Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. П. Осколков, К теории нестационарных течений жидкостей Максвелла и водных растворов полимеров, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 127, 158–168

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
23 января 2025 г., 19:31:40

А.П.Осколков

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ МАКСВЕЛЛА И ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

В работе [I] О.А.Ладыженская разработала метод доказательства существования классических решений задачи Коши и основной начально-краевой задачи для уравнений Эйлера, а также задачи Коши и периодической начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса, основу которого составляет получение априорных оценок решений упомянутых задач в пространствах $W_2^m(\mathfrak{R})$ с $m \geqslant 2$. В настоящей работе этот метод применяется для доказательства существования решений периодической начально-краевой задачи и задачи Коши для двух систем уравнений: системы интегродифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}(v) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(v + \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \frac{\partial^l v}{\partial t^l}\right) - \nu \Delta v - \sum_{l=1}^{L-1} \varkappa_l \frac{\partial^l \Delta v}{\partial t^l} - \int_0^t M(t-\tau)\Delta v(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \frac{\partial^l}{\partial t^l}\right) \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0; \quad \nu, \lambda_L, \varkappa_{L-1} > 0; \quad L = 1, 2, \dots, \tag{I}$$

и системы дифференциальных уравнений

$$\mathcal{M}(v) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \sum_{l=1}^{L+1} \lambda_l \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} (v + \varkappa \operatorname{rot}^2 v) - \varkappa \sum_{l=1}^{L+1} \left(1 - \frac{1}{l}\right) \lambda_l \frac{\partial^l \operatorname{rot}^2 v}{\partial t^l} + \nu \operatorname{rot}^2 v +$$

$$+ \sum_{l=1}^{L+1} \lambda_l \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0; \quad \varkappa, \nu, \lambda_L > 0; \quad L = 0, 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Система (I) содержит в себе в качестве частных случаев уравнения движения жидкостей Максвелла [5] - [7] : при $M(s) \equiv 0, s \geqslant 0$; $L = 1, 2, \dots$ - это система дифференциальных уравнений движения жидкостей Максвелла порядка L [5] - [6] ; при $L = 1$ сформулированных в [7] условиях на ядро $M(s)$ и коэффициент $\nu > 0$ - это система интегродифференциальных уравнений движения жидкостей Максвелла порядка $N = 1, 2, \dots$.

Система (2) возникает при описании движения нелинейных вязкоупругих жидкостей [3] - [5] , [7] - [10] ; при $L=0$ она описывает течения водных растворов полимеров [8] - [9] .

Введем следующие обозначения. Пусть $\Omega^{(1)} \equiv \{x \in E^3 : 0 < x_i < 1, i=1,2,3\}$, $Q_T^{(1)} \equiv \Omega^{(1)} \times (0,T)$, $0 < T < \infty$; $\tilde{H}_2^m(\Omega^{(1)})$ - подпространство периодических соленоидальных векторов из $W_2^m(\Omega^{(1)})$, $m=2,3,\ldots$. Пусть, далее, $R_T \equiv E^3 \times (0,T)$; $H_2^m(E^3)$ - подпространство финитных соленоидальных векторов из $W_2^m(E^3)$, $m=2,3,\ldots$.

Для систем (I) и (2) мы рассмотрим две задачи: периодическую начально-краевую задачу, состоящую в нахождении в $Q_T^{(1)}$ решений системы (I) или, соответственно, (2), удовлетворяющих начальным условиям Коши:

$$\left.\frac{\partial^s v}{\partial t^s}\right|_{t=0} = v_{0s}(x),\ x \in \Omega^{(1)},\ s=0,1,\ldots,L;\ \left.\frac{\partial^s p}{\partial t^s}\right|_{t=0} = p_{0s}(x),\ x \in \Omega^{(1)},\ s=0,1,\ldots,L-1, \quad (3)$$

и условиям периодичности по переменным x_i, $i=1,2,3$, с периодом I для $v(x,t)$ и $p(x,t)$, $t > 0$; задачу Коши, состоящую в нахождении в R_T решений системы (I) или, соответственно, (2), удовлетворяющих в E^3 начальным условиям Коши (3).

Результаты настоящей работы являются ответом на вопросы, поставленные О.А.Ладыженской во время доклада автора весной 1982 года на ее семинаре по нелинейным задачам математической физики в ЛОМИ результатов исследований по гидродинамике неньютоновских жидкостей (оценка (I8) для задачи Коши (2), (3) была получена ранее в работе автора [3]). Считаю своим приятным долгом выразить О.А.Ладыженской благодарность за постановку задач и внимание к работе.

