

КУБИКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И КОНГРУЭНЦИИ

Н. Т. Мочернюк

Первые работы по дифференциальной геометрии появились как результат применения дифференциального исчисления к геометрическим задачам — исследования, посвященные теории кривых линий и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, т. е. многообразий (в современной трактовке), образующим элементом которых является точка. Теория кривых линий и поверхностей была обобщена на аффинные и проективные пространства, в которых действуют другие фундаментальные группы.

Позже стала развиваться линейчатая дифференциальная геометрия, а затем и дифференциальная геометрия многообразий, образующими элементами которых служат линейные подпространства — прямая, m -плоскость, гиперплоскость объемлющего пространства. Этим вопросам посвящены обзоры [37] и [2].

Далее возникла задача изучения дифференциальной геометрии многообразий, образующим элементом которых является, как правило, алгебраическая кривая линия или поверхность m измерений, $1 \leq m \leq n$, в точечных пространствах n измерений. К первым работам этого типа относятся исследования Клобучека [43] и Дарбу [41] и далее работы Кавагути [42], Лейна [44], Баккеса [38], Су Бу-цина [49], Берцолари [39], Богдана [40]. Во всех этих исследованиях образующими элементами изучаемых многообразий были различные кривые второго порядка (коники).

Особое место занимает работа В. В. Рыжкова [30]. В этой работе образующим элементом двумерного многообразия (конгруэнции) впервые выступила плоская алгебраическая кривая произвольного порядка $k \geq 2$, в частности, кубика.

Начиная с 50-х годов нашего века, началось систематическое изучение многообразий коник и вообще квадратичных алгебраических элементов в работах Н. Г. Туганова и В. С. Малаховского. Эти работы освещены в обзорах [16], [17], [18]. Инвари-

антное построение дифференциальной геометрии многообразий многомерного проективного пространства, образующим элементом которых является алгебраическая поверхность размерности $n-2$ четного порядка $k=2p$ ($p=1, 2, \dots$), в n -мерном проективном пространстве методом Г. Ф. Лаптева, дано в работе [15].

Дифференциальной геометрии многообразий окружностей и сфер посвящены обзоры [1] и [2].

§ 1. Многообразия алгебраических элементов произвольного порядка

Первой работой, посвященной изучению двухпараметрического многообразия (конгруэнции) плоских алгебраических кривых произвольного (четного и нечетного) порядка $k \geq 2$, было исследование В. В. Рыжкова [30]. В трехмерном проективном пространстве рассматривалась конгруэнция (P) плоских алгебраических кривых с невырожденной огибающей поверхностью (M) плоскостей кривых, не проходящих через точку M . Построен канонический репер конгруэнции (P) и установлено, что в общем случае кривая P имеет $k(k+1)$ фокусов, которые находятся как точки пересечения данной кривой P

$$\sum_{l=2}^k t^{k-l} \sum_{i+j=l} a_{ij} x^i x^j - t^k = 0 \quad (1.1)$$

с некоторой вполне определенной кривой $(k+1)$ -го порядка S (имеющей в точке M двойную точку)

$$\sum_{l=2}^k t^{k-l+1} \sum_{i+j=l} c_{ij} x^i x^j = 0, \quad (1.2)$$

где c_{ij} выражаются через коэффициенты a_{ij} , их частные производные по главным параметрам и компоненты дериационных формул построенного канонического репера. При совпадении k фокальных направлений через две подходящим образом выбранные соседние кривые P и P' можно провести алгебраическую поверхность k -го порядка. Исследован случай распадаения фокальных направлений конгруэнции (P) на $k+1$ групп по k совпадающих направлений конгруэнции (P) , взаимное изменение и взаимная зависимость кривых P и S , рассмотрены некоторые классы конгруэнций коник.

В [21] и [24] приводятся результаты исследования Н. Т. Мочернюка по дифференциальной геометрии многообразий $(h, m, n)^k$, $k \geq 2$, где под многообразием $(h, m, n)^k$ понимается m -мерное $(m$ — параметрическое) многообразии алгебраических элементов, гиперплоскости P_{n-1} которых образуют m -мерное $(m$ — параметрическое) семейство в n -мерном проективном простран-

стве. Для многообразий $(h, h, n)^h$, задаваемых системой уравнений Пфаффа

$$\Omega_i^{n+1} = a_i^j \omega_j^{n+1}, \quad \Delta b_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i \omega_i^{n+1}, \quad (1.3)$$

где

$$\Delta b_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \nabla b_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \Phi, \quad (1.4)$$

доказано, что такие многообразия существуют и определяются с произволом

$$S_{n, k}^{(h)} = C_{n+k-1}^k + n - h - 1 \quad (1.5)$$

функций h аргументов (см. [34], с. 230), где буквой C обозначено число сочетаний. Найден основной объект [14] многообразия $(h, k, n)^h$ для многообразий, удовлетворяющих условию $h \leq n$. Построены и геометрически охарактеризованы и другие объекты. Более подробно в работах [22] и [28] изучаются многообразия $(2, 2, 3)^3$ и $(1, 1, 3)^3$, т. е. кубикальные конгруэнции и кубикальные поверхности.

