



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. R. Mirotin, The multidimensional  $\mathcal{T}$ -calculus of  
generators of  $C_0$ -semigroups,  
*Algebra i Analiz*, 1999, Volume 11, Issue 2, 142–169

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1051>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have  
read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

May 13, 2025, 06:25:26



## МНОГОМЕРНОЕ $\mathcal{T}$ -ИСЧИСЛЕНИЕ ОТ ГЕНЕРАТОРОВ $C_0$ -ПОЛУГРУПП

© А. Р. Миротин

Пусть  $\mathcal{T}_n$  есть класс неположительных дифференцируемых функций, определенных на  $(-\infty; 0)^n$ , все частные производные которых абсолютно монотонны. Для функции  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  и набора  $A$ , состоящего из  $n$  коммутирующих генераторов равномерно ограниченных  $C_0$ -полугрупп (голоморфных полугрупп), определяется оператор  $\psi(A)$ , также являющийся генератором равномерно ограниченной  $C_0$ -полугруппы (голоморфной полугруппы), и изучается возникающее при этом функциональное исчисление. Рассматриваются примеры.

### §1. Введение

В настоящей работе строится функциональное исчисление („ $\mathcal{T}_n$ -исчисление“) от нескольких коммутирующих генераторов  $C_0$ -полугрупп на основе класса функций  $\mathcal{T}_n$ . Класс  $\mathcal{T}_n$  состоит из неположительных дифференцируемых функций на  $(-\infty; 0)^n$ , все частные производные которых абсолютно монотонны. Для функций  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  и набора  $A = (A_1; \dots; A_n)$  попарно коммутирующих генераторов равномерно ограниченных  $C_0$ -полугрупп (голоморфных полугрупп) определяется оператор  $\psi(A)$ , также являющийся генератором равномерно ограниченной  $C_0$ -полугруппы (голоморфной полугруппы), и изучается возникающее функциональное исчисление. Отметим, что класс  $\mathcal{T}_1$  введен Шенбергом [1] и содержит ряд важных функций, в том числе (с точностью до аффинных замен переменных) положительные дробные степени, логарифм и арккосинус. При этом  $\mathcal{T}_1$ -исчисление содержит значительную часть теории дробных степеней операторов, и некоторые доказательства и в этом случае являются новыми. Как и всякое функциональное исчисление,  $\mathcal{T}_n$ -исчисление позволяет использовать при изучении операторов методы теории функций. В частности, на этом пути получается новое доказательство формулы Като для резольвенты дробной степени оператора, пригодное для обобщения на функции класса  $\mathcal{T}_n$ . Построенное исчисление по существу единственно, согласовано с  $n$ -мерным исчислением Хилле-Филлипса ([2, гл. XV, XVI]) и обладает хорошими аппаратными свойствами. Оно позволяет распознавать и строить генераторы  $C_0$ -полугрупп

---

*Ключевые слова:*  $C_0$ -полугруппа, голоморфная полугруппа, генератор полугруппы, функциональное исчисление (операторное исчисление).

и голоморфных полугрупп, а также вычислять генераторы некоторого класса  $C_0$ -полугрупп, включающего, например, бесселев потенциал. Отметим также, что многомерное исчисление оказалось полезным при изучении одномерного.

§2. Класс  $\mathcal{T}_n$

**Определение 2.1.** Функция  $\psi : (-\infty; 0)^n \rightarrow (-\infty; 0]$  принадлежит классу  $\mathcal{T}_n$ , если она дифференцируема и все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны на  $(-\infty; 0)^n$ .

Последнее равносильно тому, что  $\partial^\alpha \psi \geq 0$  для любого мультииндекса  $\alpha \neq 0$ .

Следующее предложение, при  $m = n = 1$  принадлежащее Шенбергу [1], по-видимому, известно. Мы приводим его здесь, так как не располагаем удобным источником для ссылок.

**Предложение 2.1.** Пусть  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Для функции  $\psi : (-\infty; 0)^n \rightarrow (-\infty; 0]$  следующие утверждения равносильны:

- 1)  $\psi \in \mathcal{T}_n$ ;
- 2)

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \tag{2.1}$$

при  $s \in (-\infty; 0)^n$ , где  $c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \rightarrow -0} \psi(s)$ , а  $c_1$  из  $\mathbb{R}_+^n$  и положительная мера  $\mu$  на  $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$  определяются однозначно (здесь и ниже точкой мы обозначаем скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ; запись  $s \rightarrow -0$  означает, что  $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$ );

3) для любой абсолютно монотонной на  $(-\infty; 0)^m$  функции  $f$  сложная функция  $(s, r) \mapsto f(\psi(s), r)$  абсолютно монотонна на  $(-\infty; 0)^{m+n-1}$  ( $s \in (-\infty; 0)^n, r \in (-\infty; 0)^{m-1}$ ).

**Доказательство.** Утверждение 1  $\Rightarrow$  3 легко проверяется. Для доказательства импликации 3  $\Rightarrow$  1 достаточно рассмотреть случай  $f(x) = e^{vx}$ ,  $v \geq 0$  (ср. [3, с. 257–258]).

Утверждение 2  $\Rightarrow$  1 доказывается дифференцированием под знаком интеграла в (2.1).

Для доказательства импликации 1  $\Rightarrow$  2 установим прежде всего, что функция  $\psi_1 = -\psi$  принадлежит множеству  $\mathcal{A}((-\infty; 0)^n)$  вполне альтернирующих функций в смысле [4, с. 263]. В самом деле, поскольку  $\psi \in \mathcal{T}_n$ , то для любых  $x, h \in (-\infty; 0)^n$  найдется такое  $c \in (-\infty; 0)^n$ , что

$$\nabla_h \psi_1(x) := \psi_1(x) - \psi_1(x + h) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_1(c)}{\partial s_i} h^i \leq 0.$$

Аналогично при  $x, h_1, h_2 \in (-\infty; 0)^n$  имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{h_1} \nabla_{h_2} \psi_1(x) &= - \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial}{\partial s_{i_1}} (\nabla_{h_2} \psi_1)(c) h_1^{i_1} = - \sum_{i_1=1}^n \left( \nabla_{h_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial s_{i_1}} \right) (c) h_1^{i_1} \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 \psi_1(c_1)}{\partial s_{i_1} \partial s_{i_2}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \leq 0 \end{aligned}$$

и так далее. Поскольку  $\mathcal{A}((-\infty; 0)^n) = \mathcal{A}_0((-\infty; 0)^n)$  ([4, с. 265]), то в силу теоремы 8.2.4 из [4], примененной к функции  $-\psi$ , имеем при любых  $h, k \in (-\infty, 0)^n$

$$-\psi(h) + \psi(k) = \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{u \cdot k} - e^{u \cdot h}) d\mu(u) + c_1 \cdot h - c_1 \cdot k, \quad (2.2)$$

где все  $c_1^i \leq 0$ ,  $\mu$  — положительная мера на  $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ , причем  $c_1$  и  $\mu$  определяются по  $\psi$  однозначно. Здесь мы воспользовались тем, что любой ограниченный неотрицательный полухарактер  $\rho$  полугруппы  $(-\infty; 0)^n$  непрерывен ([5, теорема 2]), а потому имеет вид  $\rho(h) = e^{u \cdot h}$  для некоторого  $u \in \mathbb{R}_+^n$ . Переходя теперь в (2.2) к пределу при  $k \rightarrow -0$ , получаем (2.1). •

### §3. Основное определение (предварительный случай)

Всюду далее через  $T_1, \dots, T_n$  будут обозначаться попарно коммутирующие однопараметрические  $C_0$ -полугруппы в комплексном банаховом пространстве  $X$ , удовлетворяющие условию  $\|T_j(t)\| \leq M$  ( $t \geq 0; j = 1, \dots, n; M = \text{const}$ ). Через  $A_j$  обозначим генератор полугруппы  $T_j$  с областью определения  $D(A_j)$  и положим  $A = (A_1, \dots, A_n)$ . Далее коммутирование операторов  $A_1, \dots, A_n$  означает коммутирование соответствующих полугрупп.

Операторнозначная функция  $T(u) := T_1(u_1) \dots T_n(u_n)$  ( $u \in \mathbb{R}_+^n$ ) является  $C_0$ - $n$ -параметрической полугруппой, а потому линейное многообразие  $D(A) := \bigcap_{j=1}^n D(A_j)$  плотно в  $X$  ([6, с. 98–99]).

**Определение 3.1.** Определим значение функции  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  с интегральным представлением (2.1) на наборе  $A = (A_1, \dots, A_n)$  при  $x$  из  $D(A)$  формулой

$$\psi(A)x = c_0 x + c_1 \cdot Ax + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (T(u) - I)x d\mu(u), \quad (3.1)$$

где  $c_1 \cdot Ax := \sum_{j=1}^n c_1^j A_j x$ ,  $I$  — единичный оператор в  $X$ .

Далее мы неоднократно воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 3.1.** Для меры  $\mu$  из интегрального представления (2.1) и достаточно малого  $\delta > 0$  функция  $u \mapsto u_j$   $\mu$ -интегрируема на  $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и  $\mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n) < \infty$ .

