, δ_l, $f(l)$ и b_l опущен. С учетом (1.2.3) и (1.2.4) уравнение (1.2.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} &g(y+\gamma+\delta\gamma) \\ &\quad = \left[I + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\delta_1(l)\gamma y} e^{-iy^2}\bar{b} \\ e^{2i\delta_1(l)\gamma y} e^{iy^2} b & 0 \end{pmatrix} + \gamma^4 \begin{pmatrix} O(1) & O(d) \\ O(d) & O(1) \end{pmatrix} \right] g(y+\delta\gamma), \\ &\delta_1(l) = -0.5 + (\Delta_l - \pi l)m = O(1). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $z = y + \delta\gamma$. Выбирая коэффициент δ равным $\delta_1(l)$, получим следующее уравнение на $g(z)$:

$$g(z+\gamma) = \left[I + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-iz^2}\bar{b} \\ e^{iz^2} b & 0 \end{pmatrix} + \gamma^4 \begin{pmatrix} O(1) & O(d) \\ O(d) & O(1) \end{pmatrix} \right] g(z). \tag{1.2.5}$$

Лемма 4. *На интервалах* $J_l = \{z : |z - \delta\gamma| \leqslant (1+\gamma)f^{-1}\}$ *уравнение* (1.2.5) *имеет решение* $g(z)$, *допускающее асимптотическое разложение вида*

$$g(z) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(z)|b|^2 & \gamma \bar{R}_1(z)\bar{b} \\ \gamma R_1(z) b & \gamma^2 \bar{R}_2(z)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} O(f) & O(d) \\ O(d) & O(f) \end{pmatrix} \right] \hat{g}_0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R_1(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{it^2}\,dt\,, \quad R_2(z) = \int_{-f^{-1}}^{z} e^{-it^2}\,dt \int_{-\infty}^{t} e^{is^2}\,ds,$$

$\hat{g}_0$ *— произвольный постоянный вектор.*

Нетрудно заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2}\,dt = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\pi}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it^2}\,dt \int_{-\infty}^{t} e^{is^2}\,ds = \frac{\pi}{2}\,.$$

Доказательство. Легко видеть, что вектор-функция

$$g_1(z) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(z)|b|^2 & \gamma \bar{R}_1(z)\bar{b} \\ \gamma R_1(z) b & \gamma^2 \bar{R}_2(z)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & (\bar{R}_1(z) - \frac{1}{2}\bar{R}_1'(z))\bar{b} \\ (R_1(z) - \frac{1}{2}R_1'(z))b & 0 \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0$$

в старших порядках удовлетворяет уравнению (1.2.5). Здесь $R_1'(z) = e^{iz^2}$. Подставив функцию

$$g(z) = g_1(z) + u(z)$$

в (1.2.5), получим следующее уравнение:

$$u(z+\gamma) = P(z)u(z) + G(z).$$

Здесь

$$P(z) = I + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-iz^2}\bar{b} \\ e^{iz^2} b & 0 \end{pmatrix} + \gamma^4 \begin{pmatrix} O(1) & O(d) \\ O(d) & O(1) \end{pmatrix}, \quad \det P(z) = 1,$$

$$G(z) = \gamma^4 \begin{pmatrix} O(f^{-1}) & O(f^{-2}d) \\ O(f^{-2}d) & O(f^{-1}) \end{pmatrix}\hat{g}_0.$$

В силу соотношения (1.1.10) достаточно доказать лемму для $\hat{g}_0 = \binom{1}{0}$. Рассмотрим матричное рекуррентное соотношение

$$Q(z+\gamma) = P^{-1}(z)Q(z), \quad Q(z_{\min}) = I, \quad z \in i_l.$$

Здесь $z_{\min}$ — ближайшее целое число к левой границе интервала J_l. Имеют место следующие оценки [6, гл. 1, п. 4, 3]:

$$A(z) \overset{\text{def}}{=} P^{-1}(z) - I, \quad \|A(z)\| < C_0\gamma^2,$$

$$\begin{aligned} \|Q(z) - I\| &= \left\| \prod_{x=z_{\min}}^{z-1} (I + A(x)) - I \right\| = \left\| I + \sum_{x=z_{\min}}^{z-1} A(x) + \cdots - I \right\| \\ &\leqslant \sum_{x=z_{\min}}^{z-1} \|A(x)\| + \cdots \leqslant \prod_{x=z_{\min}}^{z-1} (1 + \|A(x)\|) - 1 \\ &\leqslant (1 + C_0\gamma^2)^{C_1\gamma^{-1}f^{-1}} - 1 \leqslant e^{C_0C_1\gamma f^{-1}} - 1 \\ &\leqslant C_2\gamma f^{-1}, \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$$\|Q^{-1}(z) - I\| \leqslant C_2\gamma f^{-1}. \tag{1.2.7}$$

