



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Bazhenov, R. R. Tikhbatullina, Computable categoricity of the Boolean algebra  $\mathfrak{B}(\omega)$  with a distinguished automorphism, *Algebra Logika*, 2013, Volume 52, Number 2, 131–144

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.153.44

November 3, 2024, 11:49:17



УДК 512.563+510.5+510.6

**О ВЫЧИСЛИМОЙ КАТЕГОРИЧНОСТИ БУЛЕВОЙ  
АЛГЕБРЫ  $\mathfrak{B}(\omega)$  С ВЫДЕЛЕННЫМ  
АВТОМОРФИЗМОМ<sup>\*)</sup>**

**Н. А. БАЖЕНОВ, Р. Р. ТУХБАТУЛЛИНА**

**Введение**

Изучение категоричности вычислимых моделей относительно различных классов начал ван дер Варден, исследовавший следующий вопрос: существует ли эффективный алгоритм построения изоморфизма между двумя алгебраическими замыканиями поля, построенными различными способами. Эту проблему решили Фрейлих и Шефердсон [1]. Мальцев [2] доказал, что конечно порождённые алгебраические системы являются вычислимо категоричными. Это положило начало систематическому изучению проблемы описания категоричных моделей.

Пусть  $\alpha$  — вычислимый ординал. Вычислимая модель  $\mathfrak{A}$  называется *вычислимо категоричной* ( $\Delta_\alpha^0$ -категоричной), если для любого вычислимого представления  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$  существует вычислимый изоморфизм ( $\Delta_\alpha^0$ -изоморфизм)  $\varphi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ .

Вычислимая модель  $\mathfrak{A}$  называется *относительно  $\Delta_\alpha^0$ -категоричной*, если для любой модели  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ , такой что носитель  $\mathfrak{B}$  является подмножеством множества натуральных чисел, существует  $\Delta_\alpha^0(D(\mathfrak{B}))$ -изоморфизм  $\varphi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ , где  $D(\mathfrak{B})$  — атомная диаграмма  $\mathfrak{B}$ .

---

<sup>\*)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-276.2012.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00236.

Если вычислимая модель относительно  $\Delta_\alpha^0$ -категорична, то она является  $\Delta_\alpha^0$ -категоричной, но, вообще говоря, понятия  $\Delta_\alpha^0$ -категоричности и относительной  $\Delta_\alpha^0$ -категоричности не совпадают. Гончаров, Харизанов, Найт, Мак-Кой, Миллер и Соломон [3] доказали, что для любого предельного вычислимого ординала  $\alpha$  существует  $\Delta_\alpha^0$ -категоричная модель, не являющаяся относительно  $\Delta_\alpha^0$ -категоричной. Чисхолм, Фокина, Гончаров, Харизанов, Найт и Куинн [4] получили аналогичный результат для произвольного предельного ординала  $\alpha$ .

Пусть  $\mathbf{d}$  — тьюрингова степень. Вычислимая модель  $\mathfrak{A}$  называется  $\mathbf{d}$ -вычислимо категоричной, если для любого вычислимого представления  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$  существует  $\mathbf{d}$ -вычислимый изоморфизм  $\varphi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ .

Заметим, что вычислимая модель  $\Delta_{n+1}^0$ -категорична тогда и только тогда, когда она  $\mathbf{0}^{(n)}$ -вычислимо категорична.

Фокина, Калимуллин и Миллер [5] ввели понятия *спектра категоричности* и *степени категоричности* вычислимой модели. Если  $\mathfrak{A}$  — вычислимая модель, то *спектром категоричности*  $\mathfrak{A}$  называется множество

$$\text{CatSpec}(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{d} \mid \mathfrak{A} \text{ } \mathbf{d}\text{-вычислимо категорична}\}.$$

Говорят, что тьюрингова степень  $\mathbf{d}_0$  является *степенью категоричности*  $\mathfrak{A}$ , если  $\mathbf{d}_0$  является наименьшей степенью в  $\text{CatSpec}(\mathfrak{A})$ .

Фокина, Калимуллин и Миллер [5] показали, что для любого  $m \in \omega$  и любой тьюринговой степени  $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}^{(m)}$ , являющейся 2-вычислимо перечислимой относительно  $\mathbf{0}^{(m)}$ , существует вычислимая модель  $\mathfrak{A}$ , для которой  $\mathbf{d}$  является степенью категоричности. Чима, Франклин и Шор [6] обобщили этот результат для тьюринговых степеней  $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}^{(\alpha)}$ , 2-вычислимо перечислимых относительно  $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ , где  $\alpha$  — произвольный вычислимый предельный ординал.