**Доказательство.** Фиксируем  $s$  из  $(-\infty; 0)^n$ . Так как  $1 - e^{s \cdot u} \sim (-s) \cdot u$  при  $u \rightarrow 0$  и интеграл в (2.1) сходится, то для достаточно малого  $\delta > 0$  функция  $s \cdot u$   $\mu$ -интегрируема на  $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$ . В силу произвольности  $s$  отсюда следует  $\mu$ -интегрируемость на  $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$  всех функций  $u \mapsto u_j$ . Далее, дифференцируя в (2.1) под знаком интеграла, получаем, что функции  $u \mapsto u_j e^{s \cdot u}$   $\mu$ -интегрируемы. Пусть  $E_j = \mathbb{R}_+^n \cap \{u_j \geq \delta\}$ . Поскольку

$$\int_{E_j} e^{s \cdot u} d\mu(u) \leq \frac{1}{\delta} \int_{E_j} u_j e^{s \cdot u} d\mu(u),$$

то функция  $u \mapsto e^{s \cdot u}$   $\mu$ -интегрируема на множестве  $\cup_{j=1}^n E_j = \mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n$ . Снова учитывая сходимость интеграла в (2.1), получаем отсюда и последнее утверждение леммы.

Покажем теперь, что интеграл в (3.1) сходится в смысле Бохнера. Фиксируем  $x$  из  $D(A)$ , и пусть  $B_j(u_j) := T_j(u_j) - I$ . Так как  $\|B_j(u_j)x\|u_j^{-1} \rightarrow \|A_j x\| < \infty$  ( $u_j \rightarrow +0$ ),  $j = 1, \dots, n$ , то, уменьшая, если нужно,  $\delta$  из леммы 3.1, мы можем считать, что  $\|B_j(u_j)x\| \leq cu_j$  при  $u_j \in [0; \delta)$  ( $c = \text{const}$ ). Поэтому при  $u \in [0; \delta)^n$  и  $j, i_1, \dots, i_k$  из  $\{1; \dots; n\}$  справедлива оценка

$$\|B_{i_1}(u_{i_1}) \dots B_{i_k}(u_{i_k}) B_j(u_j)x\| \leq (M + 1)^k cu_j.$$

Далее, поскольку  $B_j(u_j)$  коммутируют, то

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^n B_j(u_j) + \sum_{i,j=1}^n B_i(u_i) B_j(u_j) + \dots + B_1(u_1) \dots B_n(u_n). \quad (3.2)$$

Следовательно, функция  $u \mapsto \|(T(u) - I)x\|$  мажорируется на  $[0; \delta)^n$  линейной комбинацией координатных функций, а потому в силу леммы 3.1 она  $\mu$ -интегрируема на  $[0; \delta)^n \setminus \{0\}$  в смысле Бохнера. Наконец, поскольку  $\|(T(u) - I)x\| \leq (M^n + 1)\|x\|$ , то, снова по лемме 3.1, эта же функция  $\mu$ -интегрируема и на множестве  $\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta)^n$ , что и завершает доказательство. •

Отметим, что при  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $A = z \in \mathbb{C}^n$ ,  $\text{Re } z_j \leq 0$ ,  $T(u) = e^{z \cdot u}$  функция  $\psi(s)$  продолжается по формуле (3.1) до функции  $\psi(z)$ , голоморфной в области  $\{\text{Re } z_j < 0; j = 1, \dots, n\}$  из  $\mathbb{C}^n$  и непрерывной в ее замыкании.

## §4. Основная теорема

Пусть  $\psi \in \mathcal{T}_n$  и  $t \geq 0$ . Предложение 2.1 показывает, что функция  $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$  будет абсолютно монотонной на  $(-\infty; 0)^n$ . Очевидно также, что  $g_t(s) \leq 1$ . В силу  $n$ -мерного варианта теоремы Бернштейна–Уиддера существует такая единственная ограниченная положительная мера  $\nu_t$  на  $\mathbb{R}_+^n$ , что при  $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\nu_t(u) = (\mathcal{L}\nu_t)(-s), \quad (4.1)$$

где  $\mathcal{L}$  обозначает  $n$ -мерное преобразование Лапласа.

**Определение 4.1.** Используя обозначения, введенные выше, положим

$$g_t(A) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) d\nu_t(u) \quad (4.2)$$

(интеграл понимается в смысле Бохнера). Очевидно, что  $\|g_t(A)\| \leq M^n e^{t\psi(-0)} \leq M^n$ . Поскольку  $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$ , то  $\nu_t$  образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на  $\mathbb{R}_+^n$ . Поэтому  $g(A) : t \mapsto g_t(A)$  есть равномерно ограниченная полугруппа операторов на  $X$ . В частности,  $g(A)$  есть  $C_0$ -полугруппа.

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

В основе дальнейших рассмотрений лежит следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Оператор  $\psi(A)$  расширяется до генератора равномерно ограниченной полугруппы  $g(A)$  класса  $C_0$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим прежде всего случай, когда  $\partial\psi(-0)/\partial s_j \neq \infty$  при всех  $j = 1, \dots, n$ , и покажем, что генератор полугруппы  $g(A)$  совпадает с  $\psi(A)$  на  $D(A)$ . Предположим сначала, что  $c_0 = \psi(-0) = 0$ . Дифференцируя (4.1), получаем

$$\partial\psi(s)/\partial s_j \cdot g_t(s) = \mathcal{L}(t^{-1}u_j d\nu_t(u))(-s),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = \lim_{t \rightarrow +0} \mathcal{L}(t^{-1}u_j d\nu_t(u))(-s), \quad j = 1, \dots, n.$$

С другой стороны, из (2.1) вытекает, что

$$\frac{\partial\psi(s)}{\partial s_j} = c_1^j + \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} u_j d\mu(u) = \mathcal{L}(c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u))(-s),$$

где  $\varepsilon_0$  есть мера Дирака на  $\mathbb{R}^n$ , сосредоточенная в нуле. Следовательно, по теореме непрерывности (см., например, [7, с. 530, теорема 3]) имеем при  $t \rightarrow +0$

$$t^{-1}u_j d\nu_t(u) \rightarrow c_1^j d\varepsilon_0(u) + u_j d\mu(u), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

где сходимость понимается в узкой топологии. Далее,

$$\frac{g_t(A)x - x}{t} = \int_{\mathbb{R}_+^n} (T(u) - I)xt^{-1}d\nu_t(u) \quad (x \in D(A)). \quad (4.4)$$

Пусть, как и выше,  $B_j(u_j) = T_j(u_j) - I$ . Если мы для  $x$  из  $D(A)$  положим  $u_j^{-1}B_j(u_j)x = A_jx$  при  $u = 0$ , то функция  $u \mapsto u_j^{-1}B_j(u_j)x$  будет ограниченной и непрерывной на  $\mathbb{R}_+^n$ . В силу (4.3) имеем теперь при  $t \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} B_j(u_j)xt^{-1}d\nu_t(u) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}u_j d\nu_t(u) \\ &\rightarrow c_1^j A_jx + \int_{\mathbb{R}_+^n} B_j(u_j)x d\mu(u); \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)xt^{-1}d\nu_t(u) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)(u_j^{-1}B_j(u_j)x)t^{-1}u_j d\nu_t(u) \\ &\rightarrow c_1^j B_i(0)A_jx + \int_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)x d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}_+^n} B_i(u_i)B_j(u_j)x d\mu(u) \end{aligned}$$

и так далее. Поэтому, используя (4.4) и (3.2), имеем при  $x \in D(A)$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g_t(A)x - x}{t} = c_1 \cdot Ax + \int_{\mathbb{R}_+^n} (T(u)x - x)d\mu(u) = \psi(A)x.$$

Если же  $c_0 = \psi(-0) < 0$ , то все сводится к предыдущему, поскольку  $\psi(s) = c_0 + \psi_0(s)$ , где  $\psi_0 \in \mathcal{T}_n$  и  $\psi_0(-0) = 0$ .

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. не будем исключать равенства  $\partial\psi(-0)/\partial s_j = \infty$  при некоторых  $j$ . Пусть  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ , причем все  $\varepsilon_j > 0$ , и пусть  $\psi_\varepsilon(s) := \psi(s - \varepsilon)$ ,  $s \in (-\infty; 0)^n$ . Тогда  $\partial\psi_\varepsilon(-0)/\partial s_j = \partial\psi(-\varepsilon)/\partial s_j \neq \infty$  при всех  $j$ , причем  $\psi_\varepsilon$  принадлежит  $\mathcal{T}_n$  и имеет интегральное представление

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(s) &= c_0 + c_1 \cdot (s - \varepsilon) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{(s-\varepsilon) \cdot u} - 1)d\mu(u) \\ &= \psi(-\varepsilon) + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1)e^{-\varepsilon \cdot u} d\mu(u). \end{aligned}$$

Поскольку

$$g_{\varepsilon t}(s) := e^{t\psi_\varepsilon(s)} = g_t(s - \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} e^{-\varepsilon \cdot u} d\nu_t(u),$$

то по доказанному выше генератор  $C_0$ -полугруппы

$$g_{\varepsilon t}(A) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) e^{-\varepsilon \cdot u} d\nu_t(u) \quad (4.5)$$

совпадает на  $D(A)$  с  $\psi_\varepsilon(A)$ . Обозначим его  $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)}$ . Заметим, что при  $x \in D(A)$

$$\psi(A)x - \psi_\varepsilon(A)x = (c_0 - \psi(-\varepsilon))x + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (T(u) - I)x(1 - e^{-\varepsilon \cdot u}) d\mu(u),$$

а потому

$$\|\psi(A)x - \psi_\varepsilon(A)x\| \leq (|c_0 - \psi(-\varepsilon)| + (M^n + 1) \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{-\varepsilon \cdot u}) d\mu(u)) \|x\|. \quad (4.6)$$