Положив $v(z)=Q(z)u(z)$ и $h(z)=Q(z+\gamma)G(z)$, получим

$$v(z+\gamma) = v(z) + h(z).$$

В силу (1.2.6) и (1.2.7) справедливы следующие оценки:

$$h(z) = \gamma^4\begin{pmatrix} O(f^{-1}) \\ O(df^{-2}) \end{pmatrix}, \quad v(z) = \sum_{x=z_{\min}}^{z-\gamma} h(x) \implies v(z) = \gamma^3\begin{pmatrix} O(f^{-2}) \\ O(df^{-3}) \end{pmatrix} = \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) \\ O(d) \end{pmatrix},$$

$$u(z) = Q^{-1}(z)v(z) = \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) \\ O(d) \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем асимптотику для $g(z)$:

$$g(z) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(z)|b|^2 & \gamma\bar{R}_1(z)\bar{b}(1+O(\gamma)) \\ \gamma R_1(z)b(1+O(\gamma)) & \gamma^2\bar{R}_2(z)|b|^2 \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0 + \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) \\ O(d) \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В случае произвольного $\hat{g}_0$ верно следующее равенство:

$$g(z) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(z)|b|^2 & \gamma\bar{R}_1(z)\bar{b} \\ \gamma R_1(z)b & \gamma^2\bar{R}_2(z)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) & O(d) \\ O(d) & O(f) \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0. \tag{1.2.8}$$

Теорема 5. *На интервалах i_l, заданных соотношением* (1.2.2), *уравнение* (1.2.1) *имеет решение $\hat{a}(n)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i)

$$\hat{a}(n) = e^{i\Delta_l m\sigma_3}e^{\frac{i}{2}\gamma^2 m(m-1)\sigma_3}h(\gamma m), \quad n = n_l + m, \tag{1.2.9}$$

(ii) *функция $h(y)$ допускает асимптотическое разложение в виде*

$$h(y) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(y)|b|^2 & \gamma\bar{R}_1(y)\bar{b} \\ \gamma R_1(y)b & \gamma^2\bar{R}_2(y)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) & O(d) \\ O(d) & O(f) \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1.2.4). Функция $g(y+\gamma\delta)$ в силу леммы 4 допускает представление в виде (1.2.8). Справедливы следующие соотношения:

$$R_k(y+\gamma\delta) = R_k(y) + O(\gamma), \quad k = 1, 2.$$

В результате получим

$$g(y+\gamma\delta) = \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(y+\gamma\delta)|b|^2 & \gamma\bar{R}_1(y+\gamma\delta)\bar{b} \\ \gamma R_1(y+\gamma\delta)b & \gamma^2\bar{R}_2(y+\gamma\delta)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) & O(d) \\ O(d) & O(f) \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0$$

$$= \left[I + \begin{pmatrix} \gamma^2 R_2(y)|b|^2 & \gamma\bar{R}_1(y)\bar{b} \\ \gamma R_1(y)b & \gamma^2\bar{R}_2(y)|b|^2 \end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} O(f) & O(d) \\ O(d) & O(f) \end{pmatrix}\right]\hat{g}_0.$$

Полагая $h(y) = g(y+\gamma\delta)$, получим утверждение теоремы.

§1.3. Переход через точки поворота

Как видно из изложенного выше, мы нашли асимптотическое поведение решений на интервалах I_l и i_l, определенных формулами (1.1.20) и (1.2.2) соответственно. Нетрудно заметить, что интервал i_l пересекается с двумя интервалами I_l и I_{l+1}, поэтому полученные асимптотики можно сшить.

Учитывая формулы (1.1.39), получим асимптотики решений уравнения (1.1.4) на границе i_l:

$$\hat{a}^{(1)}(n) = e^{i\Theta(n)}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{a_n}{4k_n}\operatorname{ctg} k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\gamma^2 f^2) \\ O(\gamma^2 d) \end{pmatrix}\right\},$$
$$\hat{a}^{(2)}(n) = e^{-i\Theta(n)}\left\{\begin{pmatrix} i\frac{\bar{a}_n}{4k_n}\operatorname{ctg} k_n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\gamma^2 d) \\ O(\gamma^2 f^2) \end{pmatrix}\right\}.$$

Из (1.1.22) следует, что на границе интервала i_l (как слева, так и справа) функция $\Theta(n)$ допускает разложение вида

$$\Theta(n) = \Theta_l + \Phi_l(n) + O(\gamma^2 f).$$

Здесь

$$\Theta_l = \frac{2}{3F}k_{n_l}^3 + O(l^{-1/2}) \neq \Theta_l(n),\quad \Phi_l(n) = \Delta_l m + \frac{1}{2}\gamma^2 m(m-1),\qquad n = n_l + m. \tag{1.3.1}$$

Перенормируем решения $\hat{a}^{(1)}(n)$ и $\hat{a}^{(2)}(n)$:

$$\omega^{(1)}(n) = e^{-i\Theta_l}\hat{a}^{(1)}(n),\quad \omega^{(2)}(n) = e^{i\Theta_l}\hat{a}^{(2)}(n). \tag{1.3.2}$$

Обозначим решение $\hat{a}(n)$, заданное на интервале I_l, через $\hat{a}_l(n)$. При положительных и отрицательных m решения $\omega^{(j)}(n)$ строятся независимым образом. Обозначим их при $m < 0$ через u и при $m > 0$ через v: u связано с $\hat{a}_l$, v связано с $\hat{a}_{l+1}$. Связь этих решений может быть фиксирована с помощью решения (1.2.9), определенного на интервале i_l. Для краткости обозначим это решение через A_1 при $\hat{g}_0 = (1,0)^t$ и через A_2 при $\hat{g}_0 = (0,1)^t$.