Перейдём к описанию результатов, касающихся булевых алгебр. Гончаров, Дзгоев [7] и Реммел [8] независимо получили описание вычислимо категоричных булевых алгебр: вычислимая булева алгебра  $\mathfrak{B}$  является вычислимо категоричной тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{B}$  содержит только конечное число атомов. Мак-Кой [9, 10] получил алгебраическое описание

относительно  $\Delta_2^0$ - и относительно  $\Delta_3^0$ -категоричных булевых алгебр. Харрис [11] доказал, что для произвольного  $n \in \omega$  классы  $\Delta_n^0$ -категоричных булевых алгебр и относительно  $\Delta_n^0$ -категоричных булевых алгебр совпадают. Алаев [12] получил описание вычислимо категоричных булевых алгебр с конечным числом выделенных идеалов; Баженов [13] показал, что никакая тьюрингова степень  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{0}'$ , не может быть степенью категоричности вычислимой булевой алгебры.

Данная работа продолжает работы [14, 15]. В § 1 приводятся необходимые предварительные сведения. В § 2 доказываем, что любая вычислимо перечислимая тьюрингова степень является степенью категоричности некоторой вычислимой булевой алгебры с выделенным автоморфизмом. В § 3 строится вычислимо категоричная булева алгебра с выделенным автоморфизмом, имеющая множество атомов заданной вычислимо перечислимой тьюринговой степени. Все результаты получены в неразделимом соавторстве.

## § 1. Предварительные сведения

Используемые в данной работе основные понятия и определения теории вычислимых моделей содержатся в [16–18].

Если  $\mathfrak{B}$  — модель некоторого языка,  $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ , то запись  $\bar{a} \in \mathfrak{B}$  означает, что  $a_1, \dots, a_n$  принадлежат носителю модели  $\mathfrak{B}$ . Через  $p_x$  обозначается  $x$ -ое в естественной нумерации простое число. Сокращение *в. п.* будет использоваться вместо термина *вычислимо перечислимый*.

Будем считать, что булевы алгебры рассматриваются как модели языка  $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee^2, \wedge^2, C^1; 0, 1\}$ . На булевых алгебрах стандартным образом определяется порядок:  $a \leq b$  тогда и только тогда, когда  $a \wedge b = a$ . Под булевой алгеброй с выделенным автоморфизмом  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  будем понимать булеву алгебру  $\mathfrak{B}$  с заданным на ней автоморфизмом  $\varphi$ , рассматриваемым как новый одноместный функциональный символ.

Пусть  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  — булевы алгебры. Через  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$  обозначается множество атомов  $\mathfrak{B}$ , через  $F(\mathfrak{B})$  — идеал Фреше  $\mathfrak{B}$ . Если  $C$  — подмножество

носителя  $\mathfrak{B}$ , то  $\text{gr}_{\mathfrak{B}}(C)$  обозначает подалгебру  $\mathfrak{B}$ , порождённую  $C$ . Запись вида  $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{C}$  означает, что  $\mathfrak{B}$  является подалгеброй  $\mathfrak{C}$ . Для  $k \geq 2$  и  $a, b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{B}$  будем говорить, что кортеж  $b_1, \dots, b_k$  является *разбиением*  $a$  (на  $k$  элементов), если

$$(a = b_1 \vee \dots \vee b_k) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} (b_i \wedge b_j = 0), \quad (1)$$

и использовать  $(b_1, \dots, b_k \mid a)$  как сокращённую форму записи формулы (1).

Если  $L$  — линейный порядок, то через  $\mathfrak{B}(L)$  обозначается подалгебра  $\langle P(L), \cup, \cap, C; \emptyset, L \rangle$ , порождённая элементами вида  $[x, y) \Leftrightarrow \{z \mid x \leq z < y\}$  и  $[x, \infty) \Leftrightarrow \{z \mid x \leq z\}$ , где  $x, y \in L$ .

Пусть  $\mathfrak{A}^* = \langle \mathfrak{A}, \varphi \rangle$  — булева алгебра с выделенным автоморфизмом. Для  $a \in \mathfrak{A}$  *орбитой*  $a$  в  $\mathfrak{A}^*$  называется множество

$$\text{Orb}_{\varphi}(a) = \{\varphi^n(a), \varphi^{-n}(a) \mid n \in \omega\}.$$

Множество  $C$ , являющееся подмножеством носителя  $\mathfrak{A}$ , называется *орбитой* (*атомной орбитой*), если существует  $a \in \mathfrak{A}$  ( $a \in \text{Atom}(\mathfrak{A})$ ), такое что  $C = \text{Orb}_{\varphi}(a)$ .

