P.-G. Lemarié, Y. Meyer. “Ondelettes et opérateurs”. Hermann, Paris, 1990, vol. I–III,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 2, 253–264

https://www.mathnet.ru/eng/aa251

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 2

РЕЦЕНЗИИ

Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, Paris, 1990, vol. I–III.[1]

Книга Ива Мейера Ondelettes et operateurs [9], опубликованная издательством Эрман, излагает теорию ортонормированных базисов из онделетт и операторов, связанных с сингулярными интегралами. Теория сингулярных интегральных операторов восходит к работам А. Кальдерона и А. Зигмунда 50-х годов (об операторах свертки); ее современная формулировка (под названием теории операторов Кальдерона–Зигмунда) дана Р. Р. Койфманом и И. Мейером в их работе Au dela des opérateurs pseudo-differentiels в Astérisque, 1978 [2], а основной недавний результат — теорема $T(1)$ Г. Давида и Ж.-Л. Журне [6] о непрерывности сингулярных интегральных операторов в L^2. Два последних тома книги И. Мейера посвящены этим новым операторам Кальдерона–Зигмунда; в т. 2 изложены общие свойства непрерывности сингулярных интегральных операторов (в направлении книги Койфмана и Мейера и теоремы Давида — Журне), а в т. 3 — многочисленные примеры нелинейных задач, где такие операторы встречаются (квадратные корни из аккретивных дифференциальных операторов, теория потенциала в липшицевых областях, пара-дифференциальное исчисление Ж.-М. Бони и т.д.). Первый же том посвящен теории базисов из онделетт, т.е. ортонормированных базисов $\{\psi_{\varepsilon jk}(x)\}$, $\varepsilon \in E_n, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$, пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, которые получаются сдвигом и двоичным масштабированием из конечного числа регулярных и хорошо локализованных функций ψ_ε:

$$\psi_{\varepsilon jk}(x) = 2^{jn/2}\psi_\varepsilon(2^j x - k).$$

Функции ψ_ε осциллируют, и их двойная локализация, пространственная (по предположению) и частотная (ввиду осцилляций и регулярности), позволяет смотреть на разложение функции из L^2 по базису $\psi_{\varepsilon jk}$ как на локальный анализ Фурье. Базисы из онделетт, кроме того, хорошо приспособлены к изучению классических функциональных пространств (L^p, Бесова и т.д.) и сингулярных интегральных операторов (матрицы которых в этих базисах „почти диагональны").

Теория базисов из онделетт появилась только что (1985–1988 гг.). Ей предшествовало введенное Ж. Морле разложение по онделеттам, которое он предложил в начале 80-х годов для частотно-временного анализа некоторых сигналов, используемых в нефтеразведке. Разложение Морле велось по функциям $\psi_{a,b}(t)$, которые получались путем замены переменной из одной базисной функции ψ:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}).$$

Алгоритмы Ж. Морле и, далее, алгоритмы, предложенные С. Малла в 1986 г. [8], которые позволяют совершать быстрое разложение по ортонормированным базисам из онделетт, в считанные годы нашли множество приложений в самых разных областях (геосейсмология, анализ речи, обработка изображений, изучение мультифрактальных объектов, развитая турбулентность, проектирование зеркальных

[1] Перевод с французского Е. М. Дынькина.

квадратурных фильтров, численный анализ уравнений с частными производными, теория сингулярных интегральных операторов и ... конструктивная квантовая теория поля) и вызвали к жизни широкие международные исследования, объединяющие чистых и прикладных математиков, физиков и инженеров.

В настоящей статье мы предполагаем сделать обзор теории онделетт (разложение Ж. Морле, гильбертовы базисы И. Мейера и алгоритмы С. Малла), какой она представляется сейчас, во всем ее разнообразии и взаимодополняемости ее частей.

§ 1. Алгоритм Морле

1.1. Разложение единицы и частотно-временной анализ. Самое частое средство частотно-временного анализа сигнала $f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ — применение скользящих окон. Напомним, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ ($\xi \in R$ — частотная координата) сигнала $f(t)$ ($t \in \mathbb{R}$ — временная координата) определяется формулой

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt.$$

Информация о сигнале, которую несет $\hat{f}$, нелокальна, потому что $\hat{f}$ — результат интегрирования f по всей оси. Но по причинам практическим (доступ к сигналу f только в реальном времени), численным (нерегулярность f в одной точке приводит к медленному убыванию $\hat{f}$ на бесконечности и плохой сходимости восстанавливающего f интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi$$

во всех точках) и даже теоретическим (присутствие в спектре f высоких частот означает нерегулярность f, но регулярность — локальное свойство) желательно иметь возможность локального анализа Фурье.

