Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. Т. Ахмедов, Ш. Р. Шакиров, Склейки поверхностей с многоугольными границами,
Функц. анализ и его прил., 2009, том 43, выпуск 4, 3–13

https://www.mathnet.ru/faa2968

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
13 декабря 2025 г., 19:19:48

Функциональный анализ и его приложения
2009, т. 43, вып. 4, с. 3–13

УДК 519.172.2+519.175.3

Склейки поверхностей с многоугольными границами*

© 2009. Э. Т. Ахмедов, Ш. Р. Шакиров

Попарно склеивая стороны многоугольника, можно получить двумерную поверхность с ручками и границами. В этой статье мы вычисляем число $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)$ различных способов склейки поверхности заданного рода g с L многоугольными компонентами границы, имеющими определенные числа сторон $n_1,\dots,n_L$. Используя комбинаторные соотношения между графами на действительных двумерных поверхностях, мы выводим рекуррентные соотношения между числами $\mathscr{N}_{g,L}$. Мы показываем, что числа Харера–Цагира возникают как частный случай чисел $\mathscr{N}_{g,L}$, и выводим новое явное выражение для них.

§1. Введение

Классическим вопросом перечислительной комбинаторики является следующий: сколькими способами можно попарно склеить все стороны $2N$-угольника, чтобы получить поверхность заданного рода g? Такая (*полная*) склейка означает, что производится в точности N отождествлений и не остается ни одной несклеенной стороны. Эта задача была решена в статье [1], и ее решение дается числами Харера–Цагира $\epsilon_g(N)$,

$\epsilon_g(N)$	$g=0$	$g=1$	$g=2$	$\dots$
$N=1$	1	—	—	—
$N=2$	2	1	—	—
$N=3$	5	10	—	—
$N=4$	14	70	21	—
$N=5$	42	420	483	—
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

определяемыми формулой

$$\epsilon_g(N)=\frac{(2N)!}{(N+1)!\,(N-2g)!}\times\text{коэффициент при } x^{2g} \text{ в } \left(\frac{x/2}{\operatorname{th} x/2}\right)^{N+1}. \qquad (1)$$

В данной статье нас интересуют более общие *неполные* склейки, т. е. мы разрешаем такую ситуацию, в которой некоторые стороны многоугольника остаются несклеенными. Таким образом мы обобщаем задачу и в результате получаем простые рекуррентные соотношения для соответствующих чисел склеек.

Для начала дадим определение склейки. Конкретная склейка границы многоугольника определяется через полугауссово слово вдоль его границы. Полугауссовым словом называется такая последовательность букв, в которой каж-

*Эта работа была частично поддержана Федеральным агентством по атомной энергетике. Исследования Ш. Р. Шакирова были частично поддержаны Программой поддержки ведущих научных школ (грант NSh-8004.2006.2), Российским фондом фундаментальных исследований (гранты РФФИ-Италия 06-01-92059-CE и 07-02-00642) и фондом «Династия».

дый элемент возникает *не более* чем два раза. Эту последовательность букв мы приписываем границе многоугольника. При этом каждой букве ставится в соответствие одна сторона на границе. Если какая-то буква в полугауссовом слове встречается дважды, то мы отождествляем две соответствующие стороны на границе многоугольника таким образом, чтобы сохранялась ориентируемость двумерной поверхности[1)]. Итак, полная склейка отвечает слову, в котором каждый элемент встречается в точности два раза.

После склейки — т. е. после отождествления всех сторон многоугольника, которые отвечают повторяющимся буквам, — получается ориентируемая двумерная поверхность, которая в общем случае имеет многоугольные границы. На границах остаются несклеенные ребра, соответствующие буквам, которые встречаются в полугауссовом слове только один раз. В качестве границ могут получиться 0-угольники (выделенные точки на поверхности), 1-угольники, 2-угольники, 3-угольники (треугольники) и т. д. Заметим, что при полной склейке в качестве границ возникают только выделенные точки (0-угольники).