Определим частичную функцию  $|\cdot|_{\varphi}$ , действующую из носителя  $\mathfrak{A}$  в  $\omega$  следующим образом:

$$|a|_{\varphi} = \begin{cases} \min\{n \mid n \geq 1 \ \& \ \varphi^n(a) = a\}, & \text{если } (\exists n_0 \geq 1)(\varphi^{n_0}(a) = a), \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $\mathfrak{A}^* = \langle \mathfrak{A}, \varphi \rangle$  — счётная булева алгебра с выделенным автоморфизмом. *Характером*  $\mathfrak{A}^*$  называется множество

$$\chi(\mathfrak{A}^*) \Leftrightarrow \{\langle n, k \rangle \mid n, k > 0 \ \& \ \exists^{\geq k} \text{ попарно различных атомных орбит мощности } n \text{ в } \mathfrak{A}^*\}.$$

Всюду далее счётную булеву алгебру с выделенным автоморфизмом будем кратко называть *A-алгеброй*.

Множество  $K \subseteq (\omega \setminus \{0\})^2$  называется *характером*, если для любых  $n$  и  $k > 0$  из условия  $\langle n, k+1 \rangle \in K$  следует  $\langle n, k \rangle \in K$ . Для характера  $K$

определим функцию  $F_K : \omega \rightarrow \omega + 1$  по правилу

$$F_K(n) = \sup(\{k \mid \langle n, k \rangle \in K\} \cup \{0\}),$$

при этом договоримся считать, что  $F_K(n) = \omega$ , если  $\sup(\{k \mid \langle n, k \rangle \in K\}) = \infty$ . Заметим, что для любых характеров  $K$  и  $L$  равенство  $K = L$  справедливо тогда и только тогда, когда  $F_K = F_L$ . Также легко понять, что любой характер  $A$ -алгебры является характером.

Следующее замечание показывает, что если мы хотим рассматривать  $A$ -алгебры вида  $\langle \mathfrak{B}(\omega), \varphi \rangle$  с точностью до изоморфизма, то достаточно ограничиться рассмотрением только их характеров и числа бесконечных атомных орбит в этих  $A$ -алгебрах.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Пусть  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  и  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$  —  $A$ -алгебры, такие что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ ,  $\mathfrak{B}^*$  содержит  $\beta$  попарно различных бесконечных атомных орбит,  $\mathfrak{C}^*$  содержит  $\gamma$  попарно различных бесконечных атомных орбит. Изоморфизм  $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\chi(\mathfrak{B}^*) = \chi(\mathfrak{C}^*)$  и  $\beta = \gamma$ .

В работе [15] доказаны следующие результаты.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.** Пусть  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  — вычислимая  $A$ -алгебра. Тогда  $\chi(\mathfrak{B}^*)$  является в.п. относительно  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$ .

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  —  $A$ -алгебра, такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ .  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^*$  имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $\chi(\mathfrak{B}^*)$  — конечное множество;
- (2) существует вычислимая функция  $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega \setminus \{0\}$ , такая что
  - (a)  $(\forall x)(f(x, 0) = 1)$ ,
  - (b)  $(\forall x)(\forall s)(f(x, s) \text{ делит } f(x, s + 1))$ ,
  - (c) для любого  $x$  существует  $\lim_s f(x, s)$ ,
  - (d)  $(\forall n)(F_{\chi(\mathfrak{B}^*)}(n) = |\{x \mid \lim_s f(x, s) = n\}|)$ .

**ТЕОРЕМА 1.2.** Пусть  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  —  $A$ -алгебра, такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ .  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^*$  имеет вычислимое представление с вычисли-

мым множеством атомов тогда и только тогда, когда  $\chi(\mathfrak{B}^*)$  — в. п. множество.

## § 2. В. п. степень категоричности

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** Пусть  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  и  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$  — вычислимые  $A$ -алгебры, такие что  $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$ ,  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ ,  $\mathfrak{B}^*$  содержит  $n < \omega$  бесконечных атомных орбит, а множества  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$  и  $\text{Atom}(\mathfrak{C})$  вычислимы относительно тьюринговой степени  $\mathbf{d}$ . Тогда существует  $\mathbf{d}$ -вычислимый изоморфизм  $A$ -алгебр  $f: \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности можно считать, что  $n \neq 0$ . Пусть  $I_1, \dots, I_n$  — все бесконечные атомные орбиты в  $\mathfrak{B}^*$ ,  $J_1, \dots, J_n$  — все бесконечные атомные орбиты в  $\mathfrak{C}^*$ . Зафиксируем  $d_i \in I_i$ ,  $e_i \in J_i$  для  $1 \leq i \leq n$ .

Построим  $\mathbf{d}$ -вычислимую биекцию  $g: \text{Atom}(\mathfrak{B}) \rightarrow \text{Atom}(\mathfrak{C})$  по шагам.