Используя теорему Б. Леви, получаем из (4.6), что при  $\varepsilon \downarrow +0$

$$\psi_\varepsilon(A)x \rightarrow \psi(A)x \quad (x \in D(A)). \quad (4.7)$$

Неравенство (4.6) показывает также, что оператор  $\psi(A) - \psi_\varepsilon(A)$  продолжается с  $D(A)$  до некоторого ограниченного оператора  $F_\varepsilon$  на  $X$ . Оператор  $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)}$  замкнут, значит, замкнут и оператор  $\widetilde{\psi_\varepsilon(A)} + F_\varepsilon$ , являющийся расширением оператора  $\psi(A)$ . Следовательно, оператор  $\psi(A)$  допускает замыкание, которое мы временно обозначим  $\overline{\psi(A)}$ . При этом  $D(A)$  является ядром оператора  $\overline{\psi(A)}$  в смысле [8]. Из (4.5) получаем, что  $g_{\varepsilon t}(A)$  сходится по норме к  $g_t(A)$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) равномерно по  $t$  на любом компакте из  $\mathbb{R}_+$ , поскольку при  $0 \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \|g_t(A) - g_{\varepsilon t}(A)\| &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \|T(u)\| (1 - e^{-\varepsilon \cdot u}) d\nu_t(u) \\ &\leq M^n \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} d\nu_t(u) - \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\varepsilon \cdot u} d\nu_t(u) \right) = M^n (e^{t\psi(-0)} - e^{t\psi(-\varepsilon)}) \\ &\leq M^n (e^{t(\psi(-0) - \psi(-\varepsilon))} - 1) \leq M^n (e^{b(\psi(-0) - \psi(-\varepsilon))} - 1). \end{aligned}$$

Кроме того,  $\|g_{\varepsilon t}(A)\| \leq M^n$ . Поэтому если  $G$  есть генератор полугруппы  $g(A)$ , то  $R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)}) \rightarrow R(\lambda, G)$  сильно при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) (см., например,



[9, с. 373, теорема 2]). С другой стороны, фиксируем  $\lambda$  из  $\mathbb{C}$  с  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Если  $S_\varepsilon := \widetilde{\psi_\varepsilon(A)} + F_\varepsilon$ , то  $\lambda \in \rho(S_\varepsilon)$  в силу теоремы IX.2.1 из [8]. Так как  $U_\lambda := \widetilde{\psi(A)} - \lambda I \subset S_\varepsilon - \lambda I$ , то  $U_\lambda^{-1} \subset R(\lambda, S_\varepsilon)$ . Используя ограниченность  $R(\lambda, S_\varepsilon)$  и замкнутость  $U_\lambda^{-1}$ , выводим, что образ  $X_1$  оператора  $U_\lambda$  замкнут в  $X$ . Применяя метод доказательства теоремы VIII.1.5 из [8], получаем, что  $R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})x \rightarrow U_\lambda^{-1}x$  при  $x \in X_1(\varepsilon \downarrow +0)$ . В самом деле, поскольку  $\|g_{\varepsilon t}(A)\| \leq M^n$ , то  $\|R(\lambda, \psi_\varepsilon(A))\| \leq M^n / \operatorname{Re} \lambda$ . Следовательно, для  $x$  из  $X_1$ , таких что  $U_\lambda^{-1}x \in D(A)$ , имеем при  $\varepsilon \downarrow +0$

$$R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})x - U_\lambda^{-1}x = R(\lambda, \widetilde{\psi_\varepsilon(A)})(\psi_\varepsilon(A) - \overline{\psi(A)})U_\lambda^{-1}x \rightarrow 0.$$

Но множество таких  $x$  плотно в  $X_1$ , и осталось применить принцип равномерной ограниченности. Таким образом,  $R(\lambda, G)x = U_\lambda^{-1}x$  при всех  $x \in X_1$ , а потому  $\overline{\psi(A)} \subset G$ , что и завершает доказательство. •

**Замечание.** Как следует из приведенных выше рассуждений,  $\overline{\psi(A)} = G$  тогда и только тогда, когда существует регулярная точка  $\lambda$  оператора  $\psi(A)$  с  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

Теорема 4.1 мотивирует окончательный вариант основного определения данной работы. Всюду ниже через  $\operatorname{Gen}(X)$  будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных  $C_0$ -полугрупп в  $X$ .

**Определение 4.2.** Под значением функции  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  на наборе  $A = (A_1, \dots, A_n)$  коммутирующих операторов из  $\operatorname{Gen}(X)$  будем понимать генератор полугруппы  $g(A)$ . Это значение мы далее обозначаем  $\psi(A)$ .

Возникающее функциональное исчисление будем называть  $\mathcal{T}_n$ -исчислением.

**Следствие.** Оператор  $\psi(A)$  коммутирует с ограниченным оператором в  $X$  вместе с  $A_1, \dots, A_n$ .

### §5. Непрерывность и единственность $\mathcal{T}_n$ -исчисления

**Определение 5.1.** Пусть  $\psi_k \in \mathcal{T}_n$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Будем говорить, что последовательность  $\psi_k$  сходится к  $\psi_0$  в  $\mathcal{T}_n$  (обозначение:  $\psi_k \rightarrow \psi_0$  в  $\mathcal{T}_n$ ), если  $\psi_k(s) \rightarrow \psi_0(s)$  при  $s \in (-\infty; 0)^n$  и  $\psi_k(-0) \rightarrow \psi_0(-0)$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Скажем, что последовательность  $S_k$  из  $\operatorname{Gen}(x)$  сходится к  $S_0$  из  $\operatorname{Gen}(X)$  в слабом резольвентном смысле, если при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$  с  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  последовательность резольвент  $R(\lambda, S_k)$  сходится к  $R(\lambda, S_0)$  в слабой операторной топологии ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Теорема 5.1.** Если  $\psi_k \in \mathcal{T}_n$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) и  $\psi_k \rightarrow \psi_0$  в  $\mathcal{T}_n$ , то для любого набора коммутирующих операторов  $A_j$  из  $\operatorname{Gen}(X)$  последовательность  $\psi_k(A)$  сходится к  $\psi_0(A)$  в слабом резольвентном смысле ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Доказательство.** При  $t \geq 0$ ;  $k = 0, 1, \dots$  положим  $g_t^k(s) := e^{t\psi_k(s)}$ ,  $s \in (-\infty; 0)^n$ . В силу (4.1)  $g_t^k(s) = (\mathcal{L}\nu_t^k)(-s)$ , где  $\nu_t^k$  — ограниченная положительная мера на  $\mathbb{R}_+^n$ , причем последнее равенство остается справедливым и при  $s = 0$ , если взять  $g_t^k(0) := e^{t\psi_k(-0)}$ . По условию теоремы последовательность  $\mathcal{L}\nu_t^k$  сходится поточечно на  $(-\infty; 0)^n \cup \{0\}$  к функции  $\mathcal{L}\nu_t^0$ , непрерывной в нуле. По теореме 3 из [7, с. 530] при  $S = (-\infty; 0)^n \cup \{0\}$ ;  $X = (-\infty; 0]^n$ ;  $M = \mathbb{R}_+^n$  последовательность  $\nu_t^k$  узко сходится к  $\nu_t^0$ . Из (4.2) следует тогда, что  $g_t^k(A)$  сходится к  $g_t^0(A)$  в слабой операторной топологии, и для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством  $R(\lambda, \psi_k(A)) = \mathcal{L}(g_t^k(A))(\lambda)$  и теоремой Лебега об ограниченной сходимости ( $\|g_t^k(A)\| \leq M^n$ ). •

**Теорема 5.2.** Для фиксированного набора  $A = (A_1, \dots, A_n)$  коммутирующих операторов из  $\text{Gen}(X)$  имеется единственное отображение  $\Phi_A : \mathcal{T}_n \rightarrow \text{Gen}(X)$ , такое что

а)  $\Phi_A$  непрерывно при наделении  $\mathcal{T}_n$  и  $\text{Gen}(X)$  топологиями сходимости в  $\mathcal{T}_n$  и слабой резольвентной сходимости соответственно;

б)  $\Phi_A$  аддитивно и положительно-однородно, а именно

$$\Phi_A(\psi_1 + \psi_2) = \Phi_A(\psi_1) + \Phi_A(\psi_2), \Phi_A(\lambda\psi) = \lambda\Phi_A(\psi) (\lambda > 0);$$

в)  $\Phi_A(-1) = -I$ ,  $\Phi_A(s_j) = A_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и  $\Phi_A(e^{s \cdot u} - 1) = T(u) - I$ , где  $s_1, \dots, s_n$  есть координатные функции на  $\mathbb{R}^n$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $u \in \mathbb{R}_+^n$ .

**Доказательство.** Положим  $\Phi_A(\psi) := \psi(A)$  ( $\psi \in \mathcal{T}_n$ ). Справедливость а) тогда следует из теоремы 5.1. Далее,  $\psi := \psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{T}_n$ , причем  $g_t(s) = e^{t\psi(s)} = \mathcal{L}(\nu_t^1 * \nu_t^2)(-s)$ , где  $\nu_t^j$  соответствует  $g_t^j$  по формуле (4.1). Поэтому

$$g_t(A) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) d(\nu_t^1 * \nu_t^2)(u) = g_t^1(A) g_t^2(A).$$

По [2, теорема 10.10.2] (4) (при  $\xi_k = 1$ ) генератор  $\psi(A)$  полугруппы  $g(A)$  есть  $\psi_1(A) + \psi_2(A)$ , что и доказывает первое из свойств б). Второе свойство б) очевидно. Первое из равенств в) также очевидно. Для доказательства второго положим  $\psi(s) = s_j$ . Тогда  $g_t(s) = e^{ts_j} = \mathcal{L}(\varepsilon_{te_j})(-s)$ , где  $\{\varepsilon_j : j = 1, \dots, n\}$  есть стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . В силу (4.1)  $g_t(A) = T_j(t)$ , и полугруппа  $g(A)$  имеет генератор  $A_j$ , т. е.  $\psi(A) = A_j$ . Наконец, по определению 3.1  $\Phi_A(e^{u \cdot s} - 1)x = (T(u) - I)x$  при  $x \in D(A)$ . Переходя к замыканиям, имеем последнюю из формул в).