I. В этом разделе мы докажем теоремы существования "в малом" единственного классического решения периодической начально-краевой задачи и задачи Коши для системы (I).

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x) \in \tilde{H}_2^{m+2}(\Omega^{(1)})$, $s=0,1,\ldots,L$; $p_{0sx}(x) \in \tilde{W}_2^m(\Omega^{(1)})$, $s=0,1,\ldots,L-1$; $f(x,t) \in C^{(1)}[0,T; W_2^m(\Omega^{(1)})]$; $m=2,3,\ldots$; $M(t) \in C^{(1)}[0,T]$. Тогда найдется такое $T^* \equiv T^*(\|v_{0s}\|^{(4)}_{2,\Omega^{(1)}}; \|f\|_{C[0,T;W_2^2(\Omega^{(1)})]})$, что при $T < T^*$ периодическая начально-краевая задача (I), (3) имеет в $Q_T^{(1)}$ единственное решение (v,p) : $v \in W_\infty^{L-1}(0,T;\tilde{H}_2^{m+2}(\Omega^{(1)})) \cap W_\infty^L(0,T;\tilde{H}_2^{m+1}(\Omega^{(1)})) \cap W_\infty^{L+1}(0,T;\tilde{H}_2^m(\Omega^{(1)}))$, $p_x \in W_\infty^L(0,T;\tilde{W}_2^m(\Omega^{(1)}))$, это решение удовлетворяет системе (I) п.в.в $Q_T^{(1)}$ и для него имеет место оценка

$$
\|v\|_{W_\infty^{L-1}(0,T;\,W_2^{m+2}(\mathfrak{R}^{(1)}))}+\left\|\frac{\partial^L v}{\partial t^L}\right\|_{L_\infty(0,T;\,W_2^{m+1}(\mathfrak{R}^{(1)}))}+
$$

$$
+\left\|\frac{\partial^{L+1} v}{\partial t^{L+1}}\right\|_{L_\infty(0,T;\,W_2^{m}(\mathfrak{R}^{(1)}))}+\|P_x\|_{W_\infty^{L}(0,T;\,W_2^{m}(\mathfrak{R}^{(1)}))}\leq
$$

$$
\leq C_1\left(\|v_{0s}\|_{2,\mathfrak{R}^{(1)}}^{(m-2)};\ \|f\|_{C^{(1)}[0,T;\,W_2^m(\mathfrak{R}^{(1)})]};\ T;\ \lambda_L^{-1};\ \varkappa_{L-1}^{-1}\right),
\tag{4}
$$

причем $C_1 \to \infty$ при $T \to T^*$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x)\in H_2^{m+2}(E^3)$, $s=0,1,\dots,L$; $P_{0sx}(x)\in W_2^m(E^3)$, $s=0,1,\dots,L-1$; $f\in C^{(1)}[0,T;W_2^m(E^3)]$; $m=2,3,\dots$; $M(t)\in C^{(1)}[0,T]$. Тогда найдется такое $T^*\equiv T^*(\|v_{0s}\|_{2,E^3}^{(4)};\|f\|_{C[0,T;W_2^2(E^3)]})$, что при $T<T^*$ задача Коши (I), (3) имеет в R_T единственное решение (v,P) : $v\in W_\infty^{L-1}(0,T;H_2^{m+2}(E^3))\cap W_\infty^{L}(0,T;H_2^{m+1}(E^3))\cap W_\infty^{L+1}(0,T;H_2^{m}(E^3))$, $P_x\in W_\infty^L(0,T;W_2^m(E^3))$, это решение удовлетворяет системе (I) п.в.в R_T и для него имеет место оценка:

$$
\|v\|_{W_\infty^{L-1}(0,T;\,W_2^{m+2}(E^3))}+\left\|\frac{\partial^L v}{\partial t^L}\right\|_{L_\infty(0,T;\,W_2^{m+1}(E^3))}+
$$

$$
+\left\|\frac{\partial^{L+1} v}{\partial t^{L+1}}\right\|_{L_\infty(0,T;\,W_2^{m}(E^3))}+\|P_x\|_{W_\infty^{L}(0,T;\,W_2^{m}(E^3))}\leq
$$

$$
\leq C_2\left(\|v_{0s}\|_{2,E^3}^{(m+2)};\ \|f\|_{C^{(1)}[0,T;\,W_2^m(E^3)]};\ T;\ \lambda_L^{-1};\ \varkappa_{L-1}^{-1}\right),
\tag{5}
$$