На границе интервала i_l решения (1.3.2) имеют следующие асимптотические поведения:

а) на левой границе

$$u^{(1)}(n) = e^{i\Phi_l(n)}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{2}\gamma b f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\gamma^2 f) \\ O(\gamma^2 d) \end{pmatrix}\right\},$$
$$u^{(2)}(n) = e^{-i\Phi_l(n)}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\gamma\bar{b} f \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\gamma^2 d) \\ O(\gamma^2 f) \end{pmatrix}\right\},$$

b) на правой границе

$$v^{(1)}(n) = e^{i\Phi_l(n)}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\frac{i}{2}\gamma b f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 f)\\ O(\gamma^2 d)\end{pmatrix}\right\},$$

$$v^{(2)}(n) = e^{-i\Phi_l(n)}\left\{\begin{pmatrix}\frac{i}{2}\gamma\bar{b} f\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 d)\\ O(\gamma^2 f)\end{pmatrix}\right\}.$$

Асимптотическое поведение решений A_k определяется теоремой 5. На левой границе интервала i_l

$$A_1 = e^{i\Phi_l(n)\sigma_3}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \frac{i}{2}\gamma b f e^{iy^2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 f)\\ O(\gamma^2 d)\end{pmatrix}\right\},$$

$$A_2 = \sigma_1\bar{A}_1 = e^{i\Phi_l(n)\sigma_3}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{i}{2}\gamma\bar{b} f e^{-iy^2}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 d)\\ O(\gamma^2 f)\end{pmatrix}\right\}.$$

Решения A_j могут быть выражены в терминах $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$:

$$A_1 = e_1 u^{(1)} + e_2 u^{(2)}, \quad A_2 = \bar{e}_2 u^{(1)} + \bar{e}_1 u^{(2)}.$$

Числа e_1 и e_2 зависят только от l и имеют следующие оценки:

$$e_1 = 1 + O(\gamma^2 f), \quad e_2 = O(\gamma^2 d).$$

На правой границе интервала i_l

$$A_1 = e^{i\Phi_l(n)\sigma_3}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\gamma^2|b|^2\\ \gamma R_1(\infty)b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\frac{i}{2}\gamma b f e^{iy^2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 f)\\ O(\gamma^2 d)\end{pmatrix}\right\},$$

$$A_2 = e^{i\Phi_l(n)\sigma_3}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma\overline{R_1(\infty)}\bar{b}\\ \frac{\pi}{2}\gamma^2|b|^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{i}{2}\gamma\bar{b} f e^{-iy^2}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}O(\gamma^2 d)\\ O(\gamma^2 f)\end{pmatrix}\right\}.$$

Решения A_j могут быть выражены также в терминах $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$:

$$A_1 = g_1 v^{(1)} + g_2 v^{(2)}, \quad A_2 = \bar{g}_2 v^{(1)} + \bar{g}_1 v^{(2)}.$$

Здесь

$$g_1 = 1 + \frac{\pi}{2}\gamma^2|b|^2 + O(\gamma^2 f), \quad g_2 = \gamma R_1(\infty)b + O(\gamma^2 d).$$

В результате получаем следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = M_l \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{1.3.3}$$

где

$$M_l = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\pi}{2}\gamma^2|b|^2 + O(\gamma^2 f) & -e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}\gamma b + O(\gamma^2 d) \\ -e^{-i\pi/4}\sqrt{\pi}\gamma\bar{b} + O(\gamma^2 d) & 1 + \frac{\pi}{2}\gamma^2|b|^2 + O(\gamma^2 f) \end{pmatrix}.$$

Из равенств

$$u^{(2)} = \sigma_1 \bar{u}^{(1)}, \quad v^{(2)} = \sigma_1 \bar{v}^{(1)}$$

вытекает, что матрица M_l должна удовлетворять соотношению

$$\sigma_1 \overline{M_l} \sigma_1 = M_l. \tag{1.3.4}$$

Согласно (1.3.2), мы знаем, что

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_l^{(1)} \\ \hat{a}_l^{(2)} \end{pmatrix} = e^{i\Theta_l\sigma_3} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{l+1}^{(1)} \\ \hat{a}_{l+1}^{(2)} \end{pmatrix} = e^{i\Theta_l\sigma_3} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Теперь с помощью (1.3.3) мы можем связать $\hat{a}_{l+1}$ и $\hat{a}_l$:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{l+1}^{(1)} \\ \hat{a}_{l+1}^{(2)} \end{pmatrix} = N_l \begin{pmatrix} \hat{a}_l^{(1)} \\ \hat{a}_l^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{1.3.5}$$

где

$$N_l = e^{i\Theta_l\sigma_3} M_l e^{-i\Theta_l\sigma_3}.$$

Преобразуем Θ_l, используя формулу (1.3.1):

$$\Theta_l = \frac{2}{3F}(E + Fn_l)^{3/2} + O(l^{-1/2}),$$

где n_l — ближайшее целое число к решению $\tilde{n}_l$ уравнения

$$\sqrt{E + F\tilde{n}_l} = \pi l.$$

Разлагая Θ_l в ряд Тейлора, получим

$$\Theta_l = \frac{2}{3F}(E + F\tilde{n}_l)^{3/2} + (E + F\tilde{n}_l)^{1/2}(n_l - \tilde{n}_l) + O(l^{-1/2}).$$