Подчеркнем, что в данной статье мы различаем все не повторяющиеся буквы в полугауссовом слове и, следовательно, различаем все ребра в многоугольных компонентах границы получающихся двумерных поверхностей. Иначе говоря, мы рассматриваем только полугауссовы слова, которые соответствуют склейкам, приводящим к поверхностям с некоторой наперед заданной последовательностью букв на ребрах многоугольных границ.

Мы отождествляем две склейки многоугольника, если соответствующие полугауссовы слова могут быть отображены друг в друга посредством поворота многоугольника и/или переименовыванием повторяющихся букв в словах (см. рис. 1). Подчеркнем, что такое отождествление склеек отличается от того, что применялось в статье [1]. Это отличие обсуждается более подробно в § 3 настоящей статьи.

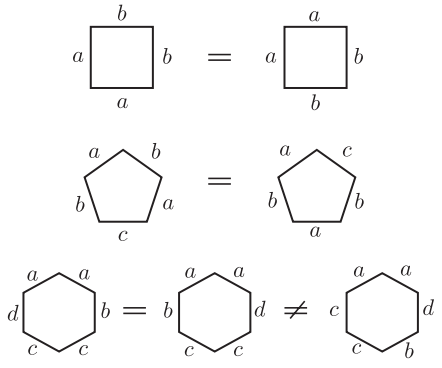


Рис. 1. Несколько примеров эквивалентных и неэквивалентных склеек

Мы используем именно такое соотношение эквивалентности для склеек, потому что оно отвечает естественному отождествлению графов на двумерных поверхностях. Очевидно, что образом границы многоугольника при склейке является граф, вложенный в поверхность. Ребра такого графа либо принадлежат многоугольным компонентам границы, либо соединяют вершины, принадлежа-

[1)] В этой статье мы все время рассматриваем только ориентируемые действительные двумерные поверхности.

щие различным компонентам. Они не пересекаются друг с другом, если только не оканчиваются в одной и той же вершине на границе.

Рассмотрим теперь отдельно графы на двумерных ориентируемых поверхностях. Мы отождествляем два таких графа, если их можно отобразить друг в друга посредством диффеоморфизма поверхности, который сохраняет ее ориентацию и действует тривиально на компонентах границы (но не обязательно стягиваем к тривиальному диффеоморфизму). Вообще говоря, разрезая поверхность по вложенному графу, можно получить набор двумерных поверхностей, но в этой статье нас интересуют только *одногранные графы*: это такие графы, разрезая поверхность по которым, мы получим один многоугольник без каких-либо ребер, нарисованных на нем, кроме тех, что принадлежат его границе. Таким образом мы приходим к заключению, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентности всевозможных склеек всевозможных многоугольников и множеством классов эквивалентности всевозможных одногранных графов на всевозможных поверхностях. Такое взаимно однозначное соответствие получается именно при примененном в нашей статье отождествлении склеек.

Нас интересует следующий вопрос: сколькими неэквивалентными способами можно склеить ребра N-угольника, чтобы получить поверхность данного рода g с L многоугольными компонентами границы с данными числами ребер $n_1, \dots, n_L$? Мы обозначаем это число неэквивалентных склеек через $\mathscr{N}_{g,L}(n_1, \dots, n_L)$.

Очевидно, что оно зависит от результирующей поверхности через g, L и $n_1, \dots, n_L$. Естественно ожидать, что $\mathscr{N}_{g,L}$ является симметрической функцией от $n_1, \dots, n_L$, так как нумерация границ произвольна. В отличие от [1] мы не рассматриваем полное число ребер N склеиваемого N-угольника как независимый параметр: действительно, легко видеть, что $N = n_1 + \dots + n_L + 4g + 2L - 2$. Очевидно, что в нашем случае N не обязательно является четным, а именно, мы склеиваем ребра N-, а не $2N$-угольника.

В этой статье мы предъявляем явную формулу для $\mathscr{N}_{g,L}(n_1, \dots, n_L)$. Это число вычисляется по индукции с помощью рекуррентных соотношений, которые выражают число одногранных графов на поверхности с L дырами и g ручками через такие же числа, отвечающие поверхностям с меньшим числом дыр при том же роде или же с меньшим числом ручек, но большим числом дыр. У обсуждаемых соотношений имеется естественное комбинаторное происхождение, возникающее из последовательного разрезания поверхности по ребрам графа на ней.