причем $C_2 \to \infty$ при $T \to T^*$

Как и в работе О.А.Ладыженской [I] , основу доказательства теорем I и 2 составляет получение априорных оценок (4) и (5) для периодической начально-краевой задачи (I), (3) и задачи Коши (I), (3) соответственно. В основе же доказательства оценок (4) и (5) лежат, как и в [I] , следующие аналитические факты:

пусть $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}^{(1)} \in E^3$ или, соответственно, $\mathfrak{R} \equiv E^3$, и пусть $m = 2,3,\ldots$. При вычислении скалярного произведения $\Big(\mathcal{L}(v), v + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}\Big)^{(m)}_{2,\mathfrak{R}}$ ж) при периодических граничных условиях в случае $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}^{(1)}$ или условиях убывания решения и его производных при $|x| \to \infty$ в случае $\mathfrak{R} \equiv E^3$ наиболее "неприятный" интеграл, содержащий наиболее высокие производные по x, обращается в нуль:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} v_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^m}{\partial x^m}\Big(v + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}\Big) \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^m}\Big(v + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}\Big) dx = 0, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

а остальные знаконеопределенные интегралы при $m = 2,3,\ldots$ оцениваются через положительные интегралы. В результате, применяя неравенства Гельдера и Коши и используя теоремы вложения С.Л.Соболева, получим неравенство:

$$\frac{dy^2(t)}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \sum_{\ell=1}^{L} \left[\left(\left\| \frac{\partial^{\ell-1} v}{\partial t^{\ell-1}} \right\|^{(m+1)}_{2,\mathfrak{R}}\right)^2 + \left(\left\| \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell} \right\|^{(m)}_{2,\mathfrak{R}}\right)^2\right] \leq$$

$$\leq C_3(t; \lambda_L^{-1}; \varkappa_{L-1}^{-1})\Big[y^3(t) + \|f\|_{C[0,T; W_2^m(\mathfrak{R})]} \cdot y(t)\Big], \; t \geq 0, \; m = 2,3,\ldots, \tag{7}$$

а из этого неравенства при

$$T < T^* \equiv C_3\Big[y(0) + \|f\|_{C[0,T; W_2^m(\mathfrak{R})]}\Big]^{-1} \tag{8}$$

получим неравенство (ср. [I]):

$$\|v\|_{W_\infty^{L-1}(0,T; W_2^{m+1}(\mathfrak{R}))} + \left\| \frac{\partial^L v}{\partial t^L} \right\|_{L_\infty(0,T; W_2^m(\mathfrak{R}))} \leq$$

$$\leq C_4\Big(\|v_{0s}\|^{(m+1)}_{2,\mathfrak{R}}; \|f\|_{C[0,T; W_2^m(\mathfrak{R})]}; T; \lambda_L^{-1}; \varkappa_{L-1}^{-1}\Big); \; C_4 \to \infty, T \to T^*. \tag{9}$$

ж) Напомним, что $\quad (u,w)^{(m)}_{2,\mathfrak{R}} \equiv \int\limits_{\mathfrak{R}} \Big(\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^m w}{\partial x^m} + uw\Big) dx \quad [I].$

Далее, при вычислении скалярного произведения $\left((\mathcal{L}(v))_t, \frac{\partial}{\partial t}(v + \sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell})\right)^{(m)}_{2,\Omega}$ – по-прежнему при периодических граничных условиях в случае $\Omega \equiv \Omega^{(1)}$ или условиях убывания решения и его производных при $|x| \to \infty$ в случае $\Omega \equiv E^3$, все знаконеопределенные интегралы – наиболее "неприятный" из них $J_{L,m} \equiv \int_\Omega v_{kt} \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^L \partial x^m \partial x_k} \cdot \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^{L+1} \partial x^m} dx$ оцениваются при $m=2,3,\dots$ с помощью теорем вложения С.Л.Соболева через постоянную C_4, начальные условия и положительные интегралы, например,

$$|J_{L,m}| \le \max_{Q_T} |v_t| \cdot \left\| \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^{L+1} \partial x^m} \right\|_{2,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^{L} \partial x^{m+1}} \right\|_{2,\Omega} \le$$

$$\le C_5(C_4) \left\| \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^{L+1} \partial x^m} \right\|_{2,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial^{L+m+1} v}{\partial t^{L} \partial x^{m+1}} \right\|_{2,\Omega}, \quad 0<t<T^* . \tag{10}$$