Для этого введем окно $g(t)$, т.е. функцию g, локализованную во времени (например, вблизи $t = 0$). Ограничим сигнал окрестностью $t = t_0$, умножив его на $\overline{g}(t - t_0)$ и вычислим после этого преобразование Фурье:

$$C(t_0, \xi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g}(t - t_0) e^{-it\xi_0} dt.$$

Ясно, что $C(t_0, \xi_0)$ дает информацию о поведении f в окрестности $t = t_0$. Далее, по формуле Планшереля

$$C(t_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi - \xi_0) e^{it_0(\xi - \xi_0)} d\xi,$$

так что $C(t_0, \xi_0)$ дает информацию о поведении $\hat{f}$ в окрестности $\xi = \xi_0$, если считать $\hat{g}$ сосредоточенным вблизи $\xi = 0$. Таким образом, преобразование $f \to C(t_0, \xi_0)$ будет частотно-временным анализом, или локальным анализом Фурье, если мы выберем в качестве окна $g(t)$ функцию, локализованную и по времени, и по частоте. Но разрешение по времени и частоте, которое дает переход к $C(t_0, \xi_0)$, зависит от протяженности g по времени и частоте; эти протяженности связаны соотношением неопределенностей Гейзенберга

$$2\pi\|g\|_2^2 \leqslant \int t^2|g(t)|^2\,dt \cdot \int \xi^2|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi,$$

так что разрешение по времени и разрешение по частоте не могут быть произвольно высоки одновременно.

Формализм окон $f \to C(t,\xi) = \langle f, g_{t,\xi}\rangle$, где $g_{t,\xi}(s) = g(s-t)e^{is\xi}$ — это частотно-временной анализ с фиксированным разрешением по времени и по частоте. Далее, выбрать заранее степень разрешения и функцию $g_{t,\xi}$ не всегда легко, если характерные масштабы анализируемого сигнала вначале не известны или если сигнал имеет много различных масштабов (например, описание локально инвариантных свойств фрактальных объектов или теория многомасштабного анализа по Виткину в обработке изображений).

Идея Ж. Морле состоит в том, чтобы ввести частично-временной анализ $f \to T(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle$ с переменным разрешением (неопределенность $\Delta t a$ по времени и $\frac{1}{a}\Delta\xi$ по частоте дают постоянное произведение $\Delta t \cdot \Delta\xi$), заменяя функции $g_{t\xi}(s) = g(s-t)e^{is\xi}$ функциями $\psi_{ab}(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{s-b}{a})(a > 0, b \in \mathbb{R})$. По формуле Планшереля

$$T(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\sqrt{a}\overline{\hat{\psi}}(a\xi)e^{-ib\xi}\,d\xi$$

и легко видеть, что если ψ сосредоточена вблизи $t = 0$ по времени и вблизи $|\xi| = 1$ по частоте, то $T(a,b)$ дает информацию о поведении f вблизи $t = b$ и $\hat{f}$ вблизи $|\xi| = \frac{1}{a}$.

Разложение Ж. Морле по онделеттам требует выбрать функцию $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ так, чтобы

$$\int\limits_0^{\infty} |\hat{\psi}(t\xi)|^2\frac{dt}{t} = 1, \qquad \xi \neq 0$$

(если ψ вещественна, этот интеграл не зависит от ξ и условие на ψ сводится после нормировки к тому, чтобы $\hat{\psi}$ обращалась в 0 вблизи $\xi = 0$). Положим теперь $\psi_{ab}(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{s-b}{a})$ и $T(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2\frac{da}{a^2}db$$

или, после поляризации,

$$f = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(a,b)\psi_{a,b}\frac{da}{a^2}db.$$

Эта последняя формула сама по себе не нова; если обозначить ψ_t оператор свертки с функцией $\frac{1}{t}\psi(\frac{s}{t})$, ее можно записать как тождество

$$1 = \int\limits_0^{\infty} \psi_t \circ \psi_t^*\frac{dt}{t},$$

которое широко использовалось с 60-х годов в вещественном гармоническом анализе в цикле работ А. Кальдерона по интерполяции банаховых пространств.

Новизна подхода Ж. Морле состоит в следующем:

1. Интерпретация $T(a,b)$ как коэффициентов частотно-временного разложения с особым удалением на локальный характер такого разложения. В частности, расположение особенностей сигнала изучается по поведению $T(a,b)$ при малых a(малые масштабы соответствуют большим частотам, так что $T(a,b)$ тем быстрее стремится к 0 при $a \to 0$, чем регулярнее f в точке b). Поразительный пример плодотворности этого подхода — изучение М. Хольшнейдером регулярности функции Римана—Вейерштрасса $\sum \frac{1}{n^2} \sin \pi n^2 x$[7], где с помощью разложения по онделеттам описаны точки дифференцируемости функции, а для особых рациональных точек точно описан характер особенности.

2. Превращение разложения по онделеттам в алгоритм, эффективно выполняемый численно, достаточно быстрый и простой, чтобы стать полезным средством частотно-временного анализа при обработке сигналов. Этот алгоритм составляет предмет следующего раздела; по поводу его разнообразных приложений читателю следует обратиться к трудам междисциплинарного симпозиума в Марселе в 1987 г. [3].