Подставляя известное выражение для $\tilde{n}_l$, находим

$$\Theta_l = -\frac{1}{3F}(\pi l)^3 + \pi l \frac{E}{F} + \pi l n_l + O(l^{-1/2}). \tag{1.3.6}$$

Последний неубывающий член $\pi l n_l$ в формуле (1.3.6) может быть отброшен, так как он не дает вклада в матрицу N_l. Убывающий член $O(l^{-1/2})$ может быть отнесен к матрице M_l. Таким образом, справедливо равенство

$$N_l = e^{i\Gamma_l \sigma_3} \hat{M}_l e^{-i\Gamma_l \sigma_3}. \tag{1.3.7}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\hat{M}_l = \begin{pmatrix} 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-1}f) & i\bar{r}(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d) \\ -ir(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d) & 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-1}f) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_l = -\frac{1}{3F}(\pi l)^3 + \pi l \frac{E}{F},$$

$$r(l) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2F}} \int\limits_0^1 p(t) e^{-2i\pi l t}\, dt \,, \quad q(l) = \frac{1}{2}|r(l)|^2. \tag{1.3.8}$$

§1.4. Матрица перехода

На интервале I_l произвольное решение $\hat{a}$ уравнения (1.1.4) может быть представлено в виде

$$\hat{a}(n) = \hat{s}_l \hat{a}_l^{(1)} + \hat{t}_l \hat{a}_l^{(2)}, \quad n \in I_l \,,$$

где $\hat{s}_l$ и $\hat{t}_l$ — константы.

Введем вектор

$$\hat{\mathrm{s}}_l = \begin{pmatrix} \hat{s}_l \\ \hat{t}_l \end{pmatrix}.$$

Учитывая (1.3.5), легко найти связь между $\hat{\mathrm{s}}_{l+1}$ и $\hat{\mathrm{s}}_l$:

$$\hat{\mathrm{s}}_{l+1} = \hat{W}_l \hat{\mathrm{s}}_l, \quad \hat{W}_l = (N_l^t)^{-1}. \tag{1.4.1}$$

Теперь мы можем описать асимптотическое поведение при $x \to \infty$ решений уравнения (1.1.1) на интервале I_l. Согласно (1.1.8), на интервале $[n, (n+1)] \subset I_l$ произвольное решение ψ уравнения (1.1.1) может быть записано в виде

$$\psi(x) = \left(e^{-\frac{1}{2}\ln k_n \sigma_3}(\hat{s}_l \hat{a}_l^{(1)}(n) + \hat{t}_l \hat{a}_l^{(2)}(n)), \mathrm{w}(x - n, E + Fn)\right)_r.$$

Используя теорему 3, получим

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{\hat{s}_l}{\sqrt[4]{E+Fn}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fn)^{3/2}} \theta(x-n, E+Fn)\bigl(1+O(l^{-1}f(l))\bigr) \\
&\quad + \hat{t}_l \sqrt[4]{E+Fn} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fn)^{3/2}} \varphi(x-n, E+Fn)\bigl(1+O(l^{-1}f(l))\bigr) \\
&\quad + \hat{s}_l \sqrt[4]{E+Fn} \varphi(x-n, E+Fn) O\bigl(l^{-1/2}f(l)\bigr) \\
&\quad + \frac{\hat{t}_l}{\sqrt[4]{E+Fn}} \theta(x-n, E+Fn) O\bigl(l^{-1/2}f(l)\bigr) \\
&= \frac{s_l}{\sqrt[4]{E+Fn}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fn)^{3/2} + i\sqrt{E+Fn}(x-n)} \\
&\quad + \frac{t_l}{\sqrt[4]{E+Fn}} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fn)^{3/2} - i\sqrt{E+Fn}(x-n)} + O\left(\frac{l^{-1/2}f(l)\|\mathrm{s}_l\|}{\sqrt[4]{E+Fn}}\right) \\
&= \frac{s_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + \frac{t_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + O\left(\frac{l^{-1/2}\|\mathrm{s}_l\|}{\sqrt[4]{x}}\right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{pmatrix} s_l \\ t_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s}_l \\ \hat{t}_l \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение (1.4.1), находим связь между s_l и s_{l+1}:

$$\mathrm{s}_{l+1} = W_l \mathrm{s}_l, \quad W_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \hat{W}_l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода W_l может быть записана в виде (см. (1.3.7) и (1.4.1)):

$$W_l = e^{-i\Gamma_l\sigma_3} S_l e^{i\Gamma_l\sigma_3}, \quad \Gamma_l = -\frac{1}{3F}(\pi l)^3 + \pi l \frac{E}{F}, \tag{1.4.2a}$$

$$S_l = \begin{pmatrix} 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) & r(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d_l) \\ \bar{r}(l)l^{-1/2} + O(l^{-1}d_l) & 1 + q(l)l^{-1} + O(l^{-7/6}) \end{pmatrix}. \tag{1.4.2b}$$