В результате при $T < T^*$ получим неравенство:

$$\|v\|_{W^L_\infty(0,T;\, W_2^{m+1}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial^{L+1} v}{\partial t^{L+1}} \right\|_{L_\infty(0,T;\, W_2^m(\Omega))} \le$$

$$\le C_6\left(\|v_0\|^{(m+2)}_{2,\Omega} ; \|f\|_{C^{(1)}[0,T;\, W_2^m(\Omega)]} ; T ; \lambda_L^{-1} ; \varkappa_{L-1}^{-1} \right) . \tag{11}$$

Наконец, переписывая систему (I) в виде

$$-\nu\Delta v - \sum_{\ell=1}^{L-1} \varkappa_\ell \frac{\partial^\ell \Delta v}{\partial t^\ell} + \left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\right) \operatorname{grad} p = f - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(v + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}\right) +$$

$$+ \int_0^t M(t-\tau)\Delta v(\tau)\, d\tau, \quad \operatorname{div} v = 0 , \tag{12}$$

используя результаты В.А.Солонникова [II] о свойствах оператора $\tilde{\Delta}$ (см. [2], гл.I) и его обратного $\tilde{\Delta}^{-1}$ в пространствах

$W_2^m(\Omega)\cap H(\Omega)$ и используя оценку (II), получим неравенство (см.также [4], [5], [7]):

$$\|v\|_{W_\infty^{L-1}(0,T;W_2^{m+2}(\Omega))}+\|p_x\|_{W_\infty^L(0,T;W_2^m(\Omega))}\le$$

$$\le C_7(C_6;\ \|p_{0sx}\|_{2,\Omega}^{(m)};\ T). \tag{13}$$

Оценки (II) и (I3) составляют вместе априорные оценки (4) и (5) для решений периодической начально-краевой задачи (I), (3) и задачи Коши (I), (3) соответственно.

На основании оценок (4) и (5) существование решений периодической начально-краевой задачи (I), (3) и задачи Коши (I), (3), гарантированных теоремами I и 2, доказывается, как и в работе [I], методом Галеркина. Единственность этих решений доказывается энергетическим методом [2].

2. В этом разделе мы докажем теоремы существования "в малом" слабых (по t) решений периодической начально-краевой задачи (2), (3) и задачи Коши (2), (3) из классов $W_\infty^{L-1}(0,T;W_2^{m+2}(\Omega))$, $m=2,3,\dots$.

Пусть Ω – единичный куб $\Omega^{(1)}\in E^3$ или, соответственно, $\Omega=E^3$; $Q_T=\Omega^{(1)}\times(0,T)$ или $E^3\times(0,T)$. Назовем слабым (по t) решением периодической начально-краевой задачи (2), (3) или, соответственно, слабым (по t) решением задачи Коши (2), (3) из класса $W_\infty^L(0,T;W_2^{m+2}(\Omega))$, $m=2,3,\dots$, функцию $v(x,t)$, $\operatorname{div} v=0$, у которой конечна норма $\|v\|_{W_\infty^L(0,T;W_2^{m+2}(\Omega))}$ и производная $\frac{\partial^L v}{\partial t^L}$ слабо непрерывна по $t\in[0,T]$ в $W_2^{m+1}(\Omega)$, которая удовлетворяет начальным условиям (3) при $s=0,1,\dots,L-1$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_t}\Big\{\Big(\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}+\nu\,\mathrm{rot}^2v+\varkappa\sum_{\ell=1}^{L-1}\frac{\lambda_\ell}{\ell}\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\mathrm{rot}^2v\Big)\Phi-\Big(\lambda_L\frac{\partial^L v}{\partial t^L}+\frac{\varkappa\lambda_L}{L}\frac{\partial^L\mathrm{rot}^2v}{\partial t^L}\Big)\Phi_t-$$

$$+v_k\sum_{\ell=1}^{L+1}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(v+\varkappa\,\mathrm{rot}^2v)\cdot\Phi_{x_k}\Big\}dx\,dt+\lambda_L\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^L}{\partial t^L}(v+\varkappa\,\mathrm{rot}^2v)\Phi\Big|^{t=t}dx=$$