1.2. Алгоритм Морле. Алгоритм Морле — это дискретизация формулы восстановления f по $T(a,b)$. Ось масштабов a дискретизуем логарифмически (мера da/a инвариантна при растяжениях), так что f приближается суммой

$$\sum_m a_0^{-m} \int T(a_0^m, b)\psi_{a_0^m, b}\, db,$$

а затем дискретизуем временную ось b с постоянным шагом $b_0 a_0^m$, согласованным с масштабом a_0^m. Теперь „восстановление“ f дается оператором

$$Tf = \sum_m \sum_n \langle f, \psi_{a_0^m, nb_0a_0^m}\rangle \psi_{a_0^m, nb_0a_0^m}.$$

Это восстановление — только приближение к f, но оно просто пишется и с ним легко работать. Можно повторить эту операцию для полного восстановления f. Точнее, если для некоторой постоянной C

$$\frac{1}{C}T = 1 - R, \qquad \|R\| < 1,$$

то можно восстановить f по Tf с помощью ряда

$$T^{-1} = \frac{1}{C}\sum_0^\infty R^k.$$

Алгоритм Морле был вначале эмпирическим. Но сейчас он теоретически обоснован в работах И. Добеши [4], которая показала, что если выбрать ψ достаточно локализованной по частоте ($\hat{\psi}$ должно быть плоским в 0 и в бесконечности), a_0 — достаточно близким к 1, а b_0 — достаточно малым, то оператор T будет как раз требуемого вида и итерации будут сходиться.

1.3. Мультифрактальные объекты и другие примеры приложений. Теория онделетт (разложение единицы и алгоритм Морле) вначале была развита как средство частотно-временного анализа в нефтеразведке (Ж. Морле был инженером в компании Elf-Aquitaine). Затем в университете Марселя ее использовали группы по обнаружению особенностей (А. Гроссман) и по анализу речи (лаборатория механики и акустики; в частности, Р. Кронлан-Мартине написал учебник „первого поколения“ по онделеттам, которым пользовались для приложений, описанных ниже). Наконец, П. Фландрен из ICPI в Лионе сравнил это разложение с преобразованием Вигнера—Вилля для частотного анализа сигналов.

Одной из первых областей приложения была теория кодирования сигналов. Алгоритм Морле дает хорошее сжатие частотно-временной информации: вместе с методами адаптивного кодирования он дает довольно компактный код для сигналов, где мало представлены высокие частоты. Возможность перемасштабирования коэффициентов $T(a_0^m, nb_0a_0^m)$ за счет уменьшения a_0 и b_0 позволяет уменьшить шум квантования.

Самое яркое применение идей Ж. Морле — изучение мультифрактальных физических объектов и турбулентных течений. Работы А. Арнеодо из Исследовательского центра Поля Паскаля в Талансе показали, как разложение мультифрактальных объектов по онделеттам позволяет легко измерить спектр их фрактальных размерностей, а также выявить в каждой особой точке соответствующую фрактальную размерность, т.е. перейти от статистического к геометрическому анализу этих объектов. Далее, разложение по онделеттам выявляет распределение энергии по разным масштабам и ее передачу от одного масштаба к другому (от больших к меньшим), с одной стороны, геометрическое строение мультифрактального объекта (по аналогии с канторовским троичным множеством: энергия в масштабе 1 сосредоточена на интервале [0,1], в масштабе 1/2 она распределяется на [0,1/3] и [2/3,1] и далее, при каждом уменьшении масштаба вдвое она делится между первой и последней третями того троичного интервала, где она располагалась ранее) и, с другой стороны, соответствующие операции перенормировки. Изложение результатов Арнеодо можно найти в [1].

§ 2. Гильбертовы базисы из онделетт

2.1. Понятие многомасштабного разложения.[2] Отправляясь от идей Ж. Морле, И. Мейер спросил себя, может ли быть оптимальным сжатие информации, которое достигается дискретизацией разложения единицы и, в частности, можно ли найти такую функцию ψ, что семейство $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$, образует гильбертов базис $L^2(\mathbb{R})$, причем ψ локализована по времени и по частоте. На самом деле такие базисы (и их многомерные аналоги) уже построил в 1981 г. И.-О. Стремберг для целей функционального анализа (безусловные базисы пространств Харди H^p при $p < 1$); они состояли из сплайнов с экспоненциальным убыванием на бесконечности (сплайн порядка k — это кусочно-полиномиальная функция класса C^{k-2}, составленная из полиномов степени $\leqslant k-1$). И. Мейер не знал работ И.-О. Стремберга и построил совершенно иначе в 1985 г. функцию $\psi \in C^\infty$, которая быстро убывала вместе со всеми производными.

Конструкция И. Мейера была распространена на $\mathbb{R}^n$ П.-Ж. Лемарье и И. Мейером следующим образом: они построили функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ (тоже из C^∞ с быстрым убыванием) такую, что гильбертов базис $L^2(\mathbb{R})$ образует семейство $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$, и $\psi_{jk}, j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, вместе взятые. Тогда гильбертов базис в $L^2(\mathbb{R}^n)$ получается так: это

$$\psi_{\varepsilon jk}(x) = 2^{\frac{nj}{2}}\psi^{(\varepsilon_1)}(2^jx_1-k_1)\dots\psi^{(\varepsilon_n)}(2^jx_n-k_n),$$

где $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon \in \{0,1\}^n, \varepsilon \neq (0,0,\dots,0)$, $\psi^{(0)} = \varphi, \psi^{(1)} = \psi$. В 1986 г. Г. Баттл и П.-Ж. Лемарье независимо построили такие φ и ψ, которые были экспоненциально убывающими сплайнами (отличными от сплайнов Стремберга).