Таким образом, доказана следующая теорема. •

Теорема 6. *Пусть $p(x)$ — периодический потенциал из класса $L_1[0,1]$, удовлетворяющий условию $\int_0^1 p(t)\,dt = 0$. Тогда произвольное решение уравнения*

$$-\psi'' + p(x)\psi - Fx\psi = E\psi$$

допускает при $x \to +\infty$ асимптотическое разложение:

$$\psi(x) = \frac{s_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + \frac{t_l}{\sqrt[4]{Fx}} e^{-i\frac{2}{3F}(E+Fx)^{3/2}} + O\left(\frac{l^{-1/2}\|\mathrm{s}_l\|}{\sqrt[4]{x}}\right), \quad x \in I_l.$$

При этом коэффициенты s_l, t_l *и* s_{l+1}, t_{l+1} *связаны на смежных интервалах* I_l *и* I_{l+1} *преобразованием*

$$\mathrm{s}_{l+1} = W_l \mathrm{s}_l, \ \mathrm{s}_l = \begin{pmatrix} s_l \\ t_l \end{pmatrix}, \tag{1.4.3}$$

где W_l *допускает представление вида* (1.4.2).

Замечание. Первоначально задача об исследовании асимптотических поведений решений уравнения (1.1.1) сводилась к изучению дискретной системы (1.1.4). Теорема 6 позволяет перейти от исследования системы (1.1.4) к (1.4.3). При этом система (1.4.3) оказывается более контролируемым объектом. Во-первых, матрица перехода W_l стремится к единичной быстрее, чем $t(n)$ (сравни коэффициенты $r(l)$ и a_n). Во-вторых, внедиагональные члены W_l содержат быстро осциллирующие множители $\exp(2i\Gamma_l)$, которые в случае сильных особенностей у потенциала $p(x)$ в принципе могут быть эффективно использованы при анализе спектральных свойств матричной задачи.

Глава 2. Спектральные свойства уравнения Шрёдингера

§2.1. Предварительные сведения

Лемма 7. *Пусть* $\psi(x)$ *— произвольное решение уравнения* (1.1.1), *тогда*

$$\int\limits_{n_{l-1}}^{n_l} |\, \psi(x)\, |^2 \, dx = \frac{2\pi}{F} \|\mathrm{s}_l\|^2 \big(1 + O\big(l^{-1/2} f^{-1}(l)\big)\big). \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Учитывая асимптотику ψ (см. теорему 6), можем заключить, что

$$|\psi(x)|^2 = \frac{\|\mathrm{s}_l\|^2}{\sqrt{Fx}} + \frac{2}{\sqrt{Fx}} Re\Big(s_l \bar{t}_l e^{i\frac{4}{3F}(E+Fx)^{3/2}}\Big) + O\bigg(\frac{l^{-1/2}\|\mathrm{s}_l\|^2}{\sqrt{x}}\bigg), \quad x \in I_l. \tag{2.1.2a}$$

На интервалах $\tilde{i}_l$ справедлива оценка

$$|\psi(x)|^2 = O\bigg(\frac{\|\mathrm{s}_l\|^2}{\sqrt{x}}\bigg), \qquad x \in \tilde{i}_l. \tag{2.1.2b}$$

Теперь утверждение леммы следует из формул (2.1.2). Заметим, что поправочные члены могут быть оценены более точно, но нам это не потребуется. •

Лемма 8. *Матрица W_l удовлетворяет соотношению*

$$\sigma_1 \overline{W_l} \sigma_1 = W_l, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Следует из (1.3.4) и связи между M_l и W_l.

В силу леммы 8 матрицу W_l можно записать в виде

$$W_l = \begin{pmatrix} 1 + w_l & v_l \\ \bar{v}_l & 1 + \bar{w}_l \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$v_l = e^{-2i\Gamma_l} r(l) l^{-1/2} + O(l^{-1} d_l), \quad w_l = \frac{1}{2} |r(l)|^2 l^{-1} + O(l^{-7/6}).$$

Напомним, что $r(l)$ определены формулой (1.3.8).

Следствие 9. *Если* s_l *решение системы* (1.4.3), *то* $\sigma_1 \bar{\mathrm{s}}_l$ *также решение.* Это свойство аналогично свойству (1.1.10) для системы (1.1.4).

Доказательство.

$$\sigma_1 \bar{\mathrm{s}}_{l+1} = \sigma_1 \overline{W_l \mathrm{s}_l} = \sigma_1 \overline{W_l} \sigma_1 \sigma_1 \bar{\mathrm{s}}_l = W_l \sigma_1 \bar{\mathrm{s}}_l.$$

Обозначим коэффициенты, участвующие в асимптотическом разложении решения $\psi^u(x)$, через s_l^u. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Решение* $\psi^u(x)$ *уравнения* (1.1.1), *подчиненное на* $+\infty$ *тогда и только тогда, когда* s_l^u *— подчиненное решение* (1.4.3).

Доказательство. Заметим, что, начиная с некоторого l_0, выполнены неравенства

$$C_1 \|\mathrm{s}_l\|^2 \leqslant \|\mathrm{s}_l\|^2 \big(1 + O(l^{-1/2} f(l))\big) \leqslant C_2 \|\mathrm{s}_l\|^2, \quad \text{где } C_1 > 0,\ C_2 > 0.$$

Теперь утверждение теоремы следует из (2.1.1). •

Замечание. Из последней теоремы следует, что существенные носители абсолютно непрерывных спектров уравнения (1.1.1) и системы (1.4.3) совпадают.

