А. Ф. Галимянов

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{g(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t),\ t \in \gamma, \qquad (0.1)$$

где $a(t), f(t) \in H_{\mu}$, $g(t,\tau) \in H_{\alpha,\mu}$ – известные функции, γ – единичная окружность с центром в начале координат, $x(\tau)$ – искомая функция. Будем считать, что уравнение (0.1) нормально разрешимо [1]. Как обычно, через H_{β} обозначим множество непрерывных 2π -периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\beta\ (0<\beta\leqslant 1)$. Полагая $\|x\|_{\beta} = M(x) + H(x,\beta)\ (x \in H_{\beta})$, где

$$M(x) = \max_{t} |x(t)|,\ H(x,\beta) = \sup_{t_1,t_2\in\gamma} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}$$

множество H_{β} превращаем в B – пространство. Через $H_{\alpha,\mu}$ $(H_{\alpha,\alpha} \equiv H_{\alpha})$ обозначаем множество 2π периодических по обеим переменным функций $h(t,\tau)$, удовлетворяющих условию Гельдера по совокупности переменных (t,τ) с показателями соответственно α и μ.

Приближенные методы решения этого уравнения достаточно хорошо разработаны. Подробный анализ полученных в этом направлении результатов имеется в специальных обзорных работах В. В. Иванова [2] и Б. Г.Габдулхаева [3]. Ниже предлагается некоторая модификация известного (см. напр., [4, 6, 8]) метода механических квадратур (м. м. к.) для указанного уравнения и предлагается ее теоретическое обоснование с помощью ряда результатов общей теории приближенных методов и теории функций.

На окружности γ введем две системы узлов:

$$t_k = \exp(is_k),\ s_k = 2k\pi/(2n+1) + \omega/(2n+1),\ k=\overline{0,2n}. \qquad (0.2)$$

$$\tau_j = \exp(i\tau_j),\ \tau_j = 2j\pi/(2n+1),\ j=\overline{0,2n}, \qquad (0.3)$$

где ω – действительное число $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$. Варьируя ω по аналогии с вычислительной схемой, рассматриваемой ниже, можно получить различные схемы м. м. к. Следует отметить, что при $\omega = 0$ такая схема предложена и исследована в работах [4, 8]. Результаты указанных работ существенно используются при обосновании вычислительной схемы (1. 1) – (2. 1). Попытка обоснования данного метода была предпринята в [9], но эта работа, как доказано в [10], является ошибочной.

§ 1. Метод коллокаций

Схема метода. Приближенное решение уравнения (0. 1) ищется в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k, \quad t = e^{is}, \tag{1. 1.}$$

где неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=-n}^{n}$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, записываемых в операторном виде следующим образом:

$$K_n x_n \equiv P_{n,\omega}\left[a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{g(t,\tau)x_n(\tau)d\tau}{\tau - t}\right] = P_{n,\omega} f, \tag{1. 2}$$

где $P_{n,\omega}$ – оператор, который любой непрерывной 2π – периодической функции ставит в соответствие ее интерполяционный полином по узлам (0. 2).

Обоснование метода. Верна следующая

Теорема 1. Пусть $0 < \beta < \mu < \alpha \leqslant 1$. Тогда при условиях, указанных выше, уравнение (1. 2) имеет единственное решение, начиная с некоторого $n > n_0$. Приближенные решения (1. 1) сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (0. 1) в пространстве H_β с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| \equiv \|x^* - x_n^*\|_\beta = O\left(\frac{\ln n}{n^{\mu-\beta}}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $b(t) = g(t,t)$, $h(t,\tau) = 2\frac{g(t,\tau) - g(t,t)}{\tau - t}$. Тогда уравнение (0. 1) преобразуется к виду:

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{1. 3}$$

Как и в [4], каждой функции $x(t)\in H_\beta$ поставим в соответствие функции $x^+(z)$ и $x^-(z)$, аналитические соответственно внутри и вне γ и связанные с $x(t)$ формулами Племеля-Сохоцкого [1]

$$x^+ - x^- = x\,,\ x^+ + x^- = Sx = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t}\,.$$

Поскольку функция $(a-b)/(a+b)$ представима в виде

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\psi^+}{\psi^-}\,,\ \psi^\pm(t) = \exp(\theta^\pm(t))\,,\ \theta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\ln(a-b)/(a+b)}{\tau - z}d\tau\,,$$

то уравнение (1. 3) запишется в виде

$$Kx \equiv Gx + Tx \equiv \psi^-(t)x^+(t) - \psi^+(t)x^-(t) + \frac{\ell(t)}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \qquad (1.\ 4)$$

