В. П. Ильин, Об аппроксимации функций из пространств $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$ непрерывно дифференцируемыми функциями, *Докл. АН СССР*, 1961, том 137, номер 6, 1283–1286

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 137, № 6

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ И $W_p^{(l)}(D)$ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 XI 1960)

1. Пусть D — конечная или бесконечная область n-мерного эвклидова пространства E_n; l — положительное (не обязательно целое) число.

Через $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ $(p \geqslant 1)$ будем обозначать множество всех функций $f(X)$ $(X = (x_1, \ldots, x_n))$, определенных в D, имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева ([1]) производные порядка $\bar{l} = [l]$ ($[l]$ — целая часть l), удовлетворяющих условиям:

1) $\|f\|_{L_p(D)} = \left[\int\limits_D |f(X)|^p\,dX\right]^{1/p} < \infty$;

$$2)\ \|f\|_{L_p^{(l)}(D)} = \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n} \left[\int\limits_D \left|\frac{\partial^l f(X)'}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|^p dX\right]^{1/p} < \infty,$$

если l — целое, или

$$2')\ \|f\|_{L_p^{(l)}(D)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{\bar{l}}=1}^{n} \left[\int\limits_D \left(\int\limits_D \frac{\left|\dfrac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{\bar{l}}}} - \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(Y)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{\bar{l}}}}\right|^p}{|X-Y|^{n+(l-\bar{l})p}}\,dY\right)dX\right]^{1/p} < \infty,$$

если l — нецелое.

Положим

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)} = \|f\|_{L_p(D)} + \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}.$$

Из класса функций, принадлежащих $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, выделим подкласс функций, имеющих всевозможные обобщенные производные до порядка $\bar{l}$ включительно, принадлежащие $L_p(D)$. Этот класс функций будем обозначать $W_p^{(l)}(D)$.

Положим

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=0}^{l} \|f\|_{L_p^{(k)}(D)},$$

если l — целое, и

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=0}^{\bar{l}} \|f\|_{L_p^{(k)}(D)} + \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}$$

если l — нецелое.

При изучении пространств $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$ важное значение приобретает проблема аппроксимации функции $f \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ или $f \in W_p^{(l)}(D)$ в норме $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ или, соответственно, $W_p^{(l)}(D)$ при помощи последовательности функций $\varphi_\nu(X)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), принадлежащих $C^{(l)}(\bar{D})$, где $\bar{D} = D + \Gamma$, Γ — граница D.

Если $D = E_n$, то такая аппроксимация с любой степенью точности осуществляется при помощи средних функций ([1]). Если же D не совпадает со всем пространством E_n, то, как известно, она не всегда возможна. Для случая, когда граница области D принадлежит классу $C^{(l)}$, возможность такой аппроксимации для функции $f \in W_p^{(l)}(D)$ доказана была В. М. Бабичем ([2]) (для целого l) и Л. Н. Слободецким ([3]) (для нецелого l). При целом l для этого же класса функций Е. Гальярдо ([4]) получил аналогичный результат в предположении, что D — ограниченная область, граница которой принадлежит классу Lip 1. Для функций, принадлежащих $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, возможность указанной выше аппроксимации доказана для случая, когда D — ограниченная область, звездная относительно некоторой внутренней точки D ([5]).

Приводимые ниже результаты относятся к этому же кругу вопросов.

II. Пусть D — конечная или бесконечная область эвклидова пространства E_n. Введем следующие определения:

1) Будем говорить, что $D \in C(H, \sigma)$, если для каждой точки $X \in D$ существует n-мерный шаровой сектор с вершиной в X радиуса H и с телесным углом σ, целиком содержащийся в D.

2) Будем говорить, что область D принадлежит классу $C(H, \sigma, K, \lambda)$ и писать $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, если она удовлетворяет следующему условию: для любых двух точек X и Y из D, для которых $|X - Y| \leqslant H$, существуют n-мерные шаровые секторы с телесным углом σ и радиуса $\leqslant K|X - Y|$ с вершинами в X и Y, содержащиеся в D, причем такие, что если через G обозначить пересечение этих секторов, то справедливо неравенство:

$$mG \geqslant \lambda |X - Y|^n,$$

где H, σ, K, λ — положительные фиксированные для данной области числа.

Очевидно, если $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, то $D \in C(H/2, \sigma)$.

3) Через D_δ будем обозначать область, состоящую из точек D, расстояние которых от границы D больше δ.

4) Будем говорить, что область D обладает свойством $A(N, \varkappa)$, и писать $D \in A(N, \varkappa)$, если существуют две конечные системы n-мерных областей $S_1, \ldots, S_N$ и $S_1'', \ldots, S_N''$, каждая из которых образует покрытие D, удовлетворяющих следующим условиям: а) $S_i \subset S_i''$ ($i = 1, \ldots, N$), и если $X \in S_i$, $Y \bar{\in} S_i''$, то $|X - Y| \geqslant \varkappa > 0$; б) множества $D_i = D \cdot S_i$, $D_i' = D \cdot (S_i'')_{\varkappa/2} = D \cdot S_i'$, $D_i'' = D \cdot S_i''$ ($i = 1, \ldots, N$), а также множества $D_i' \cdot D_k'$ ($i, k = 1, \ldots, N$), если они не пустые, являются конечносвязными; в) для каждого множества $D_i'' = D \cdot S_i''$ ($i = 1, \ldots, N$) существует вектор $\mathbf{Q}_i$ такой, что трансляция D_i'' на вектор $t\mathbf{Q}_i$ при произвольном t, $0 < t \leqslant 1$, переводит D_i'' в область Ω_{it}'', внутреннюю относительно D, т. е. такую, что $\rho(\Omega_{it}'', E_n - D) > 0$ ($i = 1, \ldots, N$).