Функция φ, которая вначале была вспомогательной при построении многомерных базисов из онделетт (и использовалась для уменьшения роли больших масштабов при разложении по онделеттам), в 1986 г. была интерпретирована

[2] Analyse multi-resolution.

С. Малла как центральное средство всей теории онделетт. Он ввел понятие многомасштабного разложения, подходя к построению онделетт с помощью ступенчатых алгоритмов обработки изображений.

Многомасштабное разложение — это возрастающая цепочка $\{V_j\}_{-\infty}^{\infty}$ замкнутых подпространств в $L^2(\mathbb{R})$ таких, что

(i) $V_j \subset V_{j+1}$;
(ii) $\cap V_j = \{0\}, \cup V_j$ плотно в L^2;
(iii) $f \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$;
(iv) $f \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, k \in \mathbb{Z}$;
(v) V_0 имеет ортонормированный базис вида $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$.

Вместо $\{V_j\}$ в соответствии с (iii), (iv) и (v) достаточно задать одну лишь функцию φ. Но из функции φ можно получить онделетту ψ. Точнее, пусть$V_1 = V_0 \oplus W_0$ (ортогональная прямая сумма); тогда W_0 имеет ортонормированный базис вида $\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}$, и ясно, что семейство $2^{j/2}\psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$, есть гильбертов базис $L^2(\mathbb{R})$. Многомасштабное разложение легко перенести на $L^2(\mathbb{R}^n)$, рассмотрев тензорное произведение $V_j \otimes \cdots \otimes V_j$, что дает базис $\psi_{\varepsilon jk}$, описанный выше.

В следующем разделе мы познакомимся с простыми примерами многомасштабных разложений. Чтобы построить другие известные примеры (и получить новые базисы из онделетт, в частности, онделетт с компактным носителем), С. Малла ввел еще одно представление функции φ. Заметим сначала, что $\varphi(\frac{x}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$, так что

$$\varphi(\frac{x}{2}) = \sum a_k \varphi(x-k), a_k = \langle \varphi(\frac{x}{2}), \varphi(x-k)\rangle, k \in \mathbb{Z},$$

или, в преобразованиях Фурье,

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

с 2π — периодической функцией m_0. Отсюда

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0)\prod_1^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Далее, ψ можно определить формулой

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}).$$

Теперь задание многомасштабного разложения сводится к заданию 2π-периодической функции m_0 такой, что

(i) $m_0 \in C^{\infty}$ (для быстрого убывания φ и ψ);
(ii) $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$ (ведь $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$, потому что семейство $\varphi(x-k)$ ортонормировано);
(iii) $m_0(0) = 1$ (чтобы бесконечное произведение сходилось;
(iv) выполняется условие необращения в 0, введенное А. Коэном: так как

$$\sum |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0)\prod_1^{\infty} m_0(2^{-j}\xi),$$

должно существовать такое множество $K = [a_2, b_1] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$, что

(j) $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \exists x \in K \quad \xi \equiv x \pmod{2\pi}$;
(jj) $|K| = 2\pi$;
(jjj) $\forall x \in K \quad m_0(2^{-j}x) \neq 0, \quad j > 0$.

Если условия (i)–(iv) выполнены, функция φ, $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_1^\infty m_0(2^{-j}\xi)$, определяет многомасштабное разложение. Задача теперь состоит в изучении регулярности φ (откуда легко получается и регулярность ψ).

2.2. Ондолетты с компактным носителем и другие примеры. Два простейших примера многомасштабного разложения — приближение произвольных функций ступенчатыми или функциями с ограниченым спектром. В первом случае $V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f|_{(k,k+1)} = \mathrm{const}\,\forall k\}$, $\varphi = \chi_{[0,1]}$ и базис из онделетт — базис Хаара. Во втором случае

$$V_0 = \{f \in L^2 : \quad \mathrm{supp}\hat{f} \subset [-\pi, \pi]\},$$

$\varphi = \sin x / x$ соответствует теореме Шеннона об отсчетах, а разложение $L^2 = \oplus_{-\infty}^{\infty} W_j$ $(V_{j+1} = V_j \oplus W_j)$ есть двоичное разложение Литтлвуда–Пэли.

Пример с кусочно-постоянными функциями легко обобщается на функции кусочно-полиномиальные, когда V_0 состоит из сплайнов степени k с узлами в целых точках, а φ и ψ экспоненциально убывают вместе с производными до порядка k. Так получается „регулярная система Хаара“ (но с некомпактными носителями).

Другие примеры строятся по функции m_0, и пространство V_0 уже не имеет явного описания. Например, если взять $m_0 \in C^\infty$, $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$ и $m_0(\xi) = 1$ при $|\xi| \leqslant \frac{2\pi}{3}$, то получатся C^∞ — функции φ и ψ Лемарье и Мейера (если только m_0 четна и $\geqslant 0$). В таком случае можно даже считать $m_0(\xi) + m_0(\xi+\pi) = 1$, и функция φ обладает дополнительными интерполяционными свойствами $\varphi(0) = 1$, $\varphi(k) = 0, \quad k \neq 0 \quad$ (и $\sum_{-\infty}^{\infty} k^p \varphi(x-k) = x^p \quad \forall p \in N$).