Легко догадаться, что $\mathscr{N}_{g,L}(n_1, \dots, n_L)$ сводятся к числам $\epsilon_g(N)$ в некотором пределе. Это приводит к явным формулам для $\epsilon_g(N)$, которые (насколько мы знаем) не были до сих пор широко известны.

§ 2. Вычисление $\mathscr{N}_{g,L}(n_1, \dots, n_L)$

Мы найдем число различных склеек, подсчитав число различных графов на поверхностях. Рассмотрим поверхность рода g, которая имеет L многоугольных дыр с числами ребер в дырах $n_1, \dots, n_L$. Для начала мы предполагаем, что все n_i больше 0. Ситуация, при которой некоторые n_i равны 0, будет рассмотрена ниже.

Лемма 1. *Если все* n_i *больше* 0, *то числа* $\mathscr{N}$ *подчиняются следующим рекуррентным соотношениям*:

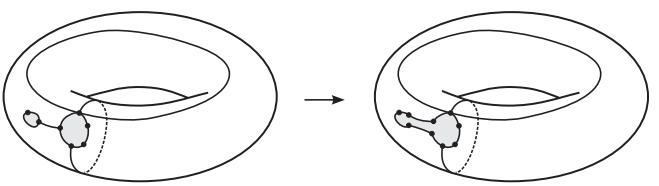
$$
\begin{aligned}
&(L+2g-1)\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)\\
&\quad=\sum_{i<j} n_i n_j \mathscr{N}_{g,L-1}(n_i+n_j+2,n_1,\dots,\check{n}_i,\dots,\check{n}_j,\dots,n_L)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_i n_i\cdot\sum_{x=1}^{n_i+1}\mathscr{N}_{g-1,L+1}(n_i+2-x,x,n_1,\dots,\check{n}_i,\dots,n_L),\\
&\qquad\qquad 1\leqslant i,j\leqslant L. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Начальное условие для этих соотношений выглядит так: $\mathscr{N}_{0,1}(n)=\mathrm{const}=1$, что очевидно, ведь сфера с одной дырой — это многоугольник. Если $L\leqslant 0$ или $g<0$, то предполагается, что $\mathscr{N}_{g,L}=0$. Галочка $\check{}$ над буквой обозначает, что соответствующий аргумент должен быть опущен.

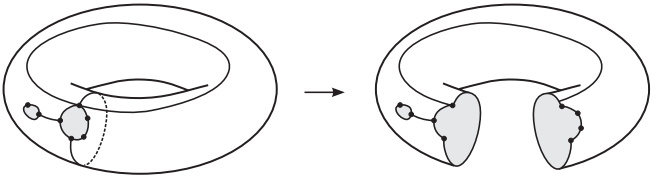
Доказательство. Рассматриваемые рекуррентные соотношения и их вывод аналогичны тем, что были представлены в статье [1] (см. с. 475). $\mathscr{N}_{g,L}$ — это число одногранных графов. Все одногранные графы на одной и той же поверхности состоят из одного и того же числа ребер. Легко видеть, что в рассматриваемых графах должно быть $L+2g-1$ ребер, которые связывают компоненты границы, но не принадлежат ей. Будем называть такие ребра *внутренними*. Возьмем граф из класса $\mathscr{N}_{g,L}$ и разрежем поверхность по одному из его внутренних ребер. Под разрезанием мы подразумеваем расклеивание двух ребер многоугольника и приписывание им различных букв, т. е. мы различаем два новых ребра получающейся в результате разрезания поверхности.

Число $\mathscr{N}_{g,L}$ одногранных графов на исходной поверхности пропорционально сумме по разрезам вдоль различных ребер чисел аналогичных графов на поверхностях, получающихся при разрезаниях по каждому конкретному ребру. Коэффициент в этой пропорциональности равен $L+2g-1$, потому что при подсчете числа разрезов по различным ребрам мы учитываем один граф на исходной поверхности в точности $L+2g-1$ раз. Это наблюдение поясняет левую часть формулы (2).