Заметим, что если некоторая область S_i'' является строго внутренней подобластью области D, то соответствующий ей вектор $\mathbf{Q}_i$ можно считать нулевым.

Отметим также, что если D — ограниченная область, граница которой принадлежит классу Lip 1, то существуют такие положительные числа $H, \sigma, K, \lambda, N, \varkappa$, что $D \in C(H, \sigma, k, \lambda)$ и $D \in A(N, \varkappa)$.

III. Во всех приводимых ниже теоремах $\varphi_\nu(X)$ будут обозначать функции, имеющие непрерывные производные любого порядка во всем пространстве E_n.

Теорема 1*. *Если* $f \in W_p^{(l)}(D)$, $p \geqslant 1$, l — *целое*, $D \in A(N, \varkappa)$, *то существует последовательность функций* $\varphi_\nu(X)$ $(\nu = 1, \ldots)$ *такая, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} \| f - \varphi_\nu \|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

Лемма. *Пусть* $f(X) \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ *и имеет непрерывные производные до порядка* $\bar{l} = [l]$ *в* D, $D \in C(H, \sigma)$. *Тогда для любого целого* s, $0 \leqslant s \leqslant \bar{l}$, *справедливо неравенство*

$$\| f \|_{L_p^{(s)}(D)} \leqslant C_1 \| f \|_{L_p(D)}^{1-s/l} \| f \|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)}^{s/l}.$$

Если l — *нецелое*, $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, *то справедливо также неравенство*

$$\| f \|_{L_p^{(s+l-\bar{l})}(D)} \leqslant C_2 \| f \|_{L_p(D)}^{\frac{\bar{l}-s}{l}} \| f \|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)}^{1-\frac{\bar{l}-s}{l}}.$$

Постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* f.

С помощью этой леммы доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Если* $f \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, $p \geqslant 1$, l — *целое*, $D \in A(N, \varkappa)$ *и* $D \in C(H, \sigma)$, *то*:

1) $f \in W_p^{(l)}(D)$;

2) *существует последовательность функций* $\varphi_\nu(X)$ $(\nu = 1, \ldots)$ *такая, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} \| f - \varphi_\nu \|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

Теорема 3. *Если* $f \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, $p \geqslant 1$, l — *нецелое*, $D \in A(N, \varkappa)$, $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, *то*:

1) $f \in W_p^{(l)}(D)$;

2) *существует последовательность функций* $\varphi_\nu(X)$ $(\nu = 1, \ldots)$ *такая, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} \| f - \varphi_\nu \|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

Замечание. Пусть $f(X)$ и область D удовлетворяют условиям теоремы 2, если l — целое, или условиям теоремы 3, если l — нецелое. Предположим, кроме того, что для любого целого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, и всех производных порядка $\bar{l} = [l]$ справедливы неравенства

$$\sup_{D_m} \Bigl[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{([D_m]^d_{n-m})} |D^l f(X)|^p \, dX \Bigr]^{1/p} \leqslant M d^{\alpha_m}, \tag{1}$$

если l — целое, или

$$\sup_{D_m} \Bigl[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{([D_m]^d_{n-m})} \Bigl(\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{(D)} \frac{|D^{\bar{l}} f(X) - D^{\bar{l}} f(Y)|^p}{|X - Y|^{n+(l-\bar{l})p}} dY \Bigr) dX \Bigr]^{1/p} \leqslant M d^{\alpha_m}, \tag{2}$$

если l — нецелое, где $M > 0$, α_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные числа, причем $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n = 0$, $\alpha_m \leqslant \frac{n-m}{p}$, а $[D_m]^d_{n-m}$ — множество точек области D, отстоящих от некоторого сечения D_m области D гиперплоскостью $x_{m+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$ на расстояние не больше d.

* Если D — ограниченная область, то теорема 1 неявно содержится в результатах Е. Гальярдо ([4]).

Можно показать, что неравенства (1) и (2) будут иметь место также для функций $\varphi_\nu(X)$, построенных соответственно в теоремах 2 и 3.

Это замечание позволяет распространить результаты работ ([6], [7]) также на функции $f(X) \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, если D удовлетворяет условиям теоремы 2 или 3.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] В. М. Бабич, УМН, 8, в. 2 (54) (1953). [3] Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленинградск. гос. пед. инст. им. А. И. Герцена, **197**, 54 (1958). [4] E. Gagliardo, Ricerche di Matematica, **8**, Fas. 1 (1958). [5] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **5**, 1959. [6] В. П. Ильин, Тр. Матем. инст. им. В. И. Стеклова АН СССР, **53**, 64 (1959). [7] В. П. Ильин, ДАН, **135**, № 4 (1960).