Самое глубокое применение этого формализма дано И. Добеши [5]: чтобы φ и ψ имели компактный носитель, необходимо и достаточно, чтобы функция m_0 была тригонометрическим полиномом. И. Добеши изучила все полиномиальные решения уравнения $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$ с вещественными коэффициентами (тогда и φ и ψ получаются вещественными); достаточно изучить положительные, четные и с вещественными коэффициентами решения уравнения $P(\xi) + P(\xi+\pi) = 1$, так как по теореме Рисса из теории обработки сигналов положительный полином $P(\cos\xi)$ с вещественными коэффициентами имеет вид $P(\cos\xi) = |Q(e^{i\xi})|^2$, где Q — снова полином с вещественными коэффициентами. Далее, если φ регулярна ($\varphi^{(k)} \in L^2$), то m_0 будет плоским в точке $\pi(m_0^{(p)}(\pi) = 0, p \leqslant k)$. Обратно, если функция m_0 — плоская в $\pi(m_0(\xi) = (1+e^{i\xi})^p F(\xi)$, где F „не слишком велика“), то можно показать, что φ достаточно регулярна. Это позволяет построить онделетты с компактным носителем сколь угодно высокой регулярности (но не C^∞, потому что все производные m_0 не могут в точке π обратиться в 0).

2.3. Применения к теории операторов. Сингулярный интегральный оператор в $\mathbb{R}^n$ — это оператор T: $D(\mathbb{R}^n) \to D'(\mathbb{R}^n)$, ядро — распределение $K(x,y)$ которого вне диагонали $x = y$ является обычной локальной гельдеровой функцией и при этом

(i) $|K(x,y)| \leqslant C\frac{1}{|x-y|^n}$;

(ii) $|K(x+h,y) - K(x,y)| \leqslant C\frac{|h|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}}$, $|h| < \frac{1}{2}|x-y|$;

(iii) $|K(x,y,+h) - K(x,y)| \leqslant C\frac{|h|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}}$, $|h| < \frac{1}{2}|x-y|$.

(Эти условия инвариантны относительно сдвига — достаточно заменить $K(x,y)$ на $K(x+z, y+z)$, и растяжения — достаточно заменить $K(x,y)$ на $\frac{1}{t^n}K(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$).

Теперь можно определить $T(1) \in D'/\mathbb{C}$, полагая

$$T(1)(x) = T(\omega)(x) + \int [K(x,y) - K(x_0,y)](1-\omega(y))\,dy,$$

если x находится вблизи x_0, а $\omega = 1$ в окрестности x_0. $T^*(1) \in D'/\mathbb{C}$ определяется точно так же. Необходимое и достаточное условие ограниченности T в L^2 дает $T(1)$ — теорема Давида и Журне: нужно, чтобы T был слабо ограничен (это означает, что поведение $K(x,y)$ вблизи диагонали контролируется способом, инвариантным относительно сдвигов и растяжений), $T(1) \in \mathrm{BMO}$ и $T^*(1) \in \mathrm{BMO}$.

Эти операторы были введены А. Кальдероном и А. Зигмундом в 50-х годах для изучения L^p — непрерывности параметриксов эллиптических операторов, а затем, в 60-х, обобщены А. Кальдероном, развившим исчисление псевдодифференциальных операторов с мало регулярными коэффициентами.

Если сингулярный интегральный оператор ограничен в L^2, то он ограничен в L^p, $1 < p < +\infty$; он не ограничен в L^1 и приходится ввести пространство H^1(Е. Стейн и Г. Вейсс), которое он непрерывно отображает в L^1(или в себя, если $T^*(1) = 0$); наконец, он отображает L^∞ в BMO (и отображает BMO в себя, если $T(1) = 0$). Если, сверх того, $T(1) = 0$, T будет непрерывен в пространствах Бесова B^s_{pq},$0 < s < \varepsilon$,$1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

Важный подкласс таких операторов — операторы, ограниченные в L^2, и такие, что $T(1) = T^*(1) = 0$. Этот класс замкнут относительно композиции, и его можно описать двумя способами, выражающими локальный характер наших операторов (по времени и частоте). Первое описание состоит в том, что T сохраняет локализацию и масштаб: $\exists\varepsilon > 0$,$\exists\alpha > 0$,$\exists C > 0$ такие, что если

$$|f(x)| \leqslant (1 + |x - x_0|/t)^{-n-\varepsilon},$$
$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant (|h|/t)^\varepsilon (1 + |x - x_0|/t)^{-n-\varepsilon}, |h| \leqslant t,$$
$$\text{и} \int f(x)dx = 0 \ (\text{здесь } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } t > 0),$$

то

$$|Tf(x)| \leqslant C(1 + |x - x_0|/t)^{-n-\alpha},$$
$$|Tf(x+h) - Tf(x)| \leqslant C^{|h|}/t)^\alpha (1 + |x - x_0|/t)^{-n-\alpha}$$

и

$$\int Tf(x)\,dx = 0.$$

Второе описание говорит, что матрица T в базисе $\psi_{\varepsilon jk}$ из онделетт почти диагональна:

$$|\langle T\psi_{\varepsilon jk}, \psi_{\varepsilon' j' k'}\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot 2^{-|j'-j|(\frac{n}{2}+\alpha)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |k \cdot 2^{-j} - k' 2^{-j'}|}\right)^{n+\alpha}, c > 0, \alpha > 0.$$

Последнее описание замечательно тем, что ограниченность такой матрицы в l^2 устанавливается просто по лемме Шура (весовой)! Это позволяет упростить доказательство теоремы Давида–Журне (в частности, в доказательстве Р. Койфмана, П. Джонса и С. Семмеса нужно записать матрицу T в базисе Хаара и применить к ней лемму Шура).