При разрезании по ребру графа из класса $\mathscr{N}_{g,L}$ мы получаем граф либо из класса $\mathscr{N}_{g,L-1}$ (т. е. соответствующий разрез уменьшает число дыр), либо из класса $\mathscr{N}_{g-1,L+1}$ (т. е. соответствующий разрез уменьшает число ручек и увеличивает число дыр). Эти два класса отвечают двум членам в правой части формулы (2). Или, что то же самое, ребра одногранных графов делятся на два типа: те, что соединяют различные компоненты границы, скажем,



и те, оба конца которых лежат на одной и той же компоненте границы, т. е., например,



Эти два типа отвечают первому и второму членам в правой части формулы (2).

• Чтобы соединить две различные компоненты границы (скажем, i-ю и j-ю), необходимо провести ребро от одной из n_i вершин первой компоненты границы до одной из n_j вершин другой компоненты. Следовательно, имеется $n_i\, n_j$ не диффеоморфных друг другу способов провести одно ребро, соединяющее две рассматриваемые компоненты границы. Разрезая по такому ребру, мы получим поверхность того же рода, но с меньшим числом дыр. А именно, две рассматриваемые дыры, с n_i и n_j ребрами, перейдут в одну дыру с $n_i + n_j + 2$ ребрами (эта ситуация показана на соответствующем рисунке выше). Таким образом, мы объяснили происхождение первого члена в правой части формулы (2).

• Чтобы связать ребром i-ю компоненту границы с самой собой, следует провести его вокруг одной из g ручек (иначе соответствующий граф не будет одногранным). Разрез по такому ребру уничтожает соответствующую ручку и превращает рассматриваемую дыру в две (эта ситуация показана на соответствующем рисунке выше). Полное число ребер у обеих новых дыр равно $n_i + 2$, потому что после разрезания появляются два новых ребра.

Вершины компонент границы пронумерованы числами от 1 до n_i, в некотором естественном порядке. Допустим, что ребро, по которому производится разрезание, оканчивается в p-й и q-й вершинах рассматриваемой компоненты границы. Такое ребро разделяет эту компоненту на две части. Числа ребер в двух частях этой компоненты равны $|p-q|$ и $n_i - |p-q|$. После разрезания эти две части переходят в две новые дыры на полученной поверхности. Эти дыры имеют $|p-q|+1$ и $n_i - |p-q| + 1$ ребер соответственно. Теперь надо взять сумму по всем таким разрезающим ребрам, т. е. по $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n_i$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\leqslant q} \mathscr{N}_{g-1,L+1}(|p-q|+1, n_i - |p-q| + 1, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_i}\sum_{q=1}^{n_i} \mathscr{N}_{g-1,L+1}(|p-q|+1, n_i - |p-q| + 1, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{p=q=1}^{n_i} \mathscr{N}_{g-1,L+1}(|p-q|+1, n_i - |p-q| + 1, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L).
\end{aligned}$$

Это выражение упрощается при замене переменной суммирования на $x = |p-q|+1$. При этом оно переходит в

$$\begin{aligned}
&\frac{n_i}{2}\sum_{x=1}^{n_i} \mathscr{N}_{g-1,L+1}(x, n_i + 2 - x, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L) \\
&\qquad\qquad + \frac{n_i}{2}\mathscr{N}_{g-1,L+1}(1, n_i + 1, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L) \\
&\qquad = \frac{n_i}{2}\sum_{x=1}^{n_i+1} \mathscr{N}_{g-1,L+1}(x, n_i + 2 - x, n_1, \dots, \check{n}_i, \dots, n_L).
\end{aligned}$$

Приведенное здесь вычисление объясняет второй член в правой части формулы (2).

Лемма доказана.

Теорема 1. *Единственное решение соотношений* (2) *дается следующей явной формулой*:

$$\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)=\frac{n_1\cdots n_L}{4^g}\cdot\frac{(\Sigma n+4g+2L-3)!}{(\Sigma n+2g+L-1)!}\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_L=g}\prod_{k=1}^{L}\frac{(2\lambda_k+n_k)!}{n_k!\,(2\lambda_k+1)!},\tag{3}$$

где сумма берется по всем упорядоченным разбиениям $g=\lambda_1+\ldots+\lambda_L$ *целого неотрицательного числа* g *на* L *неотрицательных целых чисел* $\lambda_1,\dots,\lambda_L$ *и используется обозначение* $\Sigma n=n_1+\dots+n_L$.