**Шаг 0.** Полагаем  $g_0 = \{\langle d_i, e_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$ ,  $B_0 = \text{Atom}(\mathfrak{B}) \setminus \{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ,  $C_0 = \text{Atom}(\mathfrak{C}) \setminus \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

**Шаг  $s + 1$ .** Пусть  $B_s = \{b_0^s < b_1^s < \dots\}$ ,  $C_s = \{c_0^s < c_1^s < \dots\}$ . Полагаем

$$\tilde{g}_s = g_s \cup \{\langle \varphi^{s+1}(d_i), \psi^{s+1}(e_i) \rangle, \langle \varphi^{-(s+1)}(d_i), \psi^{-(s+1)}(e_i) \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

**Случай 1.** Пусть  $s = 2t$ . Ищем наименьшее  $i \leq s + 1$ , для которого найдётся  $1 \leq m \leq s + 1$ , такое что

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi^m(b_i^s) = b_i^s \ \& \ \bigwedge_{1 \leq k < l \leq m} \varphi^k(b_i^s) \neq \varphi^l(b_i^s). \quad (2)$$

Если такие  $i$  и  $m$  нашлись, то находим наименьшее  $j$  с условием

$$\mathfrak{C}^* \models \psi^m(c_j^s) = c_j^s \ \& \ \bigwedge_{1 \leq k < l \leq m} \psi^k(c_j^s) \neq \psi^l(c_j^s) \quad (3)$$

и полагаем  $g_{s+1} = \tilde{g}_s \cup \{\langle \varphi^k(b_i^s), \psi^k(c_j^s) \rangle \mid 1 \leq k \leq m\}$ . В противном случае полагаем  $g_{s+1} = \tilde{g}_s$ .

Случай 2. Пусть  $s = 2t + 1$ . Ищем наименьшее  $j \leq s + 1$ , для которого найдётся  $1 \leq m \leq s + 1$ , такое что выполняется (3). Если такие  $j$  и  $m$  нашлись, то находим наименьшее  $i$ , такое что выполняется (2). Определяем  $g_{s+1}$  так же, как и в случае 1.

Вне зависимости от того, какой из случаев 1 или 2 выполняется, полагаем  $B_{s+1} = B_s \setminus \text{dom}(g_{s+1})$  и  $C_{s+1} = C_s \setminus \text{range}(g_{s+1})$ . Описание конструкции завершено.

Пологаем  $g = \bigcup_{s \in \omega} g_s$ . Легко понять, что построенное отображение  $g$  действительно является  $\mathbf{d}$ -вычислимой биекцией, действующей из  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$  на  $\text{Atom}(\mathfrak{C})$ . Кроме того,  $g(\varphi(b)) = \psi(g(b))$  для любого  $b \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$ .

Отображение  $g$  можно расширить до  $\mathbf{d}$ -вычислимого изоморфизма  $A$ -алгебр  $f$  следующим образом. Если  $b \in \mathfrak{B}$ , то либо  $b \in F(\mathfrak{B})$ , либо  $C(b) \in F(\mathfrak{B})$ . Если  $b \in \{0_{\mathfrak{B}}, 1_{\mathfrak{B}}\}$ , то  $f(b)$  определяется тривиальным образом. Будем считать, что  $b \notin \{0_{\mathfrak{B}}, 1_{\mathfrak{B}}\}$ . Находим наименьшее  $s$ , для которого существуют  $b_1, \dots, b_n \in \text{dom}(g_s)$ , такие что  $(b_1, \dots, b_n \mid b)$  или  $(b_1, \dots, b_n \mid C(b))$ . Если  $(b_1, \dots, b_n \mid b)$ , то полагаем  $f(b) = g(b_1) \vee \dots \vee g(b_n)$ . В противном случае полагаем  $f(b) = C(g(b_1) \vee \dots \vee g(b_n))$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** *Любая вычислимая  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$  и  $\mathfrak{B}^*$  содержит только конечное число бесконечных атомных орбит, является  $\mathbf{0}'$ -вычислимо категоричной.*

Для  $l, n \geq 2$  и одноместного функционального символа  $\varphi$  определим формулы

$$\begin{aligned} \Psi_l^\varphi(a) &\Leftrightarrow (a \neq 0) \ \& \ (\varphi^l(a) = a) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq l} \varphi^i(a) \wedge \varphi^j(a) = 0, \\ \Phi_{l,n}^\varphi(a) &\Leftrightarrow \exists b_1 \dots \exists b_n \left( a = b_1 \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Psi_l^\varphi(b_i) \right. \\ &\quad \left. \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \bigwedge_{1 \leq s, t \leq l} \varphi^s(b_i) \wedge \varphi^t(b_j) = 0 \right). \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Пусть  $\mathbf{d}$  — в.н. тьюрингова степень. Существует вычислимая  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$  и  $\mathbf{d}$  является степенью категоричности  $\mathfrak{B}^*$ .*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое в.п. множество  $D \in \mathbf{d}$  и сильно вычислимую последовательность конечных множеств  $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \dots$ , такую что  $\bigcup_{s \in \omega} D^s = D$ . Рассмотрим  $A$ -алгебру  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , такую что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ , в  $\mathfrak{B}^*$  нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{\langle p_x, 1 \rangle \mid x \in \omega\} \cup \{\langle p_x, 2 \rangle \mid x \in D\}.$$

По теореме 1.2 у  $\mathfrak{B}^*$  есть вычислимое представление с вычислимым множеством атомов. Без ограничения общности можно считать, что сама  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^*$  является таким представлением.

