

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Климов, Затухание собственных колебаний гироскопа в кардановом подвесе с сухим трением, *Докл. АН СССР*, 1958, том 123, номер 3, 410–412

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

18 марта 2025 г., 03:44:10



Д. М. КЛИМОВ

**ЗАТУХАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСКОПА
В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 28 VI 1958)

1. В настоящей заметке рассматривается движение уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе на неподвижном основании; ротор гироскопа и кольца считаются невесомыми, но, разумеется, имеющими массу. Предполагается, что в осях подвеса имеются силы трения и их величина пропорциональна динамическим реакциям, все прочие внешние воздействия отсутствуют. Исследование, проведенное, как и в работе (1), с помощью «изображающей» точки, показало, что собственные колебания гироскопа затухают.

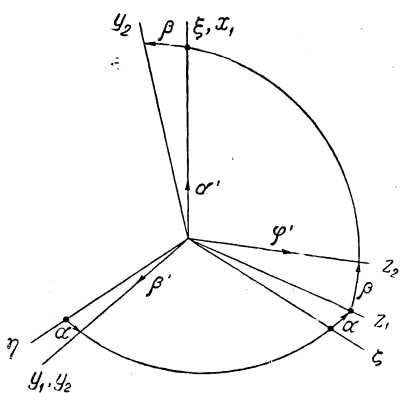


Рис. 1

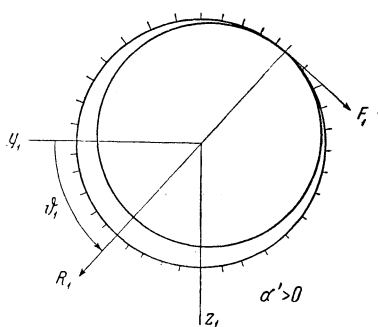


Рис. 2

2. Свяжем с неподвижным основанием, внешним кольцом и внутренним кольцом, соответственно, три системы координат $\xi\eta\zeta$, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ с общим началом в центре карданова подвеса. Направим оси ξ и x_1 по оси внешнего кольца, оси y_1 и y_2 — по оси внутреннего кольца, ось z_2 — по оси ротора гироскопа. Положение гироскопической системы будем определять углами α , β и φ , направление отсчета которых показано на рис. 1.

Пусть, далее, K_{x_1} , K_{y_1} , K_{z_1} — суммы моментов сил воздействия основания на внешнее кольцо относительно осей x_1 , y_1 , z_1 ; L_{x_1} , L_{y_1} , L_{z_1} — суммы моментов сил, действующих на внутреннее кольцо со стороны внешнего кольца; M_{x_2} , M_{y_2} , M_{z_2} — моменты воздействия внутреннего кольца на ротор (2).

Рассмотрим силы взаимодействия в одном из подшипников внешнего кольца. Следуя И. И. Метелицыну, будем считать, что на внешнее кольцо действует сила реакции R_1 , образующая с осью y_1 угол ϑ_1 и перпендикулярная к оси вращения. Сила трения $F_1 = f_1 R_1$ направлена перпендикулярно к силе реакции и препятствует вращению внешнего кольца (рис. 2). Во втором подшипнике величины сил реакции и трения будут те же, что и в

первом, а направление противоположным. Из указанных предположений следует, что

$$K_{x_1} = -2f_1 r_1 R_1 \operatorname{sign} \alpha', \quad K_{y_1} = -R_1 l_1 (\sin \vartheta_1 + f_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha'),$$

$$K_{z_1} = R_1 l_1 (\cos \vartheta_1 - f_1 \sin \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha'),$$

$$L_{x_1} = R_2 l_2 (\cos \vartheta_2 - f_2 \sin \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta'), \quad L_{y_1} = -2f_2 r_2 R_2 \operatorname{sign} \beta',$$

$$L_{z_1} = -R_2 l_2 (\sin \vartheta_2 + f_2 \cos \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta'),$$

$$M_{x_2} = -Rl (\sin \vartheta + f \cos \vartheta), \quad M_{y_2} = Rl (\cos \vartheta - f \sin \vartheta), \quad M_{z_2} = -2frR,$$

где r_1, r_2, r — радиусы подшипников; l_1, l_2, l — длины осей внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора, соответственно; ϑ_2 — угол между силой воздействия R_2 внешнего кольца на внутреннее и осью z_1 ; ϑ — угол между силой воздействия R внутреннего кольца на ротор и осью x_2 .