где $Gx \equiv \psi^-(t)\,x^+(t) - \psi^+(t)x^-(t)\,,\ y(t) = \psi^-(t)f(t)/(a(t)+b(t))\,,$

$$Tx - \frac{\ell(t)}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau\,,\ \ell(t) = \psi^-(t)/(a(t)+b(t)).$$

Введем $(2n+1)$ -мерное пространство полиномов $X_n = \left\{\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k\right\}$ с той же нормой, что и выше. Уравнение (1. 2) перепишем в виде

$$K_n x_n \equiv P_{n,\omega}[Gx_n + Tx_n] = P_{n,\omega}\,y\,.$$

Известно [4], что $\|Gx_n - P_{n,\omega}Gx_n\| \leq C_1 \ln n \|x_n\|/n^{\mu-\beta}, x_n \in X_n$. Далее, $\|Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n\| = M(Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n) + H(Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n, \beta)$.

$$M(Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n) \leq C_{20}(1 + \|P_{n,\omega}\|\,\omega(Tx_n, \tfrac{1}{n})\,,$$

где $\omega(z,\delta)$ – модуль непрерывности.
Используя лемму из стр. 121 [11] и результаты [5], находим, что

$$M(Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n) \leq \frac{C_2 \ln n \|x_n\|}{n^\mu}\,,\ x_n \in X_n\,.$$

Применяя лемму 3 из главы 3 [12], находим:

$$H(Tx_n - P_{n,\omega}Tx_n, \beta) \leq \frac{C_3 \ln n \|x_n\|}{n^{\mu-\beta}}$$

$$\|Kx_n-K_nx_n\|\leq\left(\frac{c_2\ln n}{n^{\mu}}+\frac{c_3\ln n}{n^{\mu-\beta}}\right)\|x_n\|=q\,\|x_n\|,\ x_n\in X_n$$

и отсюда, по теореме 7 из главы 1 [12] получаем, что при $p_n=q\,\|K^{-1}\|$ приближенное уравнение (1. 2) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка

$$\|x^*-x_n^*\|\leq\frac{\|K^{-1}\|}{1-p_n}\left[\|y-y_n\|+p_n\|y\|\right]=O\left(\frac{\ln n}{n^{\mu-\beta}}\right),\ y_n=P_{n,\omega}y.$$

Теорема доказана.

§ 2. Метод механических квадратур

Схема метода. Приближенное решение уравнения (0. 1) ищется в виде (1. 2). Коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=-n}^{n}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(t_\ell)\tilde{x}_n(t_\ell)+\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}g(t_\ell,\tau_j)\tau_j\tilde{x}_n(\tau_j)\beta_{\ell j}=f(t_\ell),\ \ell=\overline{-n,n},\qquad(2.\ 1)$$

где $\beta_{\ell j}=1+2i\sin\frac{\pi(n+1)(\ell-j+1)}{2n+1}\sin\frac{\pi n(\ell-j+1)}{2n+1}\Big/\sin\frac{\pi(\ell-j+1)}{2n+1}$,

а $\{t_\ell\}_{\ell=-n}^{n}$ - узлы (0. 3).

Пусть $P_{n,0}^{\tau}$ - проекционный оператор, который любой непрерывной 2π-периодической функции ставит в соответствие ее интерполяционный полином по узлам (0. 3). Тогда система (2. 1) запишется в эквивалентном операторном виде:

$$\mathcal{L}_n\tilde{x}_n=P_{n,\omega}\left[a\tilde{x}_n+SP_{n,0}^{\tau}(g\tilde{x}_n\tau)\right]=P_{n,\omega}f,\qquad(2.\ 2)$$

где $S\varphi=\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\frac{d\tau}{\tau}$.

Обоснование метода. Воспользуемся теоремой об устойчивости прямых методов (теорема 11 главы 1 [12]). Имеем

$$\begin{aligned}\|K_n\tilde{x}_n-\mathcal{L}_n\tilde{x}_n\|&=\|P_{n,\omega}S(P_{n,0}^{\tau}(g\cdot\tau)-g\cdot\tau)\tilde{x}_n\|\leq\\&\leq\|P_{n,\omega}\|\,\|S(P_{n,0}^{\tau}(g\cdot\tau)-g\cdot\tau)\tilde{x}_n\|,\ \tilde{x}_n\in X_n\ .\end{aligned}\qquad(2.\ 3)$$