Заметим:  $b \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$  тогда и только тогда, когда существует  $x \in \omega$ , такой что

$$(x \notin D \ \& \ \Psi_{p_x}^\varphi(b)) \vee (x \in D \ \& \ \Phi_{p_x, 2}^\varphi(b)).$$

Следовательно, для любого вычислимого представления  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle \cong \mathfrak{B}^*$  множество атомов  $\text{Atom}(\mathfrak{C})$  вычислимо относительно  $D$ . В силу предложения 2.1 получаем, что  $\mathfrak{B}^*$   $\mathbf{d}$ -вычислимо категорична.

Рассмотрим вычислимую безатомную нетривиальную булеву алгебру  $\mathfrak{B}^0 = \langle \omega, \vee, \wedge, \mathsf{C}, 0, 1 \rangle$ . Всюду далее запись вида  $\text{gr}(C)$  (где  $C \subseteq \omega$ ) будет служить сокращением для  $\text{gr}_{\mathfrak{B}^0}(C)$ .

Построим булеву алгебру  $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}^0$  и частичную функцию  $\psi$  на ней по шагам. На шаге  $s$  будем строить конечную подалгебру  $\mathfrak{C}_s = \langle C_s, \vee, \wedge, \mathsf{C}, 0, 1 \rangle \leq \mathfrak{B}^0$  и частичную функцию  $\psi_s$ , действующую из  $C_s$  в  $C_s$  так, чтобы  $\mathfrak{C}_s \leq \mathfrak{C}_{s+1}$  и  $\psi_s \subseteq \psi_{s+1}$ . Кроме того, будем определять конечное множество  $E_s$ , элемент  $d(s) \in \text{Atom}(\mathfrak{C}_s)$  и конечную частичную функцию  $g_s$ , действующую из  $\omega$  в  $C_s^{<\omega}$  так, чтобы для любого  $t \in \text{dom}(g_s)$  значение  $g_s(t)$  было кортежем длины  $p_t$ .

Шаг 0. Полагаем  $\mathfrak{C}_0 = \text{gr}(\{0, 1\})$ ,  $\psi_0 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$ ,  $d(0) = 1$ ,  $g_0 = E_0 = \emptyset$ .

Шаг  $s+1 = 2t+1$ . Находим в  $\mathfrak{B}^0$  некоторое разбиение  $d(s)$  на  $p_t+1$  ненулевых элементов:  $a_0, a_1, \dots, a_{p_t}$ . Полагаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{s+1} &= \text{gr}(C_s \cup \{a_0, a_1, \dots, a_{p_t}\}), \\ \psi_{s+1} &= \psi_s \cup \{\langle a_i, a_{i+1} \rangle \mid 1 \leq i < p_t\} \cup \{\langle a_{p_t}, a_1 \rangle\}, \end{aligned}$$

$$d(s+1) = a_0, \quad E_{s+1} = E_s, \quad g_{s+1} = g_s \cup \{\langle t, \langle a_1, \dots, a_{p_t} \rangle \rangle\}.$$

Шаг  $s+1 = 2t+2$ . Полагаем  $d(s+1) = d(s)$  и  $g_{s+1} = g_s$ . Ищем наименьшее  $r \in (D^s \cap \text{dom}(g_s)) \setminus E_s$ .

Если такое  $r$  нашлось, то рассмотрим  $g_s(r) = \langle a_1, \dots, a_{p_r} \rangle$ . Для каждого  $1 \leq i \leq p_r$  находим в  $\mathfrak{B}^0$  разбиение  $a_i$  на два ненулевых элемента:  $b_i, c_i$ . Определим

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{s+1} &= \text{gr}(C_s \cup \{b_i, c_i \mid 1 \leq i \leq p_r\}), \quad E_{s+1} = E_s \cup \{r\}, \\ \psi_{s+1} &= \psi_s \cup \{\langle b_i, b_{i+1} \rangle, \langle c_i, c_{i+1} \rangle \mid 1 \leq i < p_r\} \cup \{\langle b_{p_r}, b_1 \rangle, \langle c_{p_r}, c_1 \rangle\}. \end{aligned}$$

Если такого  $r$  нет, то полагаем  $\mathfrak{C}_{s+1} = \mathfrak{C}_s$ ,  $E_{s+1} = E_s$  и  $\psi_{s+1} = \psi_s$ . Описание конструкции завершено.