Докажем единственность отображения  $\Phi_A$ . Пусть  $\Phi_A$  и  $\Phi'_A$  — два отображения, удовлетворяющие условиям теоремы. В силу (2.1) функцию  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  можно сколь угодно точно аппроксимировать в смысле сходимости в  $\mathcal{T}_n$  суммами вида

$$\sigma(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \sum_{i=1}^m (e^{s \cdot u_i} - 1)\alpha_i, \quad \alpha_i > 0.$$

В силу свойств б) и в)  $\Phi_A(\sigma) = \Phi'_A(\sigma)$ , и для завершения доказательства осталось воспользоваться свойством а). •

§6. Теорема о сложной функции

Композиция функций сохраняет принадлежность к классу  $\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$ . Точнее, если  $\psi_1(s) \in \mathcal{T}_n$  и  $\psi_2(r) \in \mathcal{T}_m$ , то, например, функция  $\psi(r, 's) := \psi_1(\psi_2(r), 's)$  принадлежит  $\mathcal{T}_{m+n-1}$  (мы полагаем  $'s = (s_2, \dots, s_n)$ ). Это проверяется непосредственно с учетом утверждения 3 предложения 2.1. При этом справедлива

**Теорема 6.1.** Пусть  $\psi_1 \in \mathcal{T}_n$ ,  $\psi_2 \in \mathcal{T}_m$  и  $\psi(r, 's) = \psi_1(\psi_2(r), 's)$ , где  $r \in (-\infty; 0)^m$ ,  $s \in (-\infty; 0)^n$ ,  $s = (s_2, \dots, s_n)$ . Тогда для любого набора  $A = (A_1, \dots, A_{m+n-1})$  коммутирующих операторов из  $\text{Gen}(X)$  имеем

$$\psi(A) = \psi_1(\psi_2(A_1, \dots, A_m), A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1}).$$

**Доказательство.** Для  $w$  из  $\mathbb{R}_+^{m+n-1}$  пусть

$$w' = (w_1, \dots, w_m), \quad w'' = (w_{m+1}, \dots, w_{m+n-1}).$$

Если  $e^{t\psi_j(s)} = (\mathcal{L}\nu_j^t)(-s)$ ,  $j = 1, 2$ , то положим

$$\nu_t(w) = \int_0^{\infty} \nu_p^2(w') \nu_t^1(dp, w'')$$

(меру в  $\mathbb{R}_+^q$  и соответствующую ей функцию распределения мы обозначаем одинаково). Легко проверить, что  $\nu_t$  есть функция распределения некоторой ограниченной борелевской меры в  $\mathbb{R}_+^{m+n-1}$ . Далее, для любых борелевских  $E_1 \subset \mathbb{R}_+^m$  и  $E_2 \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$  имеем

$$\nu_t(E_1 \times E_2) = \int_0^{\infty} \nu_p^2(E_1) \nu_t^1(dp, E_2), \tag{6.1}$$

что нетрудно доказать, рассмотрев сначала случай, когда  $E_i$  параллелепипеды. Если теперь  $F_1(w')$  и  $F_2(w'')$  — две непрерывные ограниченные функции на  $\mathbb{R}_+^m$  и  $\mathbb{R}_+^{n-1}$  соответственно, значения которых — ограниченные операторы в  $X$  (или числа), то из формулы (6.1) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} F_1(w') F_2(w'') d\nu_t(w) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \left( \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} F_1(w') d\nu_p^2(w') \right) F_2(w'') d\nu_t^1(p, w''), \end{aligned} \tag{6.2}$$

поскольку (6.2) сразу сводится к (6.1), когда  $F_i$  — простые функции. Из (6.2) получаем, что

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}\nu_t)(-r, -'s) &= \int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} e^{r \cdot w' + 's \cdot w''} d\nu_t(w) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \left( \int_{\mathbb{R}_+^m} e^{r \cdot w'} d\nu_p^2(w') \right) e{'s \cdot w''} d\nu_t^1(p, w'') \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^m} e^{\psi_2(r)p + 's \cdot w''} d\nu_t^1(p, w'') = e^{t\psi_1(\psi_2(r), 's)} \\
 &= e^{t\psi(r, 's)}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

В силу определения 4.2 полугруппа  $(A' := (A_n, \dots, A_m))$ ,

$$g_p^2(A') := \int_{\mathbb{R}_+^m} T(r) d\nu_p^2(r)$$

имеет генератор  $\psi_2(A')$ . Аналогично полугруппа

$$\begin{aligned}
 g_t^1(\psi_2(A'), A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1}) \\
 := \int_{\mathbb{R}_+^m} g_p^2(A') \prod_{i=m+1}^{m+n-1} T_i(w_i) d\nu_t^1(p, w'')
 \end{aligned}$$

имеет генератор  $\psi_1(\psi_2(A'), A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1})$ . С другой стороны, снова используя (6.2), имеем

$$\begin{aligned}
 g_t^1(\psi_2(A'), A_{m+1}, \dots, A_{m+n-1}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \left( \int_{\mathbb{R}_+^m} T(r) d\nu_p^2(r) \right) \prod_{i=m+1}^{m+n-1} T_i(w_i) d\nu_t^1(p, w'') \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^{m+n-1}} T(r, w'') d\nu_t(r, w'').
 \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (6.3) и определения 4.2 последняя полугруппа имеет генератор  $\psi(A)$ , что и завершает доказательство. •

### §7. Голоморфность полугруппы $g(A)$

**Теорема 7.1.** Пусть  $\psi \in \mathcal{T}_n$ . Если коммутирующие операторы  $A_1, \dots, A_n$  из  $\text{Gen}(X)$  являются генераторами голоморфных полугрупп, то и  $\psi(A)$  является генератором голоморфной полугруппы.

**Доказательство.** Можно считать, что  $c_0 = 0$ . Рассмотрим два случая.

1)  $c_1^1 \neq 0, \dots, c_1^n \neq 0$ . Заметим, что

$$T(u) - I = \sum_{j=1}^n T_1(u_1) \dots T_{j-1}(u_{j-1})(T_j(u_j) - I),$$

причем при всех  $x \in D(A_j)$

$$(T_j(u_j) - I)x = \int_0^{u_j} T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j. \tag{7.1}$$

Следовательно, с учетом (3.1) получаем при  $x$  из  $D(A)$

$$\psi(A)x = \sum_{j=1}^n \left( c_1^j A_j x + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} \left( \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right) d\mu(u) \right). \tag{7.2}$$

Покажем, что оператор, стоящий под знаком суммы в (7.2), является генератором голоморфной полугруппы. При  $\delta > 0, x \in D(A_j)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} \left( \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right) d\mu(u) \\ &= \int_{[0, \delta]^n \setminus \{0\}} + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0, \delta]^n} \left( \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right) d\mu(u). \end{aligned} \tag{7.3}$$

В силу неравенства

$$\left\| \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right\| \leq M^j \|A_j x\| u_j$$

первое слагаемое в правой части (7.3) оценивается по норме величиной

$$\left( \frac{M^j}{|c_1^j|} \int_{[0, \delta]^n \setminus \{0\}} u_j d\mu(u) \right) \|c_1^j A_j x\|,$$

причем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{[0, \delta]^n \setminus \{0\}} u_j d\mu(u) = 0$$

по лемме 3.1. С другой стороны, в силу (7.1)

$$\left\| \int_0^{u_j} \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) T_j(\xi_j) A_j x d\xi_j \right\| = \left\| \prod_{i=1}^{j-1} T_i(u_i) (T_j(u_j) - I) x \right\| \leq M^{j-1} (M+1) \|x\|,$$

а потому второе слагаемое в правой части (7.3) оценивается по норме величиной  $M^{j-1} (M+1) \mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta]^n) \|x\|$ . Таким образом, каждое слагаемое в (7.2) удовлетворяет условиям следствия IX.2.5 из [8] и, значит, является генератором голоморфной полугруппы. По теореме 10.10.2 (4) из [2] их сумма также является генератором голоморфной полугруппы, что и завершает доказательство в рассматриваемом случае.