$$=\iint\limits_{Q_t}f\Phi\,dx\,dt+\lambda_L\int\limits_{\Omega}\Phi(x,0)\Big[v_{0,L}(x)+\frac{\varkappa\lambda_L}{L}\mathrm{rot}^2v_{0,L}(x)\Big]dx,\ 0<t\le T,\ \forall\Phi\in\dot J(Q_T). \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x)\in \tilde{H}_2^{m+2}(\mathfrak{R}^{(1)}), s=0,1,\ldots,L$; $f\in C[0,T; W_2^m(\mathfrak{R}^{(1)})]$, $m=2,3,\ldots$. Тогда найдется такое $T^*=T^*(\|v_{0s}\|^{(4)}_{2,\mathfrak{R}^{(1)}}; \|f\|_{C[0,T; W_2^2(\mathfrak{R}^{(1)})]})$, что при $T<T^*$ периодическая начально-краевая задача (2), (3) имеет в $Q_T^{(1)}$ по крайней мере одно слабое (по t) решение $v(x,t)$ из класса $W_\infty^L(0,T; \tilde{H}_2^{m+2}(\mathfrak{R}^{(1)})$, и для него имеет место оценка:

$$\|v\|_{W_\infty^L(0,T;\tilde{H}_2^{m+2}(\mathfrak{R}^{(1)}))} \le C_8(\|v_{0s}\|^{(m+2)}_{2,\mathfrak{R}^{(1)}}; \|f\|_{C[0,T;W_2^m(\mathfrak{R}^{(1)})]}; T; \varkappa^{-1}; \lambda_L^{-1}), \tag{15}$$

причем $C_8 \to \infty$ при $T\to T^*$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x)\in H_2^{m+2}(E^3), s=0,1,\ldots,L$; $f\in C[0,T; W_2^m(E^3)]$; $m=2,3,\ldots$. Тогда найдется такое $T^*=T^*(\|v_{0s}\|^{(4)}_{2,E^3}; \|f\|_{C[0,T;W_2^2(\mathfrak{R})]})$, что при $T<T^*$ задача Коши (2), (3) имеет в R_T, по крайней мере одной слабое (по t) решение $v(x,t)$ из класса $W_\infty^L(0,T; H_2^{m+2}(E^3))$, и для него имеет место оценка:

$$\|v\|_{W_\infty^L(0,T;H_2^{m+2}(E^3))} \le C_9(\|v_{0s}\|^{(m+2)}_{2,E^3}; \|f\|_{C[0,T;W_2^m(E^3)]}; T; \varkappa^{-1}; \lambda_L^{-1}), \tag{16}$$

причем $C_9\to\infty$ при $T\to T^*$.

Для доказательства теорем 3 и 4 мы используем прежде всего метод введения "исчезающей вязкости" - введем систему с малым параметром $\varepsilon>0$

$$\mathcal{M}_\varepsilon(v^\varepsilon) = \mathcal{M}(v^\varepsilon) - \varepsilon\, \mathrm{rot}^4 \frac{\partial^L v^\varepsilon}{\partial t^L} = f, \quad \mathrm{div}\, v^\varepsilon = 0, \tag{17}$$

и рассмотрим периодическую начально-краевую задачу (17), (3) и задачу Коши (17), (3). Тогда справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x)\in \tilde{H}_2^{m+3}(\mathfrak{R}^{(1)}), s=0,1,\ldots,L$; $f\in C[0,T; W_2^m(\mathfrak{R}^{(1)})]$; $m=2,3,\ldots$. Тогда найдется такое $T^* = T^*(\|v_{0s}\|^{(4)}_{2,\mathfrak{R}^{(1)}}; \|f\|_{C[0,T;W_2^2(\mathfrak{R}^{(1)})]})$, что при $T<T^*$ периодическая начально-краевая задача (17), (3) при $\forall\varepsilon>0$ имеет единственное слабое (по t) решение $v^\varepsilon(x,t)$ из класса $W_\infty^L(0,T; \tilde{H}_2^{m+3}(\mathfrak{R}^{(1)}))$ и для него имеет место оценка:

$$\left\| v^{\varepsilon} \right\|^2_{W^{l}_{\infty}(0,T;\,\tilde{H}^{m+2}_2(\mathfrak{R}^{(1)}))} + \varepsilon \left\| \frac{\partial^{l+m+3} v^{\varepsilon}}{\partial t^{l} \partial x^{m+3}} \right\|^2_{2,Q^{(1)}_T} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left(\left\| v_{0s} \right\|^{(m+3)}_{2,\mathfrak{R}^{(1)}} ;\, \left\| f \right\|_{C[0,T;\,W^{m}_2(\mathfrak{R}^{(1)})]} ;\, T;\, \varkappa^{-1};\, \lambda^{-1}_{l} \right), \tag{18}$$