Полагаем  $\mathfrak{C} = \text{gr}\left(\bigcup_{s \in \omega} C_s\right)$ ,  $\psi = \bigcup_{s \in \omega} \psi_s$ . Носитель  $\mathfrak{C}$  является в.п. множеством, а  $\mathfrak{C}$  — подалгеброй вычислимой булевой алгебры  $\mathfrak{B}^0$ , поэтому без ограничения общности можно считать, что булева алгебра  $\mathfrak{C}$  вычислима. Легко понять, что построенная  $\psi$  является частично вычислимой функцией. Заметим, что  $\text{Atom}(\mathfrak{C}) \subseteq \text{dom}(\psi)$ .

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [15, док-во леммы 2.2], можно показать, что  $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ , существует единственный автоморфизм  $\xi$  алгебры  $\mathfrak{C}$ , для которого  $\xi \upharpoonright \text{Atom}(\mathfrak{C}) = \psi \upharpoonright \text{Atom}(\mathfrak{C})$ ; более того,  $\xi$  является вычислимым автоморфизмом.

Рассмотрим вычислимую  $A$ -алгебру  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \xi \rangle$ . Легко показать, что  $\chi(\mathfrak{C}^*) = \chi(\mathfrak{B}^*)$  и в  $\mathfrak{C}^*$  нет бесконечных атомных орбит. Следовательно, согласно замечанию 1.1,  $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{B}^*$ .

Определим вычислимую функцию  $h$  следующим образом: для  $x \in \omega$  в качестве  $h(x)$  выберем первый элемент кортежа  $g_{2x+1}(x)$ . Заметим, что  $h(x) \in \text{Atom}(\mathfrak{C})$  тогда и только тогда, когда  $x \notin D$ . Следовательно,  $D \leq_T \leq_T \text{Atom}(\mathfrak{C})$ .

Пусть  $\mathfrak{c}$  — тьюрингова степень и  $f: \mathfrak{C}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$  —  $\mathfrak{c}$ -вычислимый изоморфизм  $A$ -алгебр. Тогда

$$D \leq_T \text{Atom}(\mathfrak{C}) \leq_T \text{Atom}(\mathfrak{B}) \oplus f \equiv_T f,$$

откуда  $\mathbf{d} \leq \mathbf{c}$ . Значит,  $\mathfrak{B}^*$  не может быть  $\mathbf{c}$ -вычислимо категоричной ни для какой степени  $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{d}$ .

Итак,  $\mathbf{d}$  является степенью категоричности  $\mathfrak{B}^*$ .  $\square$

### § 3. Вычислимая категоричность и множество атомов

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть  $\mathbf{d}$  — в.п. тьюрингова степень. Существует вычислимо категоричная  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$  и  $\text{Atom}(\mathfrak{B}) \in \mathbf{d}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем в.п. множество  $D \in \mathbf{d}$  и сильно вычислимую последовательность конечных множеств  $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \dots$ , такую что  $\bigcup_{s \in \omega} D^s = D$ .

Рассмотрим  $A$ -алгебру  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , для которой  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ , в  $\mathfrak{B}^*$  нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{ \langle p_{x+1}, 1 \rangle \mid x \notin D \} \cup \{ \langle 2p_{x+1}, 1 \rangle \mid x \in D \}.$$

Определим функцию  $f(x, s)$  следующим образом:

$$f(x, 0) = 1, \quad f(x, s+1) = \begin{cases} p_{x+1}, & \text{если } x \notin D^s, \\ 2p_{x+1}, & \text{если } x \in D^s. \end{cases}$$

Ясно, что функции  $f$  и  $F_{\chi(\mathfrak{B}^*)}$  удовлетворяют условиям теоремы 1.1, поэтому у  $\mathfrak{B}^*$  есть вычислимое представление. Без ограничения общности можно считать, что  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^*$  вычислима.