2) Среди чисел  $c_1^j$  имеются нулевые. Пусть, для определенности, в точности  $c_1^1 = 0, \dots, c_1^m = 0$  ( $1 \leq m \leq n$ ). При  $\alpha > 0$  оператор  $\alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A)$  по теореме 10.10.2 (4) из [2] порождает полугруппу  $g_t^\alpha(A) = \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A)$ , которая голоморфна по доказанному выше. По критерию голоморфности из [9, с. 351] найдется такая константа  $K_1$ , что при  $t \in (0; 1]$

$$\left\| \frac{d}{dt} g_t^\alpha(A) \right\| = \left\| \left( \alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A) \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \right\| \leq \frac{K_1}{t}.$$

Далее, в силу того же критерия найдется константа  $K_2$ , такая что  $\|A_i T_i(t)\| \leq K_2/t$  при  $i = 1, \dots, m; t \in (0; 1]$ . Но тогда

$$\|\alpha A_i T_i(\alpha t)\| = \alpha \|T_i'(\alpha t)\| \leq \alpha \frac{K_2}{\alpha t} = \frac{K_2}{t},$$

и мы имеем

$$\left\| \alpha \left( \sum_{i=1}^m A_i \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) \right\| \leq \sum_{i=1}^m M^{m-1} \|\alpha A_i T_i(\alpha t)\| \leq \frac{m M^{m-1} K_2}{t}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \left( \alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A) \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \\ &= \left( \alpha \sum_{i=1}^m A_i \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) + \psi(A) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A), \end{aligned}$$

причем в правой части стоит сумма ограниченных операторов, то при  $t \in (0; 1]$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \left\| \psi(A) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \right\| \\ & \leq \left\| \left( \alpha \sum_{i=1}^m A_i + \psi(A) \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \right\| + \left\| \alpha \left( \sum_{i=1}^m A_i \right) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) g_t(A) \right\| \\ & \leq \frac{K_1 + mM^{m+n-1}K_2}{t}. \end{aligned}$$

Таким образом, полагая  $C = K_1 + mM^{m+n-1}K_2$ , имеем при  $t \in (0; 1]$

$$\left\| \psi(A) g_t(A) \prod_{j=1}^m T_j(\alpha t) x \right\| \leq \frac{C \|x\|}{t} \quad (x \in X).$$

Учитывая  $C_0$ -свойство полугрупп  $T_j$  и ограниченность оператора  $\psi(A) g_t(A) = d/dt g_t(A)$ , получаем отсюда при  $\alpha \rightarrow +0$

$$\| \psi(A) g_t(A) x \| \leq \frac{C \|x\|}{t} \quad (t \in (0; 1], x \in X),$$

что и завершает доказательство. •

### §8. Связь с $n$ -мерным исчислением Хилле—Филлипса.

#### Теорема об отображении совместного спектра

Для доказательства теоремы об отображении спектра в  $\mathcal{T}_n$ -исчислении нам понадобится  $n$ -мерный вариант функционального исчисления из [2, гл. XV, XVI], построение которого вполне аналогично одномерному. Опишем некоторые определения и свойства этого исчисления, ограничившись достаточным для наших целей случаем равномерно ограниченных  $C_0$ -полугрупп и ограниченных мер.

**Определение 8.1.** Пусть  $a$  есть ограниченная регулярная борелевская мера на  $\mathbb{R}_+^n$ ,  $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$ ,  $s \in (-\infty; 0)^n$ . Определим значение функции  $\psi$  на наборе  $A = (A_1, \dots, A_n)$  коммутирующих операторов из  $\text{Gen}(X)$  формулой

$$\Psi(a, A) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) da(u).$$

Подобным образом в §4 вводились операторы  $g_t(A)$ .

Покажем, что это исчисление согласовано с  $\mathcal{T}_n$ -исчислением.

**Теорема 8.1.** *Функция  $\psi$  из  $\mathcal{T}_n$  имеет вид  $s \mapsto (\mathcal{L}a)(-s)$  тогда и только тогда, когда  $\psi(-\infty) \neq -\infty$ . При этом  $\psi(A) = \Psi(a, A)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$ ,  $s \in (-\infty; 0)^n$ . Тогда в силу тауберовой теоремы для преобразования Лапласа  $\psi(-\infty) = a(\{0\}) \neq -\infty$ .

Обратно, пусть  $\psi \in \mathcal{T}_n$  и  $\psi(-\infty) \neq -\infty$ . Тогда  $c_1 = 0$  и мера  $\mu$  из (2.1) ограничена. Последнее следует из того, что, когда все  $s_j \downarrow -\infty$ , то

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \rightarrow -\mu(\mathbb{R}_+^n)$$

по теореме Б. Леви. Следовательно,  $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$ , где  $a = \mu + (c_0 - \|\mu\|)\varepsilon_0$ . Поэтому при  $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \psi(A)x &= c_0x + \int_{\mathbb{R}_+^n} (T(u) - I)x d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x da(u) \\ &= \Psi(a, A)x. \end{aligned}$$

Так как оператор  $\Psi(a, A)$  ограничен, последнее равенство справедливо при всех  $x \in X$ , что и требовалось доказать. •

Теорема 8.1 позволяет сводить многие рассуждения к случаю  $\psi(-\infty) = -\infty$ .

Для определения совместного спектра набора  $A$  нам потребуется некоторая подготовка. Обозначим через  $\mathfrak{B}$  бикоммутант семейства операторов  $\{T_j(t) : t \geq 0; j = 1, \dots, n\}$  в алгебре  $\mathcal{L}(X)$  всех ограниченных операторов в  $X$ . Тогда  $\mathfrak{B}$  есть сильно замкнутая коммутативная наполненная подалгебра алгебры  $\mathcal{L}(X)$  с единицей, содержащая все операторы  $T_j(t)$ . Как и в [2, теорема 16.3.1], получаем, что при любом  $j$  спектр алгебры  $\mathfrak{B}$  разбивается на два подмножества  $\mathcal{W}_j$  и  $\mathcal{U}_j$ , и существует непрерывная функция  $\alpha_j$  на  $\mathcal{W}_j$  такая, что для любого комплексного гомоморфизма  $\varphi$  алгебры  $\mathfrak{B}$

$$\varphi(R(\lambda, A_j)) = \begin{cases} (\lambda - \alpha_j(\varphi))^{-1}, & \varphi \in \mathcal{W}_j, \\ 0, & \varphi \in \mathcal{U}_j \end{cases}$$

для всех  $\lambda \notin \sigma(A_j)$ , причем спектр  $\sigma(A_j) = \alpha_j(\mathcal{W}_j)$ .

**Определение 8.2.** Используя предыдущие обозначения, определим совместный спектр  $\sigma(A)$  набора  $A$  равенством

$$\sigma(A) = \{(\alpha_1(\varphi), \dots, \alpha_n(\varphi)) : \varphi \in \bigcap_{j=1}^n \mathcal{W}_j\}$$

(мы считаем, что  $\sigma(A) = \emptyset$ , если  $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{W}_j = \emptyset$ ).

Ясно, что  $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n)$ . Повторяя доказательство теоремы 16.4.1 из [2], убеждаемся в справедливости следующего результата.



**Предложение 8.1.** Если все полугруппы  $T_j$  непрерывны в равномерной операторной топологии и операторы  $A_j$  неограничены, то для функции  $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$  имеем

$$\psi(\sigma(A)) \cup a(\{0\}) = \sigma(\Psi(a, A)). \tag{8.1}$$

Пример функции  $\psi(s) = e^s - 1$  из  $\mathcal{T}_1$  показывает, что теорема об отображении спектра в  $\mathcal{T}_n$ -исчислении, вообще говоря, неверна (см., например, [6, с. 218–219]). Покажем, что она справедлива для голоморфных полугрупп.

**Теорема 8.2.** Пусть все  $T_j$  есть голоморфные полугруппы, а операторы  $A_j$  неограничены. Если  $\psi \in \mathcal{T}_n$  и  $\psi(-\infty) = -\infty$ , то

$$\sigma(\psi(A)) = \psi(\sigma(A)).$$

**Доказательство.** В силу голоморфности полугруппы  $g(A)$  (теорема 7.1) и  $T_j$  непрерывны в равномерной операторной топологии  $t > 0$  ([2, теорема 3.10.1]). Поэтому (см., например, [6, предложение 8.5]) при всех  $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = \sigma(g_t(A)) \setminus \{0\}.$$

Далее, из (8.1) при  $a = \nu_t$ ,  $\psi(s) = g_t(s)$ ,  $\Psi(a, A) = g_t(A)$  имеем

$$\sigma(g_t(A)) = e^{t\psi(\sigma(A))} \cup \{0\},$$

поскольку  $\nu_t(\{0\}) = g_t(-\infty) = 0$  по тауберовой теореме. Сопоставляя два последних равенства, получаем при  $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = e^{t\psi(\sigma(A))}. \tag{8.2}$$

По причине голоморфности соответствующих полугрупп спектры  $\sigma(A_j)$  и  $\sigma(\psi(A))$  лежат внутри некоторого сектора

$$Y = \{s_1 + iy_1 : |y_1| \leq k(-s_1), s_1 \leq 0\},$$

где  $k > 0$  фиксировано. Поэтому  $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n) \subset Y^n$ . Фиксируем  $s_1^0 \leq 0$  и обозначим через  $E$  и  $P$  сечения множеств  $\sigma(\psi(A))$  и  $\psi(\sigma(A))$  соответственно при помощи прямой  $\{s_1 = s_1^0\}$ . Множество  $E$  ограничено. Докажем ограниченность множества  $P$ . При  $s \in (-\infty; 0)^n$ ,  $u \in (0; +\infty)^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  таких, что  $s + iy \in Y^n$ , имеем

$$\left| \frac{e^{s \cdot u} \sin(y \cdot u)}{e^{s \cdot u} \cos(y \cdot u) - 1} \right| = \frac{|\sin(y \cdot u)|}{e^{-s \cdot u} - \cos(y \cdot u)} \leq \frac{|y \cdot u|}{(1 - s \cdot u) - 1} \leq k.$$

Кроме того,  $|c_1 \cdot y| \leq k c_1 \cdot (-s)$ . Из (3.1), где положено  $A = z = s + iy$ ,  $T(u) = e^{z \cdot u}$ , выводим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(z) &= c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{s \cdot u} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \leq 0, \\ \operatorname{Im} \psi(z) &= c_1 \cdot y + \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} \sin(y \cdot u) d\mu(u). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Поэтому предыдущие неравенства показывают, что  $|\operatorname{Im} \psi(z)| \leq k(-\operatorname{Re} \psi(z))$ . Следовательно,  $\psi(Y^n) \cap \{s_1 = s_1^0\} \subset \{s_1^0\} \times [k s_1^0; -k s_1^0]$ . В частности,  $\psi(\sigma(A))$  имеет ограниченное сечение  $P$ . Из (8.2) следует, что  $e^{tiE} = e^{tiP}$ . Выбирая теперь  $t > 0$  настолько малым, чтобы функция  $\zeta \mapsto e^{t\zeta}$  была однолистной в горизонтальной полосе, содержащей  $i(E \cup P)$ , получаем, что  $E = P$ . Теорема доказана. •

### §9. Формула для резольвенты

Сейчас мы установим формулу, выражающую резольвенту  $R(\lambda, \psi(A))$  оператора  $\psi(A)$  через  $R(\lambda, A_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Для дробных степеней оператора соответствующий результат получен Т. Като (см., например, [10, с. 144, (5.19)]).