причем C_{10} не зависит от и $C_{10} \to \infty$ при $T \to T^*$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия: $v_{0s}(x) \in H^{m+3}_2(E^3)$, $s=0,1,\ldots,l$; $f \in C[0,T;\,W^{m}_2(E^3)]$; $m=2,3,\ldots$. Тогда найдется такое $T^* \equiv T^*(\|v_{0s}\|^{(4)}_{2,E^3};\|f\|_{C[0,T;W^2_2(E^3)]})$, что при $T < T^*$ задача Коши (I7), (3) при $\forall \varepsilon > 0$ имеет в R_T единственное слабое (по t) решение $v^{\varepsilon}(x,t)$ из класса $W^{l}_{\infty}(0,T;\,H^{m+3}_2(E^3))$ и для него имеет место оценка:

$$\left\| v^{\varepsilon} \right\|^2_{W^{l}_{\infty}(0,T;\,H^{m+2}_2(E^3))} + \varepsilon \left\| \frac{\partial^{l+m+3} v^{\varepsilon}}{\partial t^{l} \partial x^{m+3}} \right\|^2_{2,R_T} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left(\left\| v_{0s} \right\|^{(m+3)}_{2,E^3} ;\, \left\| f \right\|_{C[0,T;\,W^{m}_2(E^3)]} ;\, T;\, \varkappa^{-1};\, \lambda^{-1}_{l} \right), \tag{19}$$

причем C_{11} не зависит от и $C_{11} \to \infty$ при $T \to T^*$.

Теоремы 3 и 4 суть соответственно следствия теорем 5 и 6 и теоремы о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве (ср. [4] - [5] , [10]).

Основу доказательства теорем 5 и 6, как и теорем I и 2 составляет получение априорных оценок (I6) и (I7) соответственно. В основе же доказательства оценок (I6) и (I7) лежат следующие аналитические факты: при вычислении скалярного произведения $\left(\mathcal{M}_{\varepsilon}(v^{\varepsilon}), \sum_{l=1}^{l+1} \lambda_l \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon} + \varkappa\, \mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon})\right)^{(m)}_{2,\mathfrak{R}}$, $m=2,3,\ldots$, при периодических граничных условиях в случае $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)}$ или условиях убывания v^{ε} и его производных при $|x| \to \infty$ в случае $\mathfrak{R} = E^3$ наиболее "неприятный" интеграл, содержащий производные наиболее высокого порядка по x, обращается в нуль:

$$\int_{\Omega} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left| \frac{\partial^{l+m} \omega t^2 v^{\varepsilon}}{\partial t^l \partial x^m} \right|^2 dx = 0, \quad t \geq 0, \tag{20}$$

а остальные знаконеопределенные интегралы при $m = 2, 3, \ldots$ оцениваются через независящие от $\varepsilon > 0$ положительные интегралы. В результате, применяя неравенства Гельдера и Коши и используя теоремы вложения С.Л.Соболева, получим неравенство (ср. [3]):

$$\frac{d y_{\varepsilon}^2(t)}{dt} + \varepsilon \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{l+m+3} v^{\varepsilon}}{\partial t^l \partial x^{m+3}} \right|^2 dx \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt} \sum_{\ell=1}^{l+1} \left(\left\| \frac{\partial^{\ell-1} v^{\varepsilon}}{\partial t^{\ell-1}} \right\|_{2,\Omega}^{(m+2)} \right)^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial^{l+m+3} v^{\varepsilon}}{\partial t^l \partial x^{m+3}} \right\|_{2,\Omega}^2 \leq$$

$$\leq C_{12}(t; \varkappa^{-1}; \lambda_l^{-1}) \left(y_{\varepsilon}^3(t) + \|f\|_{C[0,t; W_2^m(\Omega)]} \cdot y_{\varepsilon}(t) \right), \quad t \geq 0, \tag{21}$$