§2.2. Решения дискретной системы

Лемма 8 позволяет искать решения системы (1.4.3) в виде

$$\mathrm{s}_l = e^{i\Theta}\frac{\|\mathrm{s}_l\|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi_l} \\ e^{\frac{i}{2}\varphi_l} \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Действительно, подставляя (2.2.1) в (1.4.3), получим

$$\|\mathrm{s}_{l+1}\|\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{l+1}} \\ e^{\frac{i}{2}\varphi_{l+1}} \end{pmatrix} = \|\mathrm{s}_l\|\begin{pmatrix} (1+w_l)e^{-\frac{i}{2}\varphi_l} + v_l e^{\frac{i}{2}\varphi_l} \\ \bar{v}_l e^{-\frac{i}{2}\varphi_l} + (1+\bar{w}_l)e^{\frac{i}{2}\varphi_l} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы (2.2.1) было решением (1.4.3), необходимо и достаточно выполнения рекуррентных соотношений

$$e^{i\varphi_{l+1}} = e^{i\varphi_l}\frac{1+\bar{v}_l e^{-i\varphi_l} + \bar{w}_l}{1+v_l e^{i\varphi_l} + w_l}, \quad \|\mathrm{s}_{l+1}\| = \|\mathrm{s}_l\||1+v_l e^{i\varphi_l} + w_l|. \tag{2.2.2}$$

Определение 6.

$D(1)$ — множество всех решений системы (1.4.3),

$D(2)$ — множество решений системы (1.4.3), представимых в виде (2.2.1).

Определение 7.

$S(1)$ — система (1.4.3),

$S(2)$ — система (1.4.3), ограниченная на $D(2)$.

Лемма 11. *Если $S(1)$ имеет подчиненное решение s_l^u, то $\mathrm{s}_l^u \in D(2)$.*

Доказательство. В силу следствия 9 верно включение $\sigma_1\bar{\mathrm{s}}_l^u \in D(1)$. Так как $\|\sigma_1\bar{\mathrm{s}}_l^u\| = \|\mathrm{s}_l^u\|$, то решения s_l^u и $\sigma_1\bar{\mathrm{s}}_l^u$ должны быть линейно-зависимы (см. определение 2):

$$\sigma_1\bar{\mathrm{s}}_l^u = C\mathrm{s}_l^u, \quad \mathrm{s}_l^u = \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \beta_l \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\beta_l = e^{-2i\Theta}\bar{\alpha}_l, \; C = e^{2i\Theta}, \; \alpha_l = e^{i\phi_l}|\alpha_l| \Longrightarrow \mathrm{s}_l^u = e^{i\Theta}|\alpha_l|\begin{pmatrix} e^{-i\Theta+i\phi_l} \\ e^{i\Theta-i\phi_l} \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать. •

Лемма 12. *Системы $S(1)$ и $S(2)$ имеют подчиненное решение одновременно.*

Доказательство. Пусть $S(1)$ имеет подчиненное решение s_l^u. По лемме 11 $s_l^u \in D(2)$. Учитывая включение $D(2) \subset D(1)$, получим, что s_l^u — подчиненное решение $S(2)$.

Обратно, пусть $S(2)$ имеет подчиненное решение s_l^u. Ясно, что $s_l^u \in D(1)$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^u\|^2}{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^1\|^2} = 0, \quad s_l^1 \in D(1) \setminus \{cs_l^u\}.$$

Пусть $s_l^2 \in D(2)$ л.н.з. с s_l^u. Тогда

$$s_l^1 = \alpha s_l^u + \beta s_l^2.$$

Мы будем считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Иначе $s_l^1 \in D(2)$ и доказательство очевидно.

$$\begin{aligned} \|s_l^1\|^2 &= |\alpha|^2 \|s_l^u\|^2 + |\beta|^2 \|s_l^2\|^2 + 2Re\big(\bar{\alpha}\beta(s_l^2, s_l^u)\big) \\ &\geqslant |\alpha|^2 \|s_l^u\|^2 + |\beta|^2 \|s_l^2\|^2 - |\alpha\beta|\big(\gamma^{-2}\|s_l^2\|^2 + \gamma^2\|s_l^u\|^2\big), \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{L} \|s_l^1\|^2 \geqslant \big(|\alpha|^2 - |\alpha||\beta|\gamma^2\big) \sum_{l=1}^{L} \|s_l^u\|^2 + \big(|\beta|^2 - |\alpha||\beta|\gamma^{-2}\big) \sum_{l=1}^{L} \|s_l^2\|^2.$$

Выбирая $\gamma^2 > |\alpha||\beta^{-1}|$, получим

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^1\|^2}{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^u\|^2} \geqslant \big(|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta|\gamma^2\big) + \big(|\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\gamma^{-2}\big) \lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^2\|^2}{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^u\|^2} = +\infty.$$