Тогда, обозначив $A(t,\tau)=P_{n,0}^{\tau}(g\cdot\tau)-g\cdot\tau$ из [7], получим

$$\|S(A\tilde{x}_n)\|\leq(C_4M(A)+C_5H(A_\tau,\beta)+C_6H(A_t,\delta))\|\tilde{x}_n\|,\ \tilde{x}_n\in X_n,$$

где $0<\beta<\mu\leq\delta<\alpha<1$. Здесь $H(A_\tau,\beta)$ и $H(A_t,\delta)$ постоянные Гельдера по соответствующим переменным. Нетрудно показать справедливость оценки

$$M(A)=M(P_{n,0}^{\tau}(g\cdot\tau)-g\cdot\tau)\leq\frac{C_7\ln n}{n^{\mu}}. \qquad (2.4)$$

Теперь, используя результаты [5], находим

$$H(A_\tau,\beta)\leq\frac{C_8\ln n}{n^{\mu-\beta}}. \qquad (2.5)$$

Вычислим, далее, $H(A_t,\delta)$. Повторяя рассуждения [6], получаем

$$H(A_t,\delta)=\sup_{\Delta t}\frac{|\Delta\rho(g)|}{|\Delta t|^{\delta}}\ ;\ \Delta\rho(g)=\rho(g(t+\Delta t,\tau))-\rho(g(t,\tau))\ ;$$

где $\rho(g)=g(t,\tau)\cdot\tau-P_{n,0}^{\tau}(g(t,\tau)\tau)$. В силу аддитивности ρ имеем $\Delta\rho(g)=\rho(\Delta g)\ ;\ \Delta g=g(t+\Delta t,\tau)-g(t,\tau)$.
Известно [1], что существует функция трех переменных $g^*(t,\Delta t,\tau)$ такая, что $g^*=g^*(t,\Delta t,\tau)\in H_{\alpha-\delta}$ и $\Delta g=g^*\cdot\Delta t^{\delta}$. Поэтому из результатов [5] находим:

$$H(A_t,\delta)=|\rho(g^*\cdot\tau)|\leq\frac{C_9\ln n}{n^{\alpha-\delta}}. \qquad (2.6)$$

Продолжая неравенство (2.3), из (2.4) - (2.6) получаем оценку

$$\|K_n\tilde{x}_n-\mathcal{L}_n\tilde{x}_n\|\leq\ln^2 n\left(\frac{C_7}{n^{\mu}}+\frac{C_8}{n^{\mu-\beta}}+\frac{C_9}{n^{\alpha-\delta}}\right)\|x_n\|,\ x_n\in X_n.$$

Используя теорему 11 главы 1 [12] и теорему 1 окончательно находим $\|x^*-x_n^*\|\leq C_{10}\ln^2 n\,(n^{-\mu}+n^{\beta-\mu}+n^{\delta-\alpha})$.

Пусть $\nu=\min(\mu,\mu-\beta,\alpha-\delta)$, где δ выбирается из условия максимальности ν, но так, чтобы $\mu\leq\delta<\alpha$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. При условиях, указанных выше, система (2.1) однозначно разрешима, начиная с некоторого $n>n_1$, и приближенные решения, полученные по формуле (1.1), коэффициенты у которых найдены по системе (2.1), сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (0.1) со скоростью

$$\|x^*-x_n^*\|=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{\nu}}\right).$$

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М. : Наука, 1968.–512 с.

2. Иванов В. В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. М. : ВИНИТИ, 1965. –С.125 – 177.

3. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ, т. 18. М. : ВИНИТИ, 1980. –С.251 – 307.

4. Габдулхаев Б. Г. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур //ДАН СССР. – 1968, т. 179, № 2. – С. 260 – 263.

5. Габдулхаев Б. Г. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов // В кн. : Функциональный анализ и теория функций, вып. 3, Изд–во Казанск. ун–та, 1967. – С. 54–74.

6. Габдулхаев Б. Г. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Математика. – 1965, № 5, с. 43 – 51.

7. Габдулхаев Б. Г. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1965, № 3.

8. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения операторных уравнений, 1 // Изв. вузов, Математика. – 1971, № 11, с. 33 – 44.

9. Бойков И. В. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // ЖВМ и МФ. – 1972, т. 12, № 6. – С. 1381 – 1390.

10. Габдулхаев Б. Г., Галимянов А. Ф. Квадратурные методы решения сингулярных интегральных уравнений /Казанск. ун–т. Казань. 1986. – 27 с. – Библиогр. 39 назв. – Деп. ВИНИТИ 22. 08. 1986 г., № 6054 – В86.

11. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М. : Мир, 1979.–496 с.

12. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.