Ю. Г. Смирнов, Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода, *Докл. АН СССР*, 1990, том 312, номер 3, 597–599

© Ю.Г. СМИРНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ВОЛНОВОДА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 7 VI 1989)

Рассматривается математическая модель регулярной экранированной волноведущей структуры, заполненной в общем случае двумя однородными изотропными диэлектриками без потерь с относительной проницаемостью $\epsilon \geqslant 1$ ($\operatorname{Im} \epsilon = 0$). Среда магнитооднородна $\mu = 1$; экраны предполагаются идеально проводящими.

Сечение структуры плоскостью $z =$ const в декартовой системе координат образовано ограниченной областью Q с кусочно-гладкой границей ∂Q, состоящей из конечного числа дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого. Пусть L — простой замкнутый контур класса C^∞, разбивающий Q на две области Ω_1 и Ω_2; $l \equiv Q \cap L = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Образуем область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \omega$, где $\omega = \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} (M_{2\nu-1}, M_{2\nu}) \subset l\,(\nu = 1, \ldots, N)$ — совокупность $N (N \geqslant 1)$ непересекающихся интервалов (отверстий связи) на l. Будем предполагать, что границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ также не имеют точек возврата. Отметим, что построенная область Ω удовлетворяет условию конуса [1], что позволяет нам применять теоремы вложения и теоремы о следах в пространствах Соболева.

Геометрия рассматриваемой модели охватывает все типы экранированных двухслойных волноведущих структур, используемых на практике: от круглых и прямоугольных частично заполненных волноводов до щелевых, полосковых и компланарных линий передачи.

Решение задачи о возбуждении электромагнитного поля в волноведущей структуре произвольным сторонним источником с помощью разложения поля по собственным волнам (например, по схеме, изложенной в [2]) опирается на теорему о полноте поперечных компонент полей собственных волн в $L_2^4(\Omega)$. Такая теорема была установлена А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским в [3] лишь для волноводов с однородным заполнением. В настоящей работе доказывается теорема о полноте для значительно более широкого класса структур.

Задача о собственных волнах волноведущей структуры может быть сформулирована в следующем виде [4]. Требуется определить функции

$$\Pi, \Psi \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^1(\overline{\Omega_1 \setminus \omega_\delta}) \cap C^1(\overline{\Omega_2 \setminus \omega_\delta}),$$

отвечающие (комплексному) спектральному параметру γ и являющиеся решением краевой задачи

$$(1)\qquad \Delta\Pi + \tilde{k}^2\Pi = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad \tilde{k}^2 = \tilde{k}_j^2 = \epsilon_j - \gamma^2;$$

$$(2)\qquad \Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad \epsilon = \epsilon_j \text{ в } \Omega_j \ (j = 1, 2);$$

$$(3)\qquad \Pi|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0;$$

$$(4)\qquad [\Pi]_\omega = [\Psi]_\omega = 0;$$

$$(5)\qquad \left[\frac{\epsilon}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\right]_\omega + \left[\frac{\gamma}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right]_\omega = 0, \quad \left[\frac{1}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right]_\omega - \left[\frac{\gamma}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\right]_\omega = 0;$$

$$(6)\qquad \int\limits_\Omega (|\nabla\Pi|^2 + |\Pi|^2 + |\nabla\Psi|^2 + |\Psi|^2)\,ds < \infty,$$

где ω_δ обозначена произвольно малая δ-окрестность угловых точек границы Γ области Ω, n и τ – единичные нормальный и касательный векторы к l или Γ, а квадратные скобки означают разность предельных значений функции в областях Ω_2 и Ω_1. Здесь $\gamma = h/k_0$, h – продольное волновое число собственной волны, k_0 – волновое число вакуума, $\Pi = iE_z(x, y)$, $\Psi = iH_z(x, y)$ – продольные компоненты электрического и магнитного полей.

Следуя [5], дадим другую (вариационную) формулировку задачи (1)–(6). Рассмотрим пространства Соболева

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \mid f \in H^1(\Omega),\ f|_\Gamma = 0 \}, \quad \hat{H}^1(\Omega) = \{ f \mid f \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega f\, ds = 0 \}.$$

Далее, пусть $\mathbf{H} = H_0^1(\Omega) \times \hat{H}^1(\Omega)$.

Определение 1. Вектор $(\Pi, \Psi)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}$ будем называть собственным вектором задачи (1)–(6), отвечающим характеристическому числу (ХЧ) γ_0, если при $\gamma = \gamma_0$ для любого $(u, v)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}$ выполнено вариационное соотношение

$$\int_\Omega \frac{1}{\tilde{k}^2} (\epsilon \nabla\Pi \nabla\bar{u} + \nabla\Psi\nabla\bar{v})\, ds - \int_\Omega (\epsilon\Pi\bar{u} + \Psi\bar{v})\, ds - \tag{7}$$
$$- \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \int_\omega \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} \bar{v} - \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} \bar{u} \right) d\tau = 0.$$

Отметим, что в силу теоремы Соболева о следах интегралы в (7) корректно определены.

Аналогично [5] можно доказать, что вариационное соотношение (7) порождает в $\mathbf{H}$ ограниченный операторный пучок

$$L(\gamma) \equiv \gamma^4 K + \gamma^2 (A_1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2) K) + \gamma(\epsilon_1 - \epsilon_2) S + \epsilon_1 \epsilon_2 (K - A_2), \tag{8}$$

ХЧ и собственные векторы которого совпадают с ХЧ и собственными векторами задачи (7). Таким образом, задача (7) эквивалентна исследованию пучка (8), поэтому корректно

Определение 2. Систему собственных и присоединенных векторов (СПВ) пучка (8) [6] будем называть системой СПВ задачи (1)–(6).