С кубикальными поверхностями связаны работы Роттенберга [46—48] и работа Маркуса совместно с Роттенбергом [45]. В исследовании [46] рассматриваются соответствия между поверхностями, несущими так называемые планарные конгруэнции. Криволинейные координаты u, v точки поверхности S трехмерного проективного пространства рассматриваются как аффинные координаты точки плоскости π . Если отображение $f: \pi \rightarrow S$ биективно в некоторой области изменения u, v и прямым линиям плоскости π при этом отображении соответствуют плоские кривые линии на поверхности S , то отображение f называется планарным соответствием, а сеть линий, соответствующих прямым плоскости π , называется планарной. Рассматриваются преобразования поверхности, сохраняющие планарную конгруэнцию, и некоторые свойства этой конгруэнции. Если планарная конгруэнция высекается связкой плоскостей, то она называется тривиальной. Для этого случая указан вид планарного отображения.

В [47], [48] параметризация (u, v) поверхности S трехмерного пространства называется планарной, если все линейные уравнения $au + bv + c = 0$ относительно u, v определяют на поверхности плоские кривые, плоскости которых не принадлежат одной и той же связке. Поверхность S , допускающая планарную параметризацию, называется планарной, а указанное двухпараметрическое многообразие кривых линий называется конгруэнцией P . невырожденная линейчатая квадрика не является планарной поверхностью. Римская поверхность Штейнера является планарной, ее конгруэнция P состоит из сечений касательными плоскостями шести пучков, оси которых образуют некоторый тетраэдр, инвариантно связанный с поверхностью S . Конгруэн-

ция P на регулюсе третьего порядка состоит из сечений касательными плоскостями, включая прямолинейные образующие. Конус второго порядка несет бесконечное множество конгруэнции P . На основе рассмотренных примеров сделаны некоторые общие заключения и сформулированы нерешенные задачи, например, существуют ли трансцендентные планарные поверхности.

В работе [45] рассматривается асимптотическое соответствие между двумя поверхностями трехмерного проективного пространства S и S' , преобразующее двупараметрическое семейство плоских кривых (планарную конгруэнцию P) одной поверхности в планарную конгруэнцию, принадлежащую другой поверхности. Установлены характеристические признаки того, что поверхности S и S' , допускающие такое соответствие, являются кубическими линейчатыми и кубическими тетраэдральными поверхностями.

В статье [29] А. Ю. Пекарскене исследует первую дифференциальную окрестность секущей восьмимерной поверхности расслоенного пространства, элементы базы которого состоят из распадающейся линии третьего порядка, порожденной коникой и характеристической прямой плоскости коники.

Для многообразия $V_{m,n}$ размерности m кубических гиперповерхностей n -мерного проективного пространства

$$a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

заданного параметрически уравнениями Пфаффа

$$\nabla a_{\alpha\beta\gamma} - \nu a_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma i} \theta^i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

В. В. Махоркиным в [20] (по аналогии с многообразием гиперквадрик [19]) в n -мерном проективном пространстве определены фокальное многообразие ${}^{(p)}f(m, n)$ и характеристическое многообразие ${}^{(p)}h(m, n)$. В частности, доказано, что ${}^{(1)}f(n-1, n)$ в общем случае состоит из 3^n точек. Для того чтобы точка кубической гиперповерхности $S \in V_{m,n}$ являлась ее фокальной точкой, необходимо и достаточно, чтобы касательная гиперплоскость к гиперповерхности, описываемой точкой P , в точке P совпадала с касательной гиперплоскостью к кубической гиперповерхности в точке P . Показано, что все особые точки кубической гиперповерхности S являются точками ее фокального многообразия ${}^{(1)}f(m, n)$.

Исследование Вейса [50] посвящено специальному классу регулюсов в евклидовом трехмерном пространстве — коноидам, у которых стрикционные линии вырождаются в плоские кривые. В этой работе доказано предложение:

Неприводимый алгебраический коноид $\Phi^{(n)}$ порядка $n = p+q \geq 3$ имеет плоскую стрикционную линию тогда и только тогда, когда $\Phi^{(n)}$ проективная (p, q) — винтовая поверхность.