Доказательство. Доказательство очевидно и проводится по индукции.

Приведем теперь обобщение формул (2) и (3) на случай, когда некоторые из n_i равны нулю. Подчеркнем, что в этой статье мы всегда предполагаем, что имеется хотя бы одно не склеенное ребро, т. е. всегда рассматриваем случай $\sum_{i=1}^{L}n_i\geqslant 1$. Наши формулы не работают для случая, когда все n_i равны 0, т. е. для $\mathscr{N}_{g,L}(0,\dots,0)$.

Лемма 2. *Если некоторые* (*но не все*) n_i *равны нулю, то* $\mathscr{N}$ *удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям*:

$$\begin{aligned}(L+2g-1)\cdot\tilde{\mathscr{N}}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)&\\ =\sum_{i<j}\tilde n_i\tilde n_j\cdot\tilde{\mathscr{N}}_{g,L-1}(n_i+n_j+2,n_1,\dots,\check n_i,\dots,\check n_j,\dots,n_L)&\\ +\frac{1}{2}\sum_i\tilde n_i\cdot\sum_{x=1}^{n_i+1}\tilde{\mathscr{N}}_{g-1,L+1}(n_i+2-x,x,n_1,\dots,\check n_i,\dots,n_L),&\end{aligned}\tag{4}$$

где $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)=\tilde{\mathscr{N}}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)/\#(n_i=0)!$, *а* $\tilde n=n$, *если* $n>0$, *и* $\tilde n=1$, *если* $n=0$. *Здесь* $\#(n_i=0)$ — *это общее число тех* n_i, *которые равны нулю.*

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному для леммы 1, с небольшими поправками. Напомним, что граница с 0 ребер — это выделенная точка. Сразу видно, что ребро между двумя различными (i-й и j-й) компонентами границы можно провести $\tilde n_i\tilde n_j$ неэквивалентными способами. И наконец, как принято, мы не различаем выделенные точки между собой. Поэтому, чтобы избежать многократного учета одного и того же графа, следует разделить соответствующее полное число графов на множитель, равный факториалу общего числа выделенных точек, т. е. на $\#(n_i=0)!$.

Теорема 2. *Единственное решение соотношений* (4) *дается следующей явной формулой*:

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)=\frac{1}{4^g}\frac{1}{\#(n_i=0)!}\cdot\tilde n_1\cdots\tilde n_L\cdot\frac{(\Sigma n+4g+2L-3)!}{(\Sigma n+2g+L-1)!}&\\ \times\sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_L=g}\prod_{k=1}^{L}\frac{(2\lambda_k+n_k)!}{n_k!\,(2\lambda_k+1)!},&\end{aligned}\tag{5}$$

где, как и выше, сумма берется по всем упорядоченным разбиениям $g = \lambda_1 + \ldots + \lambda_L$ *целого неотрицательного числа* g *на* L *целых неотрицательных компонент* $\lambda_1, \ldots, \lambda_L$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

2.1. Пример: сфера. В случае $g = 0$ мы имеем дело со сферой с многоугольными дырами. Сложный сомножитель с суммой по разбиениям в формуле (3) превращается в единицу, и эта формула переходит в

$$\mathscr{N}_{0,L}(n_1, \ldots, n_L) = n_1 \cdots n_L \cdot \frac{(\Sigma n + 2L - 3)!}{(\Sigma n + L - 1)!} \tag{6}$$

(все $n_i > 0$). Например,

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_{0,1}(n_1) &= 1,\\
\mathscr{N}_{0,2}(n_1, n_2) &= n_1 n_2,\\
\mathscr{N}_{0,3}(n_1, n_2, n_3) &= n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3 + 3),\\
\mathscr{N}_{0,4}(n_1, n_2, n_3, n_4) &= n_1 n_2 n_3 n_4 (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5),\\
\mathscr{N}_{0,5}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) &= n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + 5)\\
&\quad \times (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + 6)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + 7).
\end{aligned}$$