Операторы пучка (8) обладают следующими свойствами [5].

Утверждение 1.

$$A_1 \geqslant 0,\ A_2 \geqslant 0;\quad K > 0,\quad \lambda_n(K) = O(n^{-1}),\quad n \to \infty;\quad S = S^*.$$

Сведение задачи (1)–(6) к изучению операторного пучка позволяет сделать ряд важных выводов относительно спектральных свойств этой задачи.

Теорема 1. *Пусть* (8) (*задача* (1)–(6)) *имеет дискретный спектр, лежащий в полосе* $\Pi_A = \{\gamma \mid |\mathrm{Re}\,\gamma| \leqslant A\}$ *для некоторого* A, *симметрично расположенный относительно вещественной и мнимой осей. Точки* $\gamma_i = \pm\sqrt{\epsilon_j}$, $j = 1, 2$, *являются точками вырождения пучка* (8). *Система СПВ пучка* (8), *отвечающая ХЧ* $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\epsilon_j}$, *двукратно полна по Келдышу с конечным дефектом в* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ *и двукратно полна по Келдышу в* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, *если* $|\epsilon_1 - \epsilon_2| < \delta_*$ *для некоторого* $\delta_* = \delta_*(\Omega)$.

Поперечные компоненты полей собственных и присоединенных волн, отвечающих ХЧ γ_n, имеют вид

$$\mathbf{E}_n^{(p)} = \frac{1}{\tilde{k}_n^2} [\gamma_n \nabla\Pi_n^{(p)} - \nabla \times (\Psi_n^{(p)} \mathbf{Z}_0) + \mathbf{E}_n^{(p-1)} - \mathbf{H}_n^{(p-1)} \times \mathbf{Z}_0],$$
$$\mathbf{H}_n^{(p)} = \frac{1}{\tilde{k}_n^2} [\gamma_n \nabla\Psi_n^{(p)} + \nabla \times (\epsilon\Pi_n^{(p)} \mathbf{Z}_0) + \mathbf{H}_n^{(p-1)} + \epsilon\mathbf{E}_n^{(p-1)} \times \mathbf{Z}_0], \tag{9}$$

где $(\Pi_n^{(0)}, \Psi_n^{(0)})^т$ – собственные, а $(\Pi_n^{(p)}, \Psi_n^{(p)})^т$ $(p \geqslant 1)$ – присоединенные векторы пучка (8); $\mathbf{E}_n^{(p)} \equiv \mathbf{H}_n^{(p)} \equiv 0$ при $p < 0$. Справедливы следующие соотношения биортогональности:

$$(10) \quad (\gamma_n - \gamma_m)(\mathbf{V}_n^{(p)}, \mathbf{W}_m^{(q)})_{\mathbf{L}_2} = (\mathbf{V}_n^{(p)}, \mathbf{W}_m^{(q-1)})_{\mathbf{L}_2} - (\mathbf{V}_n^{(p-1)}, \mathbf{W}_m^{(q)})_{\mathbf{L}_2},$$

где $\mathbf{V}_n^{(p)} = (\mathbf{E}_n^{(p)}, \mathbf{H}_n^{(p)})^т$ – прямая, а $\mathbf{W}_n^{(p)} = (\bar{\mathbf{H}}_n^{(p)} \times \mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_0 \times \bar{\mathbf{E}}_n^{(p)})^т$ – сопряженная волна; $\mathbf{L}_2 = L_2^4(\Omega)$.

Из теоремы 1 и соотношений (10) следует

Т е о р е м а 2. *Система поперечных компонент* $\mathbf{V}_n^{(p)} = (\mathbf{E}_n^{(p)}, \mathbf{H}_n^{(p)})^т$ *собственных и присоединенных волн, отвечающих ХЧ* $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\epsilon_j}$, *полна и минимальна в* $L_2^4(\Omega)$, *если* $|\epsilon_1 - \epsilon_2| < \delta_*$.

Из второй теоремы, в частности, следует, что в задачах возбуждения при разложении поля нельзя не учитывать комплексных и присоединенных волн волноведущей структуры.

Автор благодарит проф. А.С. Ильинского за внимание к настоящей работе.

Пензенский политехнический институт

Поступило 7 VI 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 2. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио. 1957. 3. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* – ЖТФ, 1947, т. 17, № 11, с. 1283; № 12, с. 1431; 1948, т. 18, № 7, с. 971. 4. *Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 5. *Смирнов Ю.Г.* – ДАН, 1987, т. 297, № 4, с. 829. 6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

УДК 517.9+521.13 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© М.М. ХАПАЕВ

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПЛАНЕТНЫХ ОРБИТ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 7 VI 1989)

1. В настоящей статье изучается влияние формы планеты и центрального гравитирующего тела на параметры орбиты планеты. Предполагается, что планета или центральное тело имеют форму сжатого эллипсоида вращения, однородного по плотности. Предполагается, что наклон оси вращения эллипсоида сохраняется. Таким образом, возникает малая вариация силы притяжения планеты, вызванная несимметрией в распределении массы планеты и центрального тела относительно плоскости орбиты. В статье изучается эволюция кеплеровской орбиты, ее размеров, эксцентриситета и наклонности под влиянием этих факторов. Получены уравнения, описывающие медленные эволюционные движения, параметры которых и скорость зависят от отношения размеров притягивающихся тел к взаимному расстоянию. Делаются выводы об эволюции параметров орбит в задаче трех тел. Изучаемая модель была предложена в работе [1], где она использовалась для обеспечения устойчивости в задаче трех тел при малых эксцентриситетах и наклонностях.