Составляя уравнения движения для внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора, получим систему из 9 дифференциальных уравнений

$$A_1 \alpha'' = -2f_1 r_1 R_1 \operatorname{sign} \alpha' - R_2 l_2 (\cos \vartheta_2 - f_2 \sin \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta'),$$

$$0 = -R_1 l_1 (\sin \vartheta_1 - f_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') + 2f_2 r_2 R_2 \operatorname{sign} \beta',$$

$$0 = R_1 l_1 (\cos \vartheta_1 - f_1 \sin \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') + R_2 l_2 (\sin \vartheta_2 + f_2 \cos \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta'),$$

$$A_2 \frac{d}{dt} (\alpha' \cos \beta) + (C_2 - B_2) \alpha' \beta' \sin \beta =$$

$$= R_2 l_2 (\cos \vartheta_2 - f_2 \sin \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta') \cos \beta +$$

$$+ R_2 l_2 (\sin \vartheta_2 + f_2 \cos \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta') \sin \beta + Rl (\sin \vartheta + f \cos \vartheta), \quad (1)$$

$$B_2 \beta'' + (A_2 - C_2) \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta = -2f_2 r_2 R_2 \operatorname{sign} \beta' - Rl (\cos \vartheta - f \sin \vartheta),$$

$$C_2 \frac{d}{dt} (\alpha' \sin \beta) + (B_2 - A_2) \alpha' \beta' \cos \beta =$$

$$= R_2 l_2 (\cos \vartheta_2 - f_2 \sin \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta') \sin \beta -$$

$$- R_2 l_2 (\sin \vartheta_2 + f_2 \cos \vartheta_2 \operatorname{sign} \beta') \cos \beta + 2frR,$$

$$A \frac{d}{dt} (\alpha' \cos \beta) + H\beta' - A\alpha' \beta' \sin \beta = -Rl (\sin \vartheta + f \cos \vartheta),$$

$$A\beta'' + A\alpha'^2 \sin \beta \cos \beta - H\alpha' \cos \beta = Rl (\cos \vartheta - f \sin \vartheta),$$

$$\frac{d}{dt} [C (\alpha' \sin \beta + \varphi')] = \frac{dH}{dt} = -2frR.$$

3. Предположим, что трение в оси ротора отсутствует, т. е. $f = 0$. Считая углы α, β и угловые скорости α', β' малыми величинами и пренебрегая их квадратами, произведениями и членом $\alpha''\beta$, получим из (1) систему уравнений

$$J_1 x' + Hy = -\alpha_1 |J_3 y' - Hx| \operatorname{sign} x, \quad (2)$$

$$J_3 y' - Hx = -a_2 |J_2 x' + Hy| \operatorname{sign} y.$$

Здесь

$$\alpha' = x, \quad \beta' = y, \quad A + A_1 + A_2 = J_1, \quad A + A_2 = J_2, \quad A + B_2 = J_3,$$

$$\frac{2f_1 r_1}{l_1 \sqrt{1+f_1^2}} = a_1 > 0, \quad \frac{2f_2 r_2}{l_2 \sqrt{1+f_2^2}} = a_2 > 0.$$

4. Рассмотрим движение «изображающей» точки на плоскости x, y . Можно показать, что:

1) в I четверти, где $x > 0, y > 0$, и в III четверти, где $x < 0, y < 0$, движение гироскопа описывается уравнениями

$$J_1 x' + Hy = a_1 (J_3 y' - Hx), \quad x' = -\frac{1 + a_1 a_2}{J_1 + a_1 a_2 J_2} Hy; \quad (3)$$

2) во II четверти, где $x < 0, y > 0$, и в IV четверти, где $x > 0, y < 0$, оно приобретает форму

$$J_1 x' + Hy = -a_1 (J_3 y' - Hx), \quad x' = -\frac{1 - a_1 a_2}{J_1 - a_1 a_2 J_2} Hy. \quad (4)$$

Обозначив

$$m_1 = \frac{J_1 + a_1 a_2 J_2}{J_3 (1 + a_1 a_2)}, \quad m_2 = \frac{J_1 - a_1 a_2 J_2}{J_3 (1 - a_1 a_2)}, \quad n_1 = \frac{a_2 A_1}{J_3 (1 + a_1 a_2)}, \quad n_2 = \frac{a_2 A_1}{J_3 (1 - a_1 a_2)}.$$

запишем (3) и (4) в виде одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -m_i \frac{x}{y} + n_i \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

интегрируя которое, получим

$$\ln (y^2 - n_i x y + m_i x^2) = M - \frac{n_i}{p_i} \operatorname{arctg} \frac{2y - n_i x}{2p_i x} \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

где $p_i^2 = m_i - n_i^2/4$.

Из соотношения (6) находим

$$y_k = y_0 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^k \exp \left\{ k \left[\frac{n_2}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{n_2}{2p_2} - \frac{n_1}{p_1} \operatorname{arctg} \frac{n_1}{2p_1} - \left(\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$x_k = x_0 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^k \exp \left\{ k \left[\frac{n_2}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{n_2}{2p_2} - \frac{n_1}{p_1} \operatorname{arctg} \frac{n_1}{2p_1} - \left(\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (8)$$

где x_0, y_0 — величины отрезков, отсекаемых на координатных осях точкой $P(x, y)$ во время начала движения, а x_k, y_k — после k ее оборотов вокруг начала координат. Из формул (7) и (8) видно, что собственные колебания гироскопа затухают с течением времени, так как $m_2 > m_1$, а a_1 и a_2 обычно значительно меньше 1, и поэтому $\operatorname{arctg} \frac{n_2}{2p_2} - \frac{\pi}{2} < 0$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 VI 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. Л. Николаи, Труды по механике, М., 1955. ² А. Ю. Ишлинский, Прикл. матем и мех., 21, в. I (1957).