2.2. Пример: тор. В случае $g = 1$ мы имеем дело с тором с многоугольными дырами. Теперь сложный множитель с суммой по разбиениям в (3) дает вклад, и эта формула принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_{1,L}(n_1, \ldots, n_L) = \frac{1}{4} n_1 \cdots n_L \cdot \frac{(\Sigma n + 2L + 1)!}{(\Sigma n + L + 1)!}\\
\times \left[\frac{(n_1 + 1)(n_1 + 2)}{6} + \cdots + \frac{(n_L + 1)(n_L + 2)}{6} \right]
\end{aligned} \tag{7}$$

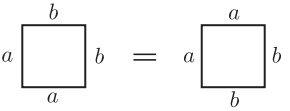
(все $n_i > 0$). Например,

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_{1,1}(n_1) &= n_1(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3)/4!,\\
\mathscr{N}_{1,2}(n_1, n_2) &= n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 4)(n_1 + n_2 + 5)(n_1^2 + n_2^2 + 3n_1 + 3n_2 + 4)/4!,\\
\mathscr{N}_{1,3}(n_1, n_2, n_3) &= n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3 + 5)(n_1 + n_2 + n_3 + 6)(n_1 + n_2 + n_3 + 7)\\
&\quad \times (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + 3n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 6)/4!,\\
\mathscr{N}_{1,4}(n_1, n_2, n_3, n_4) &= n_1\, n_2\, n_3\, n_4 (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7)\\
&\quad \times (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 8)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 9)\\
&\quad \times (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + 3n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 3n_4 + 8)/4!\,.
\end{aligned}$$

§ 3. Случай чисел Харера–Цагира

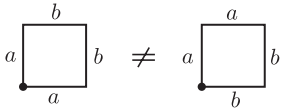
Эта часть статьи посвящена сравнению наших формул с полученными в статье [1]. Мы утверждаем, что $\mathscr{N}_{g,L}(n_1, \ldots, n_L)$ — это многопараметрическое обобщение чисел $\epsilon_g(N)$. Укажем точно, в каком случае наши числа сводятся к $\epsilon_g(N)$.

Склейки ребер многоугольника естественно подчиняются циклической симметрии. Например, следующие две полные склейки 4-угольника в сферу

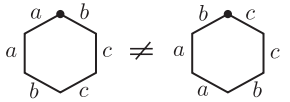


не различаются, потому что они переходят друг в друга при циклической перестановке ребер квадрата и приводят к графам на сфере, которые диффеоморфны друг другу.

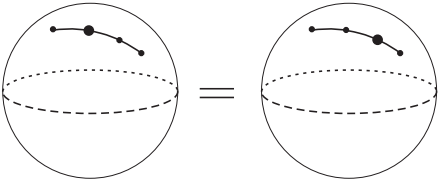
Для проблемы, которая решалась в статье [1], было необходимо иметь дело с полными склейками многоугольников *без* циклической симметрии ребер. Простейший способ нарушить циклическую симметрию — это ввести одну выделенную вершину многоугольника. Например:



Тогда две упомянутые выше склейки различимы. В результате $\epsilon_0(2) = 2$. Однако этот способ нарушения циклической симметрии также разрушает взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентности склеек многоугольников и множеством классов эквивалентности графов на поверхностях. Например, две различные склейки



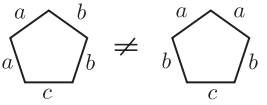
приводят к эквивалентным графам на сфере:



Нам бы хотелось сохранить рассматриваемое взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности. По этой причине мы не выделяем никакую из вершин многоугольника, а числа полной склейки $\mathscr{N}_{g,L}(0,0,\ldots,0)$ не совпадают с числами Харера–Цагира.

Вместо этого, как легко заметить, числа Харера–Цагира должны совпадать с $\mathscr{N}_{g,L}(1,0,\ldots,0)$. Действительно, присутствие одного не склеенного ребра нарушает циклическую симметрию при перестановке склеенных ребер. Единственное не склеенное ребро выполняет в точности роль выделенной вершины на границе многоугольника.