причем фиксированный тетраэдр винтового движения действительный и его ребра сопряжены с бесконечно удаленными направляющими прямыми относительно коноида $\Phi^{(n)}$. Для любых двух натуральных чисел p, q , для которых выполнено условие $p > q \geq 1$ и которые взаимно просты, существует ровно четыре различных типа коноидов $\Phi_\lambda^{(n)}$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) с плоскими стрикционными линиями.

Здесь поверхность $\Phi^{(n)}$ со скрещивающимися направляющими осями a, b устанавливает (p, q) — соответствие между q -кратной направляющей прямой a и p -кратной направляющей прямой b с двумя парами различных двойных точек: A_1, A_2 на прямой a и B_1, B_2 — на прямой b . В этом случае (при $p > q \geq 1$, p и q — взаимно просты) поверхность $\Phi^{(n)}$ рациональна и называется (p, q) -винтовой поверхностью.

Среди коноидов первого типа $\Phi_1^{(n)}$ простейшими является алгебраическая кубическая поверхность $\Phi_1^{(3)}$

$$\beta y^2 x - \gamma (\beta x - \alpha \beta y - z)^2 = 0$$

третьего порядка, у которой стрикционной линией является парабола второго порядка.

Второй тип коноидов $\Phi_2^{(n)}$ содержит простейший регулюс $\Phi_2^{(3)}$ — невырожденную поверхность третьего порядка, уравнение которой можно привести к виду

$$y z^2 - \beta \gamma (\beta x - \alpha \beta y - z)^2 = 0.$$

Линией стрикции этого коноида является гипербола.

Коноиды третьего типа $\Phi_3^{(n)}$ содержат простейший коноид $\Phi_3^{(3)}$, уравнение которого приводится к виду

$$\beta^3 y^2 = \gamma z (\beta x - \alpha \beta y - z)^2,$$

и стрикционной линией которого является плоская невырожденная кубика с точкой возврата — парабола Нейля.

Наконец, среди коноидов четвертого типа $\Phi_4^{(n)}$ простейшим является кубическая поверхность, уравнение которой имеет вид $\Phi_4^{(3)}$

$$\beta^3 \gamma y - z^2 (\beta x - \alpha \beta y - z) = 0.$$

Стрикционной линией этого простейшего коноида является плоская нераспадающаяся кубика — кубическая парабола.

Для коноидов $\Phi^{(n)}$ доказаны предложения:

1) Если световая точка L на торсальной образующей $t_1(p, q)$ -винтовой поверхности $\Phi^{(n)}$ не лежит на направляющих a, b , то торсальная образующая t_2 касается в точке B_2 (плоской) границы тени s и пересекает торсальную образующую t_1 в точке \bar{L} , для которой

$$DV(A_1, B_1; L, \bar{L}) = pq^{-1}.$$

При этом точка A_1 является точкой граничного соприкосновения.

2) Если световая точка L не лежит на ребре фиксированного тетраэдра, принадлежащего (p, q) -винтовой поверхности $\Phi^{(n)}$ проективного винтового движения (например, лежит на ребре A_2B_1) и не является вершиной этого тетраэдра, то несущая плоскость, содержащая проходящую через точку L (плоскую) границу тени s , пересекает это ребро в точке \bar{L} , для которой

$$DV(A_2, B_1; L, \bar{L}) = -pq^{-1}.$$

Точка \bar{L} является точкой пересечения граничных касательных в обеих особых точках A_1 и B_2 границы тени s .

В работах В. Б. Кима [5]—[13] изучается дифференциальная геометрия многообразий, образующими элементами которых являются или неособенная плоская кривая третьего порядка (кубика)

$$a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^3 = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2),$$

или кубика и точка, лежащая вне ее плоскости.

Рассмотрены комплексы (трехпараметрические многообразия) кубик, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство. Построено инвариантное оснащение рассматриваемого комплекса, а также некоторые тензоры, охватываемые основным геометрическим объектом комплекса кубик. На образующей кубике комплекса кубик определены и геометрически охарактеризованы инвариантные точки, называемые t -фокальными точками (по аналогии с t -фокальными точками коники комплекса коник [15]) кубики комплекса. Изучены свойства t -фокальных точек.

Построенное инвариантное оснащение комплекса кубик позволяет на многообразии плоскостей кубик комплекса ввести индуцированную комплексом кубик инвариантную связность. Изучаются свойства введенной связности и специальные классы комплексов кубик. Особое внимание уделено изучению классов комплексов кубик, для которых осуществлено безынтегральное представление. Найдены характеристические условия, выделяющие каждый рассматриваемый класс комплексов кубик. При изучении рассматриваемых классов комплексов кубик существенную роль играют построенные геометрические объекты, тензоры и инвариантная связность Γ , введенная на многообразии плоскостей кубик.