**Теорема 9.1.** Пусть для любого  $\lambda > 0$  существует положительная мера  $\tau_\lambda$  на  $\mathbb{R}_+^n$  с преобразованием Стильбеса

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{d\tau_\lambda(\xi)}{(\xi_1 + z_1) \dots (\xi_n + z_n)} = \frac{1}{\lambda - \psi(-z)} \quad (\operatorname{Re} z_j > 0; j = 1, \dots, n). \quad (9.1)$$

Тогда при  $\lambda > 0$  справедливо равенство ( $x \in X$ )

$$R(\lambda, \psi(A))x = \int_{\mathbb{R}_+^n} R(\xi, A)x d\tau_\lambda(\xi), \quad (9.2)$$

где положено  $R(\xi, A) = R(\xi_1, A_1) \dots R(\xi_n, A_n)$ .

**Доказательство.** Из (8.3) следует, что  $\operatorname{Re} \psi(-z) \leq 0$ , если все  $\operatorname{Re} z_j > 0$ . Поэтому при  $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\psi(-z)} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\nu_t(u) \right) dt.$$

С другой стороны, в силу (9.1)

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} e^{-\xi \cdot u} du \right) d\tau_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\nu_t(u) \right) dt. \quad (9.3)$$

Предположим сначала, что для некоторого  $\omega > 0$  справедливы неравенства  $\|T_j(t)\| \leq M e^{-\omega t}$  ( $t \geq 0; j = 1, \dots, n$ ), и докажем формулу ( $\nu_t(u)$  обозначает функцию распределения меры  $\nu_t$ )

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) x d\nu_t(u) \right) dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) x d \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right) \quad (\lambda > 0, x \in X). \quad (9.4)$$

Отметим прежде всего, что в силу оценки  $\|T(u)\| \leq M^n e^{-\omega u}$  интеграл в левой части (9.4) абсолютно сходится. Далее, имея в виду интегральные суммы для внутреннего интеграла в левой части (9.4), рассмотрим разбиение  $P$  множества  $\mathbb{R}_+^n$  на  $n$ -мерные параллелепипеды  $[a^k; b^k]$ ,  $k = 1, \dots, m$ . С учетом формулы

$$\nu_t([a^k; b^k]) = \Delta_{a_1^k b_1^k \dots a_n^k b_n^k} \nu_t(u)$$

( $\Delta_{a_1 b_1 \dots a_n b_n}$  — итерированные разностные операторы) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \sum_{k=1}^m T(u^k) x \nu_t([a^k; b^k]) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^m T(u^k) x \Delta_{a_1^k b_1^k \dots a_n^k b_n^k} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right), \end{aligned} \quad (9.5)$$

где  $u^k \in [a^k; b^k]$ . Так как

$$\left\| \sum_{k=1}^m T(u^k) x \nu_t([a^k; b^k]) \right\| \leq M^n \|x\| \nu_t(\mathbb{R}_+^n) \leq M^n \|x\|,$$

то в левой части (9.5) возможен предельный переход под знаком интеграла, когда мелкость разбиения  $P$  стремится к нулю, и в пределе мы получаем (9.4). При  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $T(u) = e^{-z \cdot u}$  из (9.4) выводим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\nu_t(u) \right) dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right).$$

Сопоставляя последнее равенство с (9.3), имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right).$$

В силу произвольности  $z$  из  $\{\operatorname{Re} z_j > 0 : j = 1, \dots, n\}$  это влечет следующее соотношение для мер

$$\left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = d \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right).$$

С учетом этого равенства и (9.4) получаем теперь в силу определения 4.2 ( $\lambda > 0, x \in X$ )

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} R(\xi, A)x d\tau_\lambda(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\xi \cdot u} T(u)x du \right) d\tau_\lambda(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x \left( \int_0^\infty e^{-\xi \cdot u} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x d \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nu_t(u) dt \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x d\nu_t(u) \right) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t(A)x dt \\ &= R(\lambda, \psi(A))x. \end{aligned}$$

Осталось освободиться от ограничений на рост полугрупп  $T_j$ . Если  $\|T_j(t)\| \leq M$ , то для натуральных  $k$  рассмотрим полугруппы  $t \mapsto e^{-t/k} T_j(t)$  с генераторами  $A_j - k^{-1}I$ . Положим  $A - k^{-1}I := (A_1 - k^{-1}I, \dots, A_n - k^{-1}I)$ ,  $s \pm 1/k = (s_1 \pm 1/k, \dots, s_n \pm 1/k)$ . По доказанному выше

$$R(\lambda, \psi(A - k^{-1}I))x = \int_{\mathbb{R}_+^n} R(\xi, A - k^{-1}I)x d\tau_\lambda(\xi) \quad (x \in X). \quad (9.6)$$

Так как  $\psi(A - k^{-1}I) = \psi_k(A)$ , где последовательность  $\psi_k(s) := \psi(s - 1/k)$  удовлетворяет условиям теоремы 5.1, то  $R(\lambda, \psi(A - k^{-1}I))$  сходится слабо к  $R(\lambda, \psi(A))$  ( $k \rightarrow \infty$ ). С другой стороны, при  $\xi_j > 0, j = 1, \dots, n$  имеет место сильная сходимость

$$R(\xi, A - k^{-1}I) = R(\xi + 1/k, A) \rightarrow R(\xi, A) \quad (k \rightarrow \infty),$$

причем  $\|R(\xi + 1/k, A)\| \leq M^n / \xi_1 \dots \xi_n$ . Полагая  $z_j \downarrow 0, j = 1, \dots, n$ , выводим из (9.1) по теореме Б. Леви, что функция  $1/\xi_1 \dots \xi_n \tau_\lambda$  — интегрируема. В частности, множество  $\mathbb{R}_+^n \setminus \{\xi_1 > 0, \dots, \xi_n > 0\}$   $\tau_\lambda$ -нулевое. Следовательно, полагая в (9.6)  $k \rightarrow \infty$  и применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем (9.2), что и завершает доказательство. •

**Замечание.** Для  $\lambda > 0$  положим  $f_\lambda(z) := 1/(\lambda - \psi(z))$  ( $\operatorname{Re} z_j < 0; j = 1, \dots, n$ ). При  $n = 1$  имеется критерий разрешимости уравнения (9.1). А именно, как следует из одной теоремы М. Г. Крейна ([11, с. 522, теорема П.4]), это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда  $\psi(-\infty) = -\infty$  и при  $\lambda > 0$  функция  $f_\lambda(z)$

продолжается до голоморфной в полуплоскости  $\{0 < \arg z < \pi\}$  и отображает ее в свое замыкание. При этом  $\tau_\lambda$  можно найти из (9.1), используя различные формулы обращения преобразования Стильтеса (см., например, [12, гл. 5, §1]; [3, с. 157]). В частности, рассматривая  $\tau_\lambda$  как распределение, имеем

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} (f_\lambda(\xi + iy) - f_\lambda(\xi - iy)), \tag{9.7}$$

где предел понимается в смысле сходимости в  $\mathcal{D}'_+$ .

При  $n > 1$  нам известны следующие достаточные условия разрешимости уравнения (9.1). Далее используются результаты и обозначения из [13, гл. II, §10];  $C = (0; +\infty)^n$ ;  $f_{\lambda\pm}$  — граничные значения в  $\mathcal{H}$ , функции  $f_\lambda$  при  $y \rightarrow 0$ ,  $y \in \pm C$ . Если при любом  $\lambda > 0$  найдется такое  $s \in \mathbb{R}$ , что  $f_\lambda \in H^{(s)}(C) \cap H^{(s)}(-C)$ , причем распределение

$$\tau_\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^n} (f_{\lambda+} + (-1)^n f_{\lambda-})$$

является положительной мерой, сосредоточенной на  $\mathbb{R}_+^n$ , то  $\tau_\lambda$  есть решение уравнения (9.1). Это следует из теоремы 1 в [13, с. 153], примененной к конусам  $C$  и  $-C$ .

§10. Устойчивость  $\mathcal{T}_n$ -исчисления

Под устойчивостью  $\mathcal{T}_n$ -исчисления мы понимаем непрерывность отображения  $A \mapsto \psi(A)$  в различных смыслах, которые уточняются ниже. Отметим сначала такое следствие теоремы 9.1.