Многочисленные свойства сингулярных интегральных операторов сразу порождают приложения к функциональному анализу. В частности, это безусловные базисы в $L^p(1 < p < \infty)$, в пространстве Харди H^1 и пространствах Бесова B^s_{pq} ($s \in \mathbb{R}$, если $\varphi, \psi \in C^\infty$, и $|s| < s_0$, если регулярность φ и ψ конечна).

§ 3. Быстрое разложение по ондолеттам

3.1. Квадратурные зеркальные фильтры. Понятие квадратурного зеркального фильтра (QMF)[3] было введено в 70-х годах для обработки телефонных сигналов (в частности, мультиплексирования). Речь идет о простом алгоритме преобразования цифрового дискретного сигнала $\{Q_k\}_{-\infty}^{\infty}$ (полученного из непрерывного сигнала с полосой частот $[-\pi, \pi]$) в два сигнала с шириной полосы π. Сигнал $\{a_k\}$, пройдя через два фильтра H и G с выходами

$$b_k = \sum_p h_{k-p} a_p, \quad c_k = \sum_p g_{k-p} a_p,$$

прореживается, т.е. сохраняются только четные значения b_{2k} и c_{2k}. Единственное условие — сохранение энергии:

$$\|a_k\|_{l^2}^2 = \|b_{2k}\|_{l^2}^2 + \|c_{2k}\|_{l^2}^2.$$

Но можно очень просто восстановить $\{a_k\}$ по $\{b_{2k}\}$ и $\{c_{2k}\}$. Пусть $\tilde{b}_k$ интерполируют b_{2k}: $\tilde{b}_{2k} = b_{2k}$, $\tilde{b}_{2k+1} = 0$, а $\tilde{c}_k$ интерполируют c_k; тогда существуют два таких фильтра $\tilde{H}$ и $\tilde{G}$, что

$$a_k = \sum_p \tilde{h}_{k-p} \tilde{b}_p + \sum_p \tilde{g}_{k-p} \tilde{c}_p.$$

Поскольку импульсная характеристика H (а также G, $\tilde{H}$ и $\tilde{G}$) конечна, это — практический алгоритм точной реконструкции $\{a_n\}$. Он полезен при мультиплексировании (чтобы отделить несколько сигналов, передаваемых в составе одного, входя туда на разных частотах) или при кодировании сигналов (если гистограмма частот очень сжата и один из выходных сигналов мал, так что для его запоминания нужно меньше места). Фильтры этого типа можно еще усовершенствовать, чтобы уменьшить ошибки квантования.

3.2. Алгоритмы Малла. Алгоритмы Малла позволяют быстро найти проекцию функции f на функции $2^{j/2}\varphi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}$ (т.е. на V_j) и на функции $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. на W_j). Пусть

$$s_{jk} = \langle f, \varphi_{jk} \rangle, d_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle.$$

Прежде всего заметим, что вычисление s_{jk} и d_{jk} можно рассматривать как последовательное выполнение двух операций: свертки с $2^{j/2}\overline{\psi(-2^j x)}$ (фильтр низких частот) или с $2^{j/2}\overline{\psi(-2^j x)}$ (полосовой фильтр), а затем отсчетов этих сверток в точках $k/2^j$. Таким образом, разложение по онделеттам сводится к двум аналоговым фильтрам и отсчету выходов этих фильтров. Но благодаря включениям $V_j \subset V_{j+1}$, $W_j \subset V_{j+1}$, s_{jk} и d_{jk}, $j < j_0$, зависят только от проекции f на V_{j_0}, т.е. от последовательности $s_{j_0 k}$. Значит, вычисление s_{jk} и d_{jk} можно вести по индукции (проекции на V_{j_0-1} и W_{j_0-1} вычисляются по проекции на V_{j_0}, V_{j_0-2} и W_{j_0-2} — по $V_{j_0-1} \ldots$), и переход с уровня V_j на уровень V_{j-1} и W_{j-1} производится при помощи цифровой фильтрации (а точнее, при помощи двух фильтров и операции

[3] Filtres miroires en quadrature.

прореживания), причем фильтры не зависят от j (благодаря роли растяжений в определении V_j и W_j):

$$s_{jk} \to \tilde{s}_{jk} = \sum \alpha_p s_{j,k-p}(\text{фильтрация}) \to$$
$$\to \tilde{s}_{j,2k}(\text{прореживание}) \to s_{j-1,k} := \tilde{s}_{j,2k}$$

и точно так же

$$s_{jk} \to \tilde{d}_{jk} = \sum \beta_p s_{j,k-p} \to \tilde{d}_{j,2k} \to d_{j-1,k} := \tilde{d}_{j,2k}.$$

Равенство $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ означает, что эти два фильтра — зеркальные квадратурные фильтры. В случае онделетт с компактным носителем вычисления оказываются быстрыми, потому что тогда фильтры α и β имеют конечную импульсную характеристику.