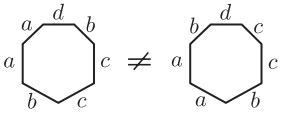
Например, две склейки



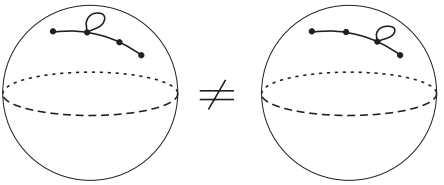
различны; поэтому $\mathscr{N}_{0,3}(1,0,0) = \epsilon_0(2)$. В общем случае мы имеем следующее равенство:

$$\mathscr{N}_{g,L}(1,0,\ldots,0) = \epsilon_g(2g+L-1) \tag{8}$$

В отличие от ситуации с одной выделенной вершиной, в присутствии одного не склеенного ребра обсуждавшееся выше взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности остается в силе. Например, две различные склейки



приводят к двум различным графам на сфере:



Теперь воспользуемся явной формулой для $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\ldots,n_L)$. Подставляя (5) в (8) и производя преобразования, получаем явное представление для чисел Харера–Цагира через следующую сумму по разбиениям:

$$\epsilon_g(N) = \mathscr{N}_{g,N-2g+1}(1,0,\ldots,0) = \frac{1}{4^g}\cdot\frac{(2N)!}{(N-2g+1)!\,N!} \times \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_L=g} \frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}, \tag{9}$$

где $L = N-2g+1$. Для случая $g=0$ фактор с суммой по разбиениям тривиален (равен 1), и мы воспроизводим числа Каталана [2]:

$$\begin{aligned}\epsilon_0(N) &= \frac{(2N)!}{(N+1)!\,N!}\cdot\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_L=0}\frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\ &= \frac{(2N)!}{(N+1)!\,N!} = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}.\end{aligned} \tag{10}$$

В случае $g=1$ сумму можно легко посчитать, потому что все разбиения единицы на L частей имеют вид $(0,\ldots,1,\ldots,0)$. В этом случае фактор с суммой по разбиениям равен $L/3$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\epsilon_1(N) &= \frac{(2N)!}{4(N-1)!\,N!}\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_L=1}\frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\ &= \frac{(2N)!\,(N-1)/3}{4(N-1)!\,N!} = \frac{1}{12}\,\frac{(2N)!}{(N-2)!\,N!}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогичные вычисления можно проделать и в случае $g>1$. Известная производящая функция Харера–Цагира

$$1+2\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{N=2g}^{\infty}\epsilon_g(N)x^{N+1}y^{N-2g+1}\,\frac{1}{(2N-1)!!} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y$$

сразу получается из нашей формулы (9). А именно,

$$
\begin{aligned}
&1+2\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{N=2g}^{\infty}\epsilon_g(N)x^{N+1}y^{N-2g+1}\frac{1}{(2N-1)!!}\\
&\quad=1+2\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{N=2g}^{\infty}x^{N+1}y^{N-2g+1}\frac{1}{4^g}\frac{(2N)!}{(2N-1)!!\,N!}\,\frac{1}{(N-2g+1)!}\\
&\qquad\times\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_L=g}\frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\
&\quad=1+2\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{N=2g}^{\infty}x^{N+1}y^{N-2g+1}2^{-2g}2^{N}\frac{1}{(N-2g+1)!}\\
&\qquad\times\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_L=g}\frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\
&\quad=1+\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{L=1}^{\infty}(2x)^{L}y^{L}x^{2g}\frac{1}{L!}\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_L=g}\frac{1}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\
&\quad=1+\sum_{L=1}^{\infty}\frac{(2y)^{L}}{L!}\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_L=g}\frac{x^{2g+L}}{(2\lambda_1+1)\cdots(2\lambda_L+1)}\\
&\quad=1+\sum_{L=1}^{\infty}\frac{(2y)^{L}}{L!}\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)}\right]^{L}\\
&\quad=1+\sum_{L=1}^{\infty}\frac{(2y)^{L}}{L!}\left[\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right]^{L}=\exp\left[2y\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right]=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{y}.
\end{aligned}
$$

§ 4. Заключение

Вместо заключения мы поясним, какая конструкция стоит за числами $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)$ (см. [3]). Хорошо известно, что диагональные клеточные разбиения многоугольников (с фиксированной ориентацией и одним выделенным ребром) находятся во взаимно однозначном соответствии с многогранниками Сташева (см., например, [4], [5]). Поясним соответствие.