**Теорема 10.1.** Пусть выполнены условия теоремы 9.1 и пусть  $A_{kj}$  есть генератор  $C_0$ -полугруппы  $T_{kj}$  в  $X$ , причем операторы  $T_{kj}(t)$  коммутируют и  $\|T_{kj}(t)\| \leq M$  ( $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, \dots$ ). Положим  $A_k := (A_{k1}, \dots, A_{kn})$ . Если  $R(\xi, A_k) \rightarrow R(\xi, A_0)$  равномерно (сильно) при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\xi_j > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), то и  $R(\lambda, \psi(A_k)) \rightarrow R(\lambda, \psi(A_0))$  равномерно (сильно) при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lambda > 0$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 9.1 и ее доказательства

$$R(\lambda, \psi(A_k)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} R(\xi, A_k) d\tau_\lambda(\xi) \quad (\lambda > 0; k = 0, 1, \dots),$$

причем  $\|R(\xi, A_k)\| \leq M^n / \xi_1 \dots \xi_n$ , когда все  $\xi_j > 0$ , и в правой части последнего неравенства стоит  $\tau_\lambda$ -интегрируемая функция. Поэтому  $R(\xi, A_k) \rightarrow R(\xi, A_0)$  на множестве  $\mathbb{R}_+^n$  равномерно (сильно)  $\tau_\lambda$ -почти всюду, и осталось применить теорему Лебега о мажорированной сходимости. •

Имеет место также следующий результат.

**Теорема 10.2.** Пусть  $\psi \in \mathcal{T}_n$ , а оператор  $A_{kj}$  есть генератор  $C_0$ -полугруппы  $T_{kj}$  в  $X$ , причем  $\|T_{kj}(t)\| \leq M$ , операторы  $T_{kj}(t)$  коммутируют ( $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) и  $A_k = (A_{k1}, \dots, A_{kn})$ . Предположим, что существует плотно определенный оператор  $A_{0j}$  на  $X$  такой, что для некоторого  $\lambda_0$  из  $\mathbb{C}$  с  $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$  имеем  $R(\lambda_0, A_{kj}) \rightarrow R(\lambda_0, A_{0j})$  сильно и  $A_{kj}x \rightarrow A_{0j}x$  при некотором  $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A_k)$  ( $k \rightarrow \infty$ ;  $j = 1, \dots, n$ ). Тогда  $A_{0j}$  является генератором некоторой равномерно ограниченной  $C_0$ -полугруппы  $T_{0j}$  и  $\psi(A_k)x \rightarrow \psi(A_0)x$ , где  $A_0 = (A_{01}, \dots, A_{0n})$ .

**Доказательство.** По теореме Гроттера–Като существует  $C_0$ -полугруппа  $T_{0j}$  с генератором  $A_{0j}$  такая, что  $T_{kj}(t) \rightarrow T_{0j}(t)$  сильно и  $\|T_{0j}(t)\| \leq M$ , если  $\|T_{kj}(t)\| \leq M$  ( $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ). Если  $T_k(u) := T_{k1}(u_1) \dots T_{kn}(u_n)$ , то при  $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A_k)$  и  $k = 1, 2, \dots$  имеем

$$\psi(A_k)x = c_0x + c_1 \cdot A_kx + \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta]^n} (T_k(u) - I)x d\mu(u). \quad (10.1)$$

Так как при достаточно малом  $\delta > 0$  по лемме 3.1  $\mu(\mathbb{R}_+^n \setminus [0; \delta]^n) < \infty$ , то можно переходить к пределу под знаком второго интеграла в (10.1). Далее, используя (3.2), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} (T_k(u) - I)x d\mu(u) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} B_{kj}(u_j)x d\mu(u) + \sum_{i,j=1}^n \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} B_{ki}(u_i)B_{kj}(u_j)x d\mu(u) + \dots \\ &+ \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} B_{k1}(u_1) \dots B_{kn}(u_n)x d\mu(u). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Теорема 11.5.4 из [2] показывает, что

$$\left\| \frac{T_{kj}(u_j)x - x}{u_j} \right\| = \left\| \frac{1}{u_j} \int_0^{u_j} T_{kj}(\tau)A_{kj}x d\tau \right\| \leq M \|A_{kj}x\|,$$

причем правая часть мажорируется величиной, не зависящей от  $k$ . Снова применяя лемму 3.1, получаем, учитывая теорему Лебега о мажорированной сходимости, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} B_{kj}(u_j)x d\mu(u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} \frac{T_{kj}(u_j)x - x}{u_j} u_j d\mu(u) \\ &= \int_{[0; \delta]^n \setminus \{0\}} (T_{0j}(u_j) - I)x d\mu(u). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается законность предельного перехода под знаком интеграла и в других слагаемых правой части (10.2), поскольку  $\|B_{kj}(t)\| \leq M + 1$ . Таким образом, снова учитывая (3.2), получаем, что и в первом интеграле в (10.1) также возможен предельный переход под знаком интеграла, что и завершает доказательство. •

§11. Примеры и приложения

1. Функция  $\psi(s) = -(-s)^\alpha$  при  $\alpha \in (0; 1)$  принадлежит  $\mathcal{T}_1$  и имеет интегральное представление

$$\psi(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (e^{su} - 1)u^{-1-\alpha} du \quad (s < 0),$$

что нетрудно проверить дифференцированием. При этом формула (3.1) превращается в формулу Балакришнана (см., например, [9, с. 358]). Полагая в теореме 6.1  $m = n = 1$ ;  $\psi_1(s) = -(-s)^\alpha$ ;  $\psi_2(s) = -(-s)^\beta$ ;  $\alpha, \beta \in (0; 1)$ , получаем формулу Ватанабе ([9, с. 366, (31)]). Из теоремы 5.1 следует, что  $(-A)^\alpha \rightarrow -A(\alpha \rightarrow 1)$  в слабом резольвентном смысле. Если  $A$  порождает голоморфную полугруппу, то по теореме 8.2  $\sigma((-A)^\alpha) = \{(-\lambda)^\alpha : \lambda \in \sigma(A)\}$ . С целью применить теорему 9.1 заметим, что  $\psi(z)$  есть та ветвь функции  $-(-z)^\alpha$  в области  $\{Re z < 0\}$ , которая отрицательна при  $z = s < 0$ . Функция  $\psi(z)$  голоморфна в  $\{0 < \arg z < 2\pi\}$  и отображает полуплоскость  $\{0 < \arg z < \pi\}$  в себя. Следовательно, этим свойством обладает и функция  $f_\lambda(z) = 1/(\lambda + (-z)^\alpha)$  при  $\lambda > 0$  ( $(-z)^\alpha \notin (-\infty; 0)$  при  $z \notin (0; +\infty)$ ). Таким образом, справедлива формула (9.2). Считая  $\tau_\lambda$  распределением, найдем его по формуле (9.7). Поскольку  $(-\xi \pm i0)^\alpha = e^{\pm i\pi\alpha} \xi^\alpha$  при  $\xi > 0$  ([14, с. 83]), то вычисления в алгебре граничных значений голоморфных функций дают ([15, §29.7, с. 341])

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{\lambda + e^{-i\pi\alpha} \xi^\alpha} - \frac{1}{\lambda + e^{i\pi\alpha} \xi^\alpha} \right) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{\xi^\alpha}{\lambda^2 + 2\lambda \xi^\alpha \cos \pi\alpha + \xi^{2\alpha}},$$

что в соединении с (9.2) приводит к упоминавшейся выше формуле Като (см., например, [10, с. 144, (5.19)]).

2. Пусть  $\psi(s) = -\log(1-s)$ ,  $s < 0$ . Это функция из  $\mathcal{T}_1$  с интегральным представлением

$$\psi(s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1)u^{-1}e^{-u} du.$$

Следовательно, по определению 3.1

$$-\log(I - A)x = \int_0^\infty (T(u) - I)xu^{-1}e^{-u} du \quad (x \in D(A)).$$

В этом примере

$$g_t(s) = (1-s)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^{\infty} e^{su} u^{t-1} e^{-u} du,$$

что можно проверить с помощью таблиц преобразования Лапласа, а потому

$$g_t(A) = (I-A)^{-t} = \Gamma(t)^{-1} \int_0^{\infty} T(u) u^{t-1} e^{-u} du.$$

Поскольку  $\psi(z) = -\log(1-z)$ , где выбирается та ветвь логарифма в области  $\{-\pi < \arg z < \pi\}$ , которая положительна на  $(1; +\infty)$ , то, как нетрудно убедиться, выполнены все условия теоремы 9.1. Как и в примере 1, найдем „ядро Като“  $\tau_\lambda$ , соответствующее функции  $\psi$ , используя формулу (9.7). Поскольку

$$\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x),$$

где  $\theta$  — функция Хевисайда ([14, с. 43, пример 6; с. 51, пример 4]), то

$$\begin{aligned} \tau_\lambda(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{\lambda + \log(1 - \xi - i0)} - \frac{1}{\lambda + \log(1 - \xi + i0)} \right) \\ &= \frac{\theta(\xi - 1)}{\pi^2 + (\lambda + \log|\xi - 1|)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\lambda > 0$

$$R(\lambda, -\log(I-A)) = \int_1^{\infty} \frac{R(\xi, A) d\xi}{\pi^2 + (\lambda + \log(\xi - 1))^2}.$$