а из этого неравенства при $T < T^*$, где T^* удовлетворяет условиям типа (8), получим неравенство:

$$\|v^{\varepsilon}\|^2_{W^l_{\infty}(0,T; W_2^{m+2}(\Omega))} + \varepsilon \left\| \frac{\partial^{l+m+3} v^{\varepsilon}}{\partial t^l \partial x^{m+3}} \right\|^2_{2, Q_T} \leq$$

$$\leq C_{13}\left(\|v_{03}\|_{2,\Omega}^{(m+3)}; \|f\|_{C[0,T; W_2^m(\Omega)]}; T; \varkappa^{-1}; \lambda_l^{-1} \right), \tag{22}$$

причем постоянная C_{13} не зависит от $\varepsilon > 0$ и $C_{13} \to \infty$ при $T \to T^*$. Оценка (22) и есть соответственно оценка (18) при $\Omega = \Omega^{(1)}$ и оценка (19) при $\mathfrak{R} = E^3$.

На основании оценок (18) и (19) существование решений периодической начально-краевой задачи (17), (3) и задачи Коши (17), (3) доказывается модифицированным методом Галеркина (см. [4] - [5], [10]): именно, в пространстве $\tilde{H}_2^{m+3}(\mathfrak{R}^{(1)})$ или, соответственно, пространстве $H_2^{m+3}(E^3)$ выбирается базис $\{\varphi^k(x)\}, k=1,2,\ldots$, и по нему строится система функций $\{a^k(x)\}$, удовлетворяющих уравнению $\varkappa\, \mathrm{rot}^2 a^k + a^k = \varphi^k(x),\ x\in\mathfrak{R}$, и удовлетворяющих либо периодическим граничным условиям, если $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)}$, либо убывающих вместе с производными при $|x|\to\infty$, если $\mathfrak{R} = E^3$, система $\{a^k(x)\}$, $k=1,2,\ldots$, также является базисом в пространстве $\tilde{H}_2^{m+3}(\mathfrak{R}^{(1)})$, или, соответственно, пространстве $H_2^{m+3}(E^3)$. После этого N - ое приближение по Галеркину ищется в виде $v^{\varepsilon,N}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_{kN}(t)\, a^k(x)$ из условий ортогональности $(\mathfrak{M}_\varepsilon(v^{\varepsilon,N}) - f, \varphi^n)^{(m)}_{2,\mathfrak{R}} = 0,\ n=1,\ldots,N$, которые гарантируют получение для $\{v^{\varepsilon,N}\}$ равномерных по $\varepsilon>0$ и $N=1,2,\ldots$ оценок (18) или (19) соответственно.

Единственность решений v^ε в теоремах 5 и 6 доказывается энергетическим методом [2] (ср. [3]).

Литература

1. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О разрешимости в малом нестационарных задач для идеальных и вязких жидкостей и исчезающей вязкости. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1971, т.21, с.65-78.
2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязких несжимаемых жидкостей. 1-ое изд., М., 1961; 2-ое изд., М., 1970.
3. О с к о л к о в А.П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1975, т.127, с.32-57.
4. О с к о л к о в А.П. О нестационарных течениях упруговязких жидкостей. - Препринт ЛОМИ Р-2-80, Л., 1980, 39 с.
5. О с к о л к о в А.П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей.IУ. - Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1981, т.110, с.141-162.
6. О с к о л к о в А.П. К теории жидкостей Максвелла. - Зап. науч.семин.ЛОМИ, 1981, т.101, с.89-101.
7. О с к о л к о в А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. - Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., 1983, 64 с.

8. О с к о л к о в А.П. О разрешимости "в целом" первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-ого порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости. - Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1972, т.27, с.145-160.
9. О с к о л к о в А.П. О единственности и разрешимости " в целом" краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1973, т.38, с.98-136.
10. О с к о л к о в А.П. К теории нестационарных течений нелинейных вязкоупругих жидкостей. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1982, т.120, с.142-158.
11. С о л о н н и к о в В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса-Ниренберга.ч.I - Изв.АН СССР, сер.матем., 1964, т.28, с.665-706; ч.П - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1966, т.92, с.233-297.

Oskolkov A.P. On the theory of nonstationary flows of the Maxwell liquids and nonlinear visco-elastic liquids.

The existence "in small" of uniqueness classical solution of periodic initial-boundary problem and Cauchy problem for the system (1) and the existence "in small" at the least one generalized solution periodic initial-boundary problem and Cauchy problem for the system (2) it is proved.