В чем выгода от существования функции φ в случае произвольных зеркальных квадратурных фильтров? По-видимому, эта выгода трояка. Во-первых, оно позволяет дать два независимых описания процессу фильтрации — чисто цифровое (в терминах QMF) и аналоговое (фильтрация плюс отсчеты). Во-вторых, мы можем правильно интерпретировать асимптотическое поведение пары фильтров при $j \to \infty$ (например, если ψ локализована и осциллирует, то большие значения d_{jk} при $j \to \infty$ концентрируются вблизи особенностей сигнала), что важно, например, в акустике. Наконец, двоичная интерпретация этих вычислений позволяет связать разложение по онделеттам в размерности 2 одновременно с цифровыми фильтрами, которые используются для обнаружения контуров при обработке изображений, и с аналоговой фильтрацией в многомасштабном анализе по Виткину. Эти замечания, к примеру, позволили Малла описать быстрый алгоритм кодирования и реконструкции изображений с помощью „пересечения нулей“ их разложения по онделеттам (не ортогональным, но связанным с многомасштабным разложением) и подтвердить эмпирически обоснованность гипотезы Марра о полноте представления изображений их „пересечениями нулей“ в диадических масштабах.

3.3. Алгоритм Белкина, Койфмана и Рохлина. Главное приложение последовательной фильтрации по онделеттам — алгоритмы ступенчатой обработки изображений — описано в статье С. Малла из списка литературы.

Мы же закончим ссылкой на другое многообещающее приложение, а именно на алгоритм Белкина, Койфмана и Рохлина для численного решения уравнений в частных производных. Пусть T — линейный оператор конечного порядка k из $D(\mathbb{R}^n)$ в $D'(\mathbb{R}^n)$ (т.е. его ядро — распределение $K(x,y)$ есть распределение порядка k), пусть φ и ψ элементы многомасштабного анализа достаточной гладкости ($\geqslant k+1$), и пусть P_j и Q_j — ортогональные проекторы на V_j и W_j соответственно. Тогда T можно приблизить операторами $P_jTP_j(\langle TP_jf, P_j\zeta\rangle \to \langle Tf,\zeta\rangle, j \to \infty$, $f,\zeta \in D)$, а P_jTP_j записать в виде

$$P_jTP_j = \sum_{j_0}^{j}(Q_kTQ_k + Q_kTP_k + P_kTQ_k) + P_{j_0}TP_{j_0}.$$

Анализ T сводится к анализу блоков Q_kTQ_k, Q_kTP_k и P_kTQ_k (а также слагаемого $P_{j_0}TP_{j_0}$, соответствующего большим масштабам, а потому легко вычисляемого). Но если оператор T сохраняет локализацию и масштаб (как говорят, „микролокальный“), то матрица блока A_kTB_k будет почти диагональной, ее элементы быстро убывают при удалении от диагонали. Поэтому запись P_jTP_j в виде ряда из $A_k T B_k$ вместе с некоторым правилом обрыва даст мало заполненную матрицу, что ведет к сокращению вычислений. Этот алгоритм интересен для дифференциальных операторов с постоянными или слабо переменными коэффициентами и для их параметриксов (в эллиптическом случае).

§ 4. Книга Ива Мейера

4.1. Т. 1. Базисы из онделетт. Т. 1 посвящен базисам из онделетт и обращен к широкой публике (потенциальные потребители этих базисов приходят с самых разных сторон) и излагает просто и полно главные результаты теории.

После напоминания о рядах Фурье в гл. I, в гл. II вводится понятие многомасштабного разложения (пространства V_j и функция φ). В этой очень важной главе И. Мейер устанавливает главные следствия из регулярности φ. В частности, если P_j обозначает ортогональный проектор на V_j, а r — порядок регулярности $\varphi(\varphi \in H^r$ и $\varphi^{(r)}$ быстро убывает в бесконечности), то $P_j Q = Q$ для любого полинома Q степени r. Это сразу позволяет оценить скорость приближения гладкой функции f ее проекциями $P_j f$.

Гл. III посвящена построению базисов из онделетт. Изложены конструкция функции ψ с помощью многомасштабного разложения $L^2(\mathbb{R})$, а затем и ее многомерный аналог ψ_ε. Строятся онделетты с компактным носителем, следуя И. Добеши. Наконец, вводится периодическая версия онделетт и ее сравнивают с рядами Фурье (лакунарными или нет). Гл. IV посвящена понятию „фреймов“ и неортогональным онделеттам.