Пусть, в частности,  $X = C_0(\mathbb{R}^n)$  есть пространство непрерывных функций на  $\mathbb{R}^n$ , исчезающих на бесконечности, с  $\sup$ -нормой, и пусть  $\Delta$  есть замыкание сужения оператора Лапласа на пространство Шварца  $S(\mathbb{R}^n)$ . Известно (см., например, [16, с. 281, пример 5]), что  $\Delta$  есть генератор сжимающей  $C_0$ -полугруппы  $T(u)$ , определяемой сверткой с функцией  $y \mapsto (4\pi u)^{-n/2} \times e^{-|y|^2/4u}$  (определение генератора в [16] отличается знаком от принятого в данной работе). Используя формулу 3.471.9 из [17, с. 354], можно убедиться, что полугруппа  $(I - \Delta)^{-t}$  задается сверткой с функцией

$$y \mapsto \pi^{-n/2} \Gamma(t)^{-1} 2^{1-t-n/2} |y|^{t-n/2} K_{t-n/2}(|y|/\sqrt{2})$$



(„бесселев потенциал“, см., например, [13, с. 138; 18, §27]), где  $K_\nu$  — цилиндрическая функция Макдональда. Как показано выше, генератор этой полугруппы находится по формуле ( $x \in D(\Delta)$ )

$$\begin{aligned} -\log(I - \Delta)x(s) &= \int_0^\infty \left( (4\pi u)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4u}} x(y) dy - x(s) \right) \frac{du}{ue^u} \\ &= \int_0^\infty (4\pi u)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4u}} (x(y) - x(s)) dy \frac{du}{ue^u}. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и снова применяя формулу 3.471.9 из [17], получаем окончательно, что генератор бесселева потенциала есть ( $x \in D(\Delta)$ )

$$-\log(I - \Delta)x(s) = 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x(y) - x(s)}{|y - s|^{n/2}} K_{n/2} \left( \frac{|y - s|}{\sqrt{2}} \right) dy.$$

3. Рассмотрим функцию ( $s < 0$ )  $\psi(s) = -\operatorname{arch}(1-s) = -\log(1-s + \sqrt{(1-s)^2 - 1})$  из  $\mathcal{T}_1$ . При помощи дифференцирования убеждаемся, что

$$\psi(s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1) I_0(u) \frac{du}{ue^u}$$

( $I_t$  — функция Бесселя чисто мнимого аргумента). Поэтому

$$-\operatorname{arch}(I - A)x = \int_0^\infty (T(u) - I)x I_0(u) \frac{du}{ue^u} \quad (x \in D(A)).$$

В рассматриваемом случае

$$g_t(s) = (1 - s + \sqrt{(1-s)^2 - 1})^{-t} = \int_0^\infty e^{su} t I_t(u) \frac{du}{ue^u},$$

что также можно проверить с помощью таблиц преобразования Лапласа. Следовательно,

$$g_t(A) = (I - A + \sqrt{(I - A)^2 - I})^{-t} = \int_0^\infty T(u) t I_t(u) \frac{du}{ue^u}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 9.1 заметим, что  $\psi(z) = -\operatorname{arch}(1-z)$ , где ветвь арккосинуса в области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 1]$  выделяется условием  $\operatorname{arg} x > 0$  при  $x > 1$ . Тогда  $\psi(z)$  голоморфна в области  $\{0 < \operatorname{arg} z < 2\pi\}$ . Остальные свойства  $\psi(z)$  вытекают из представления  $\psi(z) = -\log w(1-z)$ , где  $w(\zeta) = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$  — та ветвь функции, обратной функции Жуковского, для которой  $w(x) > 1$  при  $x > 1$ . Пользуясь свойствами функции  $w(\zeta)$ , нетрудно проверить, что  $\operatorname{arg} w(x \pm i0) = \pm\eta(x)$ , где  $\eta(x) = \pi$  при  $x \leq -1$ ,  $\eta(x) = \arccos x$  при  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $\eta(x) = 0$  при  $x \geq 1$ , а потому

$$\log w(x \pm i0) = \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| \pm i\eta(x).$$

Поскольку

$$f_\lambda(\xi \pm i0) = \frac{1}{\lambda + \log w(1 - \xi \mp i0)},$$

то формула (9.7) дает

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta(1 - \xi)}{\eta^2(1 - \xi) + (\lambda + \log |1 - \xi + \sqrt{(1 - \xi)^2 - 1}|)^2}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} R(\lambda, -\operatorname{arch}(I - A)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 \frac{R(\xi, A) \arccos(1 - \xi) d\xi}{\arccos^2(1 - \xi) + (\lambda + \log |1 - \xi + \sqrt{(1 - \xi)^2 - 1}|)^2} \\ &+ \int_2^\infty \frac{R(\xi, A) d\xi}{\pi^2 + (\lambda + \log |1 - \xi + \sqrt{(1 - \xi)^2 - 1}|)^2}. \end{aligned}$$

4. Функции из  $\mathcal{T}_n$  при  $n > 1$  можно строить, используя суммы функций из  $\mathcal{T}_1$  (от различных аргументов), а также операцию композиции. Следующая теорема дает, в частности, еще один способ построения функций из  $\mathcal{T}_2$ .

**Теорема 11.1.** Пусть  $\psi_1 \in \mathcal{T}_1$ , причем

$$\psi_1(s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1) f(u) du \quad \text{и} \quad \omega := \int_0^\infty u f(u) du \neq \infty$$

для некоторой измеримой функции  $f$  на  $\mathbb{R}_+$ . Тогда функция

$$\psi(s_1, s_2) := \frac{\psi_1(s_1) - \psi_1(s_2)}{s_1 - s_2} - \omega$$

принадлежит  $T_2$ , и для любых коммутирующих операторов  $A_1, A_2$  из  $\text{Gen}(X)$  таких, что оператор  $(A_1 - A_2)^{-1}$  существует и ограничен, имеем

$$\psi(A_1, A_2)x = (A_1 - A_2)^{-1}(\psi_1(A_1) - \psi_1(A_2))x - \omega x \quad (x \in D(A)).$$

**Доказательство.** Сделав в интеграле

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{s_1 u_1 + s_2 u_2} - 1) f(u_1 + u_2) du_1 du_2$$

замену переменных  $v = u_1 + u_2, w = u_1 - u_2$ , получаем, что он равен  $\psi(s_1, s_2)$ , что доказывает первое утверждение теоремы. Таким образом, при  $x \in D(A)$

$$\psi(A_1, A_2)x = \int_0^\infty \int_0^\infty (T_1(u_1)T_2(u_2) - I)xf(u_1 + u_2)du_1 du_2.$$

Полагая и здесь  $v = u_1 + u_2, w = u_1 - u_2$ , имеем

$$\psi(A_1, A_2)x = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(v)dv \int_{-v}^v \left( T_1\left(\frac{v+w}{2}\right)T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) - I \right) xdw. \quad (11.1)$$

Покажем, что  $(x \in D(A))$

$$\frac{1}{2} \int_{-v}^v \left( T_1\left(\frac{v+w}{2}\right)T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) - I \right) xdw = (A_1 - A_2)^{-1}(T_1(v) - T_2(v))x - vx. \quad (11.2)$$

Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & (A_1 - A_2) \frac{1}{2} \int_{-v}^v T_1\left(\frac{v+w}{2}\right)T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) xdw \\ &= \frac{1}{2} A_1 \int_{-v}^v T_1\left(\frac{v+w}{2}\right)T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) xdw - \frac{1}{2} A_2 \int_{-v}^v T_2\left(\frac{v-w}{2}\right)T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) xdw. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Учитывая замкнутость оператора  $A_1$  и интегрируя по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} A_1 \int_{-v}^v T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) x dw \\ &= \frac{1}{2} \int_{-v}^v T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) A_1 T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) x dw = \int_{-v}^v T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) d_w T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) x \\ &= T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) x \Big|_{w=-v}^{w=v} - \int_{-v}^v T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) A_2 T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) x dw \\ &= T_1(v)x - T_2(v)x + \frac{1}{2} \int_{-v}^v A_2 T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) x dw. \end{aligned}$$

Подставляя это в (11.3), имеем

$$(A_1 - A_2) \frac{1}{2} \int_{-v}^v T_1\left(\frac{v+w}{2}\right) T_2\left(\frac{v-w}{2}\right) x dw = (T_1(v) - T_2(v))x,$$

откуда сразу следует (11.2). Подставляя в свою очередь (11.2) в (11.1), получаем и последнее утверждение теоремы.

В заключение отметим, что основные результаты данной работы анонсированы в [19].

#### Список литературы

- [1] Schoenberg I. J., *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. of Math. (2) 39 (1938), 811-841.
- [2] Хилле Э., Филлипс Р., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [3] Ахизер Н. И., *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [4] Berg Ch., Christensen J. P. R., Ressel P., *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions*, Grad. Texts in Math., vol. 100, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.
- [5] Devinatz A., Nussbaum A. E., *Real characters of certain semigroups with applications*, Duke Math. J. 28 (1961), no. 2, 221-237.
- [6] Клемент Ф. и др., *Однопараметрические полугруппы: Абстрактные дифференциальные уравнения с прил.*, Мир, М., 1992.
- [7] Бурбаки Н., *Интегрирование. (Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах)*, Наука, М., 1977.
- [8] Каго Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [9] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

- [10] Крейн С. Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
- [11] Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие*, Наука, М., 1973.
- [12] Брычков Ю. А., Прудников А. П., *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, М., 1977.
- [13] Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.
- [14] Гельфанд И. М., Шилор Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Обобщенные функции, вып. 1, Физматгиз, М., 1959.
- [15] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [16] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [17] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 4-е изд., перераб., Физматгиз, М., 1963.
- [18] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [19] Миротин А. Р., *Многомерное функциональное исчисление от генераторов  $C_0$ -полугрупп*, VII Белорусская математическая конференция: Тез. докл., Минск, 1996.

Гомельский государственный  
университет им.Ф. Скорины  
246699, Беларусь  
Гомель, Советская, 104

Поступило 10 октября 1996 г.