Заметим, что для  $b \in \mathfrak{B}$  условие  $b \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$  выполняется тогда и только тогда, когда  $|b|_\varphi = 2^t p_{x+1}$  для некоторых  $x \in \omega$ ,  $t \in \{0, 1\}$  и имеет место

$$(x \notin D \ \& \ t = 0 \ \& \ \Psi_{p_{x+1}}^\varphi(b)) \vee (x \in D \ \& \ t = 1 \ \& \ \Psi_{2p_{x+1}}^\varphi(b)).$$

Следовательно,  $\text{Atom}(\mathfrak{B}) \leq_T D$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \notin \chi(\mathfrak{B}^*) &\iff y \neq 1 \vee \neg(\exists t)(\exists z)(t \leq 1 \ \& \ x = 2^t p_{z+1}) \\ &\vee (\exists t)(\exists z) \left( t \leq 1 \ \& \ x = 2^t p_{z+1} \ \& \ (\exists a \in \text{Atom}(\mathfrak{B})) \Psi_{2^{1-t} p_{z+1}}^\varphi(a) \right), \end{aligned}$$

т. е.  $\chi(\mathfrak{B}^*)$  является ко-в.п. относительно  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$ . Вследствие предложения 1.1,  $\chi(\mathfrak{B}^*) \leq_T \text{Atom}(\mathfrak{B})$ . Легко понять, что  $D \equiv_T \chi(\mathfrak{B}^*)$ , откуда  $\text{Atom}(\mathfrak{B}) \equiv_T D$ .

Покажем, что  $\mathfrak{B}^*$  вычислимо категорична. Пусть  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$  — вычислимое представление  $\mathfrak{B}^*$ . Без ограничения общности можно считать, что как для  $\mathfrak{B}$ , так и для  $\mathfrak{C}$  носителем является  $\omega$ . Построим частичное отображение  $g$ , действующее из  $\omega$  в  $\omega$ .

Шаг 0. Полагаем  $g_0 = \emptyset$ .

Шаг  $s + 1$ . Ищем наименьшее  $t \leq s$  с условием

$$(\exists b \leq s) \left( b \notin \text{dom}(g_s) \ \& \ \left( \mathfrak{B}^* \models \Psi_{p_{t+1}}^\varphi(b) \vee \Psi_{2p_{t+1}}^\varphi(b) \right) \right).$$

Если такие  $t$  и  $b$  нашлись, то выбираем наименьшее из таких  $b$ . Пусть  $\mathfrak{B}^* \models \Psi_l^\varphi(b)$  для некоторого  $l \in \{p_{t+1}, 2p_{t+1}\}$ . Ищем наименьшее  $c \in \omega \setminus \text{range}(g_s)$ , такое что  $\mathfrak{C}^* \models \Psi_l^\psi(c)$ . Полагаем

$$g_{s+1} = g_s \cup \{ \langle \varphi^k(b), \psi^k(c) \rangle \mid 1 \leq k \leq l \}.$$

Если же таких  $t$  и  $b$  нет, то полагаем  $g_{s+1} = g_s$ . Описание конструкции завершено.

Определим  $g$  как  $\bigcup_{s \in \omega} g_s$ . Ясно, что  $g$  является частично вычислимой функцией.

Заметим, что  $\text{Atom}(\mathfrak{B}) \subseteq \text{dom}(g)$ ,  $g$  — инъективное отображение, а для любого  $b \in \text{dom}(g)$  значение  $g(\varphi(b))$  определено и равно  $\psi(g(b))$ . Можно показать, что для любого  $b \in \text{dom}(g)$  выполняется в точности один из следующих случаев:

(1)  $b \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$ ,  $g(b) \in \text{Atom}(\mathfrak{C})$ ,  $|b|_\varphi = |g(b)|_\psi = p_{t+1}$  для некоторого  $t \notin D$ ;

(2)  $b \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$ ,  $g(b) \in \text{Atom}(\mathfrak{C})$ ,  $|b|_\varphi = |g(b)|_\psi = 2p_{t+1}$  для некоторого  $t \in D$ ;

(3) существует  $b_0 \in \text{Atom}(\mathfrak{B})$ , такое что  $g(b_0) \in \text{Atom}(\mathfrak{C})$ ,  $|b_0|_\varphi = |g(b_0)|_\psi = 2p_{t+1}$ ,  $b = b_0 \vee \varphi^{p_{t+1}}(b_0)$  и  $g(b) = g(b_0) \vee \psi^{p_{t+1}}(g(b_0))$  для некоторого  $t \in D$ .

Следовательно,  $g \upharpoonright \text{Atom}(\mathfrak{B})$  является биекцией  $\text{Atom}(\mathfrak{B})$  на  $\text{Atom}(\mathfrak{C})$ , и для любых  $b_0, b_1 \in \text{dom}(g)$  соотношение  $b_0 \leq_{\mathfrak{B}} b_1$  выполняется тогда и только тогда, когда  $g(b_0) \leq_{\mathfrak{C}} g(b_1)$ .