Одновременно можно нарисовать $N-3$ непересекающиеся диагонали внутри N-угольника. Проведя их, мы получаем триангуляцию многоугольника. Рассматриваемое соответствие чисто комбинаторное: k-мерная ($k\leqslant N-3$) грань многогранника Сташева соответствует такому клеточному разбиению многоугольника его диагоналями, которое может быть получено из триангуляции стиранием k из $N-3$ диагоналей. k-мерная грань многогранника Сташева принадлежит n-мерной грани ($N-3\geqslant n>k$), если и только если клеточное разбиение $N-3-n$ диагоналями (отвечающее n-мерной грани) может быть вложено в клеточное разбиение $N-3-k$ диагоналями (отвечающее k-мерной грани). Например, вершины многогранника Сташева отвечают триангуляциям многоугольника, ребра — триангуляциям без одной диагонали и т. д.

Если вспомнить, что многоугольник топологически — это не что иное, как диск, то хотелось бы получить обобщение рассматриваемой конструкции на всевозможные действительные двумерные поверхности с ручками и многоугольными дырами. То есть мы хотели бы построить комбинаторные комплексы,

соответствующие клеточным разбиениям действительных двумерных поверхностей. При этом k-мерная грань такого комплекса соответствует триангуляции поверхности со стертыми в ней k ребрами. Очевидно, что эти k-мерные грани являются k-мерными многогранниками Сташева. Видно, что в рассматриваемой конструкции одногранные графы на поверхностях отвечают клеткам максимальной размерности в соответствующих комплексах. Поэтому $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)$ является числом клеток максимальной размерности в комплексе, который соответствует поверхности рода g с L многоугольными дырами, содержащими $n_1,\dots,n_L$ ребер.

В литературе обычно рассматриваются ленточные графы, дуальные клеточным разбиениям, на двумерных действительных поверхностях вместо самих клеточных разбиений. В таком случае описанные выше комплексы называются граф-комплексами (см., например, [6]). Важной задачей является вычисление их гомологий.

Имеются также и другие интересные, на наш взгляд, задачи, связанные с числами $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)$, такие, как нахождение производящей функции для этих чисел и/или их представление через матричные интегралы. Графы на поверхностях возникают в различных областях современной теоретической физики, таких, как матричные модели для двумерной квантовой гравитации [7]; поэтому существование представления чисел $\mathscr{N}_{g,L}(n_1,\dots,n_L)$ через матричные интегралы не будет неожиданным.

Благодарности. Первый автор хотел бы поблагодарить И. В. Артамкина и С. К. Ландо за продуктивные обсуждения, а А. М. Бабичева за математический ликбез. Также авторы хотели бы поблагодарить рецензента за очень ценные замечания и поправки.

Литература

[1] J. Harer, D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Invent Math., **85**:3 (1986), 457–485.

[2] С. К. Ландо, *Лекции о производящих функциях*, МЦНМО, 2002.

[3] S. Lando, A. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Encyclopedia of Math. Sciences, vol. 141, Springer-Verlag, 2004.

[4] J. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I*, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 275–292.

[5] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants*, *Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1994.

[6] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, in: First European Congress of Math., Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., vol. 120, Birkhauser, Basel, 1994, 97–121.

[7] М. Л. Концевич, *Теория пересечений на пространстве модулей кривых*, Функц. анализ и его прил., **25**:2 (1991), 50–57.

Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А. И. Алиханова
Московский физико-технический институт
e-mail: akhmedov@itep.ru

Московский физико-технический институт
Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А. И. Алиханова
e-mail: shakirov@itep.ru

Поступило в редакцию
17 декабря 2007 г.