Это завершает доказательство леммы. •

§2.3. Спектральные свойства уравнения Шрёдингера

Лемма 13. *Пусть выполнено предположение* (D). *Если существует постоянная* C *такая, что*

$$\left| Re \sum_{l=1}^{L} l^{-1/2} r(l) e^{-2i\Gamma_l} e^{i\varphi_l} \right| \leqslant C, \quad L \geqslant 1,$$

где φ_l *удовлетворяют* (2.2.2), *то система* $S(1)$ *не имеет подчиненного решения.*

Доказательство. Для любого $s_l \in D(2)$ верно (см. (2.2.2))

$$\|s_L\| = \|s_1\| \prod_{l=1}^{L-1} |1+v_l e^{i\varphi_l} + w_l| = \|s_1\| \prod_{l=1}^{L-1} |1+l^{-1/2}r(l)e^{-2i\Gamma_l}e^{i\varphi_l}| \prod_{l=1}^{L-1} \left|1+O\left(l^{-1}d_l\right)\right|. \tag{2.3.1}$$

В силу предположения (D) произведение $\prod_{l=1}^{\infty} \left|1+O(l^{-1}d_l)\right|$ сходится. Кроме того,

$$\prod_{l=1}^{L-1} |1+l^{-1/2}r(l)e^{-2i\Gamma_l}e^{i\varphi_l}| = \exp\left(\sum_{l=1}^{L-1} \ln\left|1+l^{-1/2}r(l)e^{-2i\Gamma_l}e^{i\varphi_l}\right|\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{l=1}^{L-1} Re(l^{-1/2}r(l)e^{-2i\Gamma_l}e^{i\varphi_l}) + \sum_{l=1}^{L-1} O(l^{-1}|r(l)|^2)\right). \tag{2.3.2}$$

Учитывая предположение леммы, получим

$$0 < C_1 \leqslant \|s_l\|^2 \leqslant C_2 < \infty.$$

Таким образом, для любых s_l^1, $s_l^2 \in D(2)$ верно

$$0 < \frac{C_1(\{s_l^1\})}{C_2(\{s_l^2\})} \leqslant \frac{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^1\|^2}{\sum_{l=1}^{L} \|s_l^2\|^2} \leqslant \frac{C_2(\{s_l^1\})}{C_1(\{s_l^2\})} < \infty.$$

Из последней оценки следует, что система $S(2)$ не имеет подчиненного решения. Учитывая лемму 12, получим требуемое утверждение.

Теорема 14. *Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположению (A). Тогда оператор Шрёдингера, заданный уравнением* (1.1.1), *имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий всю вещественную ось.*

Доказательство. Заметим, что мы находимся в условиях леммы 13. Поэтому система $S(1)$ не имеет подчиненного решения для всех $E \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 10 уравнение (1.1.1) также не имеет подчиненного решения на $+\infty$. Применяя теорему GP, получим, что спектр уравнения (1.1.1) абсолютно непрерывен и заполняет всю вещественную ось. Однократность спектра вытекает из определения $\mathrm{Dom}(H)$.

Теорема 15. *Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположению (B). Тогда абсолютно непрерывный спектр оператора Шрёдингера, заданного уравнением* (1.1.1), *однократен и заполняет всю вещественную ось.*

Доказательство. Согласно лемме 13 и теореме GP достаточно доказать, что при почти всех E существует постоянная $C(E)$ такая, что

$$\left|\sum_{l=1}^{L} l^{-1/2} r(l) e^{-2i\Gamma_l} e^{i\varphi_l}\right| \leqslant C(E), \quad L \geqslant 1.$$

Введем обозначения

$$S_L = \sum_{l=1}^{L} g(l) l^{-1/4} e^{-iE'l} e^{i\varphi_l}, \quad E' = 2\pi \frac{E}{F}, \quad g(l) = r(l) l^{-1/4} e^{i\frac{2}{3F}(\pi l)^3}.$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$S_L = \sum_{l=1}^{L-1} \left(l^{-1/4} e^{i\varphi_l} - (l+1)^{-1/4} e^{i\varphi_{l+1}}\right) \sum_{k=1}^{l} g(k) e^{-iE'k} + L^{-1/4} e^{i\varphi_L} \sum_{l=1}^{L} g(l) e^{-iE'l}. \tag{2.3.3}$$

Известно, что ряд Фурье функции из $L_2[0, 2\pi]$ сходится почти всюду. В силу предположения (B) ряд $\sum_{l=1}^{\infty} |g(l)|^2$ сходится. Поэтому при почти всех E' существует постоянная $C_1(E')$ такая, что

$$\left|\sum_{l=1}^{L} g(l) e^{-iE'l}\right| \leqslant C_1(E').$$

Используя это в (2.3.3), получим

$$|S_L| \leqslant C_1(E') \sum_{l=1}^{L-1} \left|l^{-1/4} e^{i\varphi_l} - (l+1)^{-1/4} e^{i\varphi_{l+1}}\right| + C_1(E') L^{-1/4}.$$

Заметим, что верна оценка (см. (2.2.2))

$$|e^{i\varphi_{l+1}} - e^{i\varphi_l}| \leqslant C_2 |r(l)| l^{-1/2}.$$

Отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\sum_{l=1}^{L} |(l+1)^{-1/4} e^{i\varphi_{l+1}} - l^{-1/4} e^{i\varphi_l}| \leqslant \sum_{l=1}^{L} (l^{-1/4} - (l+1)^{-1/4}) + C_2 \sum_{l=1}^{L} l^{-3/4} |r(l)| \leqslant C_3.$$