Отображение  $g$  можно расширить до вычислимого изоморфизма  $A$ -алгебр  $h: \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$  аналогично тому, как производилось расширение до  $\mathfrak{d}$ -вычислимого изоморфизма в доказательстве предложения 2.1.  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Существует вычисляемая  $A$ -алгебра  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , такая что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ ,  $\mathfrak{B}^*$  не вычислимо категорична и  $\text{Atom}(\mathfrak{C}) \in \mathbf{0}'$  для любого вычислимого представления  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle \cong \mathfrak{B}^*$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем в.п. множество  $K \in \mathbf{0}'$ . Рассмотрим  $A$ -алгебру  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ , для которой  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ , в  $\mathfrak{B}^*$  нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{ \langle p_{x+1}, 1 \rangle \mid x \notin K \} \cup \{ \langle 2p_{x+1}, 1 \rangle \mid x \in K \} \cup \{ \langle 2, y+1 \rangle \mid y \in \omega \}.$$

Используя теорему 1.1, легко показать, что у  $\mathfrak{B}^*$  есть вычисляемое представление.

Пусть  $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$  — вычисляемое представление  $\mathfrak{B}^*$ . Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 3.1, можно показать, что  $K \equiv_T \chi(\mathfrak{B}^*) = \chi(\mathfrak{C}^*) \leq_T \text{Atom}(\mathfrak{C})$ , откуда  $\text{Atom}(\mathfrak{C}) \equiv_T K$ .

Для завершения доказательства остаётся сослаться на [14, лемма 5], где утверждается: если для вычисляемой  $A$ -алгебры  $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$  (такой что  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ ), не содержащей бесконечных атомных орбит, найдётся  $n \geq 1$ , для которого  $\mathfrak{B}^*$  содержит бесконечно много атомных орбит мощности  $n$ , то  $\mathfrak{B}^*$  не является вычислимо категоричной.  $\square$

В заключение авторы выражают благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Fröhlich, J. Shepherdson, Effective procedures in field theory, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **248**, No. 950 (1956), 407–432.
2. А. И. Мальцев, Конструктивные алгебры. 1, УМН, **16**, № 3 (1961), 3–60.

3. *S. S. Goncharov, V. S. Harizanov, J. F. Knight, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon*, Enumerations in computable structure theory, *Ann. Pure Appl. Logic*, **136**, No. 3 (2005), 219–246.
4. *J. Chisholm, E. B. Fokina, S. S. Goncharov, V. S. Harizanov, J. F. Knight, S. Quinn*, Intrinsic bounds on complexity and definability at limit levels, *J. Symb. Log.*, **74**, No. 3 (2009), 1047–1060.
5. *E. B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, *Arch. Math. Logic*, **49**, No. 1 (2010), 51–67.
6. *B. F. Csima, J. N. Y. Franklin, R. A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetical hierarchy, *Notre Dame J. Formal Logic*, **54**, No. 2 (2013), 215–231.
7. *С. С. Гончаров, В. Д. Дзгоев*, Автоустойчивость моделей, *Алгебра и логика*, **19**, № 1 (1980) 45–58.
8. *J. B. Remmel*, Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras, *J. Symb. Log.*, **46**, No. 3 (1981), 572–594.
9. *C. McCoy*,  $\Delta_2^0$ -categoricity in Boolean algebras and linear orderings, *Ann. Pure Appl. Logic*, **119**, Nos. 1–3 (2003), 85–120.
10. *Ч. Ф. Д. Мак-Кой*, О  $\Delta_3^0$ -категоричности для линейных порядков и булевых алгебр, *Алгебра и логика*, **41**, № 5 (2002), 531–552.
11. *K. Harris*, Categoricity in Boolean algebras, to appear.
12. *П. Е. Алаев*, Автоустойчивые  $I$ -алгебры, *Алгебра и логика*, **43**, № 5 (2004), 511–550.
13. *Н. А. Баженов*, О  $\Delta_2^0$ -категоричности булевых алгебр, *Вестник НГУ, Сер. матем., мех., информ.,* принято к печати.
14. *Р. Р. Тухбатуллина*, Автоустойчивость булевой алгебры  $\mathfrak{B}_\omega$ , обогащенной автоморфизмом, *Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, **10**, № 3 (2010), 110–118.
15. *Н. А. Баженов, Р. Р. Тухбатуллина*, Конструктивизируемость булевой алгебры  $\mathfrak{B}(\omega)$  с выделенным автоморфизмом, *Алгебра и логика*, **51**, № 5 (2012), 579–607.
16. *С. С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

17. *С. С. Гончаров, Ю. Л. Еришов*, Конструктивные модели (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.
18. *С. J. Ash, J. F. Knight*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (Stud. Logic Found. Math., **144**), Amsterdam etc., Elsevier Sci. B.V., 2000.

Поступило 24 июля 2012 г.

Адреса авторов:

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич, Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: nickbzh@yandex.ru

ТУХБАТУЛЛИНА Регина Расимовна, CERGE–E1, a joint workplace of Charles Univ. and Economics Inst. Acad. Sci. Czech Repub., Politických vězňů, 7, 11121 Prague, CZECH REPUBLIC. e-mail: regina88@bk.ru