Две последних главы посвящены изучению при помощи онделетт функциональных пространств. Гл. V касается пространства Харди H^1 и сопряженного к нему BMO. В гл. VI разобраны общие функциональные пространства (L^p, пространства Соболева W^s_p, пространства Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 1$, пространства Гельдера, алгебра Берлинга, пространства Бесова B^s_{pq} с особым ударением на минимальном пространстве B^0_{11} и его сопряженном $B^0_{\infty,\infty}$, вещественном варианте пространства Блоха). Пространство B^0_{11} практически важно, потому что после разложения по онделеттам оно отождествляется с l^1. В частности, ограниченные операторы в B^0_{11} имеют в базисе из онделетт очень простую матричную характеристику. Но L^2 можно получить интерполяцией между B^0_{11} и его сопряженным, что позволяет доказывать L^2 — непрерывность тех операторов, матрицы которых в базисе из онделетт легко оценить (это так для некоторых операторов Кальдерона–Зигмунда).

4.2. Т.2. Операторы Кальдерона–Зигмунда. В гл. VII представлены „классические результаты“ об операторах Кальдерона–Зигмунда, которые могли бы присутствовать и в статье [2] в журнале Astérisque в 1978 г.: определение, L^p-непрерывность, поточечные оценки (неравенство Котляра), неравенства для хороших λ и веса Макенхаупта.

Гл. VIII посвящена теореме $T(1)$ Давида и Журне (1983). Приведены два доказательства — оригинальное доказательство Давида и Журне через посредство леммы Котляра и доказательство с помощью онделетт и пространства B^0_{11}.

В гл. IX обсуждаются два знаменитых примера операторов Кальдерона–Зигмунда: коммутаторы между классическими псевдодифференциальными операторами порядка 1 (класса S^1_{10}) и операторами умножения на липшицеву функцию, а также ядро Коши на липшицевой кривой.

В гл. X даны критерии непрерывности сингулярных интегральных операторов в пространствах Гельдера и Соболева.

Наконец, гл. XI посвяена теореме $T(b)$ Давида, Журне и Семмеса (1985). Это аналог теоремы $T(1)$, в котором функция 1 заменена на „пара-аккретивную“ функцию b. В самом деле, несмотря на простоту определения, не так-то легко бывает вычислить распределение $T(1)$. Так, в случае ядра Коши на липшицевой кривой $z(x) = x + ia(x)$ естественнее вычислять $T(b)$ для $b = z'(x) = 1 + ia'(x)$. Тогда $T(b) = 0$, откуда по теореме $T(b)$ следует L^2-непрерывность интеграла Коши.

4.3. Т. 3. Применение операторов Кальдерона–Зигмунда. В гл. XII вводятся обобщенные пространства Харди $H^p(D)$ и $H^p(\Omega)$ во внутренности D и внешности Ω спрямляемой жордановой кривой Γ. Доказывается теорема Г. Давида, описывающая те Γ, для которых $L^p(\Gamma) = H^p(D) + H^p(\Omega)$.

В гл. XIII развивается теория полилинейных операторов из $(L^\infty)^k \times L^2$ в L^2, коммутирующих со сдвигами и растяжениями. Это — тонкая и пока еще открытая проблема. Дается приложение к новому доказательству L^2-ограниченности интеграла Коши на липшицевой кривой (путем разложения $T(a)$ в ряд $\sum\limits_0^\infty T_k(a', \dots, a')$, где все T_k полилинейны). В гл. XIV тот же формализм применяется к (частичному) доказательству гипотезы Като об области определения квадратного корня из аккретивного оператора (дифференциального, с мало регулярными коэффициентами).

В двух последних главах описаны другие примеры псевдодифференциального исчисления с нерегулярными коэффициентами. В гл. XV излагается теория потенциала в липшицевых областях и доказывается теорема Вершоты о потенциале двойного слоя. В гл. XVI обсуждается пара-дифференциальное исчисление Ж.-М. Бони, предназначенное для нелинейных уравнений с частными производными (для изучения микролокальной регулярности решений).

Список литературы

[1] Arneodo A., Argoul F., Grasseau G., *Transformation en ondelettes et renormalisation, dans "Les ondelettes en 1989, Séminaire d'analyse harmonique d'Orsay, jenvier–mars 1989"*, Lecture notes 1438, Springer, 1990.

[2] Coifman R., Meyer Y., *Au delà des opérateurs pseudo-differentiels*, S.M.F., Astérisque, 1978.

[3] *Wavelets, time-frequency methods and phase space* (Combes J. M., Grossman A., Tchamitchian Ph., eds.), Proc. International Conf., Springer, Marseille, 1987.

[4] Daubechies I., *The wavelet transform, time-frequency localisation and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), 961–1005.

[5] Daubechies I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1989), 909–996.

[6] David G., Journe J.-L., *A boundedness criterion for generalized Calderón–Zygmund operators*, Ann. Math. **120** (1984), 371–397.

[7] Holschneider M., Tchamitchian Ph., *Analyse ponctuelle de la fonction "non-différentiable" de Riemann, dans "Les ondelettes en 1989"*, Lecture notes, vol. 1438, Springer, 1990.

[8] Mallat S., *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence **11**, no. 7 (1989), 674–693.

[9] Meyer Y., *Ondelettes et opérateurs*, vol. 3, Hermann, Paris, 1990.

Пьер-Жиль Лемарье
P. G. Lemarié
Universite de Paris-Sud
Mathematique, Bât. 425, 91405 ORSAY Cedex France