Окончательно, при почти всех E существует постоянная $C(E)$ такая, что $|S_L| \leqslant C(E)$. Этим и завершается доказательство теоремы. •

Теорема 16. *Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположениям (C) и (D). Тогда оператор Шрёдингера, заданный уравнением* (1.1.1), *не имеет собственных значений.*

Доказательство. Так как выполнено предположение (D), то можно воспользоваться формулами (2.3.1) и (2.3.2). Следовательно, для любого $s_l^1 \in D(2)$ верно

$$\|s_L^1\| \geqslant C_1 \exp\left(\sum_{l=1}^{L} Re(r(l) l^{-1/2} e^{-2i\Gamma_l} e^{i\varphi_l})\right) \geqslant C_1 \exp\left(-\sum_{l=1}^{L} |r(l)| l^{-1/2}\right).$$

Теперь, воспользовавшись равенством (2.1.1), получим

$$\int_{x_0}^{x} |\psi_1(x)|^2\, dx \geqslant C_3 \sum_{l=l_0}^{L} \|s_l^1\|^2 \geqslant C_4 \sum_{l=l_0}^{L} \exp\left(-\sum_{k=1}^{l} |r(k)| k^{-1/2}\right), \quad x_0 \in I_{l_0}, \quad x \in I_L. \tag{2.3.4}$$

Предположим теперь, что уравнение (1.1.1) имеет собственную функцию: $\psi^u(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\psi^u(x)$ — подчиненное решение (1.1.1) на $+\infty$. Из теоремы 10 следует, что s_l^u — подчиненное решение (1.4.3). В силу леммы 11 выполнено включение $s_l^u \in D(2)$, поэтому оценка (2.3.4) справедлива для $\psi^u(x)$. Отсюда с учетом предположения (C) следует, что $\psi^u(x) \notin L_2(\mathbb{R})$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Предположение (E).

$$|r(l)| \leqslant \frac{1}{2} l^{-1/2}, \quad l > l_0,$$

при некотором l_0, где $r(l)$ определены равенствами (1.3.8).

Следствие 17. *Пусть потенциал $p(x)$ удовлетворяет предположениям (D) и (E). Тогда оператор Шрёдингера, заданный уравнением* (1.1.1), *не имеет собственных значений.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что мы находимся в условиях предположения (C):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Bigl(-2\sum_{l=1}^{k} |r(l)| l^{-1/2}\Bigr) &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp\Bigl(C_1 - 2\sum_{l=l_0}^{k} |r(l)| l^{-1/2}\Bigr) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp\Bigl(C_1 - \sum_{l=l_0}^{k} l^{-1}\Bigr) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp(C_2 - \ln k) \\
&\geqslant C_3 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.
\end{aligned}$$

Список литературы

[1] Буслаев В. С., *Адиабатическое возмущение периодического потенциала*, Теор. и мат. физ. **58** (1984), №2, 233–243.

[2] Буслаев В. С., Дмитриева Л. А., *Адиабатическое возмущение периодического потенциала. II*, Теор. и мат. физ. **73** (1987), №3, 430–442.

[3] Буслаев В. С., Дмитриева Л. А., *Блоховский электрон во внешнем поле*, Алгебра и анализ **1** (1989), №2, 1–29.

[4] Вазов В., *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.

[5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория*, Мир, М., 1966.

[6] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[7] Пожарский А. А., *Кристалл с сингулярным потенциалом в однородном электрическом поле*, Теор. и мат. физ. **123** (2000), №1, 132–149.

[8] Титчмарш Э. Ч., *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. Т. 1, ИЛ, М., 1960.

[9] Титчмарш Э. Ч., *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. Т. 2, ИЛ, М., 1961.

[10] Avron J., Gunther L., Zak J., *Energy uncertainty in «Stark ladder»*, Solid State Comm. **16** (1975), no. 2, 189–191.

[11] Avron J., Zak J., *Instability of the continuous spectrum: the N-band Stark ladder*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 5, 918–921.

[12] Buslaev V. S., *Kronig-Penney electron in a homogeneous electric field*, Differential Operators and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 45–57.

[13] Deift P., Killip R., *On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with square summable potentials*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), 341–347.

[14] Delyon F., Simon B., Souillard B., *From power pure point to continuous spectrum in disordered system*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **42** (1985), no. 3, 283–309.

[15] Exner P., *The absence of the absolutely continuous spectrum for δ' Wannier-Stark ladders*, J. Math. Phys. **36** (1995), 4561–4570.

[16] Gilbert D. J., Pearson D. B., *On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators*, J. Math. Anal. Appl. **128** (1987), 30–56.

[17] Kiselev A., *Absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators and Jacobi matrices with slowly decreasing potentials*, Comm. Math. Phys. **179** (1996), 377–400.

[18] Nenciu A., Nenciu G., *Dynamics of Bloch electrons in external electric fields*, J. Phys. A. **14** (1981), no. 10, 2817–2827.

С.-Петербургский
государственный университет
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 6 июня 2001 г.