§ 2. Кубикальные поверхности, порожденные неособыми кубиками

Плоскую кривую третьего порядка (кубику) проективной плоскости

$$a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^4 = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

будем считать нераспадающейся на линии более низкого порядка (коники и прямые). Известно [31], что нераспадающиеся кубики проективной плоскости разбиваются на непересекающиеся множества, первое из которых состоит из проективно неэквивалентных кубик без двойных точек (неособые кубики), а три остальные множества — из проективно эквивалентных кубик одного из трех типов: кубики с двойной узловой точкой, кубики с двойной изолированной точкой и, наконец, кубики с двойной точкой возврата. Каждое из четырех множеств кубик характеризуется значениями инвариантов, являющихся функциями коэффициентов левой части уравнения кубики (2.1): R , S , T , явные выражения которых приведены в [32]. Для неособых кубик инвариант $R = S^3 - T^2$ отличен от нуля. Для всех кубик остальных трех типов $R = 0$, причем, $S > 0$, $T > 0$ для кубик с узловой точкой; $S > 0$, $T < 0$ для кубик с изолированной точкой и $S = 0$, $T = 0$ для кубик с двойной точкой возврата.

1. Под однопараметрическим (одномерным) многообразием нераспадающихся кубик будем понимать такое множество названных кубик трехмерного проективного пространства, множество которых гомеоморфно интервалу $I(t_1 < t < t_2)$, причем I может быть числовой прямой, $I(-\infty < t < +\infty)$. При этом плоскости кубик образуют однопараметрическое семейство. В каждой плоскости этого семейства лежит фиксированная кубика. При этом кубика описывает в P_3 поверхность, которую будем называть (по аналогии с линейчатой поверхностью) кубикальной поверхностью.

Все функции, появляющиеся в дальнейшем, являются аналитическими функциями, рассмотрения ведутся в окрестности алгебраического элемента — кубики (2.1).

Система уравнений Пфаффа (1.3), определяющая кубикальную поверхность, порожденную неособой кубикой, в данном случае имеет вид

$$\omega_2^4 - a\omega_1^4 = 0, \quad \omega_3^4 - b\omega_1^4 = 0, \quad \Delta a_{\alpha\beta\gamma} - c_{\alpha\beta\gamma}\omega_1^4 = 0. \quad (2.2)$$

Из последней группы уравнений (2.2) при фиксированном главном параметре и при условии $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 3$ получаем систему уравнений (здесь $a_{333} = 1$ и поэтому $\Delta a_{333} \equiv 0$):

$$\Delta a_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (2.3)$$

Из первого уравнения системы (2.2) получаем

$$da + a(\pi_1^4 - \pi_2^4 + a\pi_1^2 + b\pi_1^3) - b\pi_2^3 - \pi_2^4 = 0. \quad (2.4)$$

Поместим вершины A_1, A_2, A_3 репера в инвариантные точки алгебраического элемента: вершина A_1 помещена в точку перегиба (одну из трех действительных точек перегиба) кубики, вершина A_2 — в точку пересечения кубики и характеристики плоскости

кубики, а вершина A_3 — точка пересечения касательных к кубике в A_1 и A_2 (т. е. полюс прямой (A_1A_2) относительно кубики).

При этом будем иметь

$$a_{111} = a_{222} = 0, \quad a_{113} = a_{223} = a_{133} = 0, \quad a = 0.$$

Потребовав выполнения равенств $a_{112} = a_{122} = 2a_{123}$, мы совместим точку E_{12} $(1, 1, 0, 0)$ с точкой, являющейся четвертой гармонической к точкам A_1, A_2 и точке пересечения кубики с ребром (A_1A_2) , т. е. точке E_{-12} $(-1, 1, 0, 0)$.

Если вершину A_4 поместить в точку пересечения плоскостей T_1, T_2, T_3 , где T_1 — касательная плоскость к регулюсу (A_1A_2) в точке A_1 , T_2 — касательная плоскость к регулюсу (A_2A_3) в точке A_3 , T_3 — касательная плоскость к регулюсу, описываемому прямой

$$Q = A_1 + A_2 + \rho A_3$$

в точке $A_1 + A_2$, то после необходимой нормировки дериационные формулы канонического репера кубикальной поверхности будут иметь вид:

$$dA_1 = (p^1A_1 + p^2A_2 + A_4) ds,$$

$$dA_2 = (q^1A_1 + q^2A_2 + A_3) ds,$$

$$dA_3 = (b^2A_2 + b^3A_3 + bA_4) ds,$$

$$dA_4 = (a^aA_a + a^4A_4) ds,$$

где

$$p^1 + q^2 + b^3 + a^4 = 0, \quad p^1 + p^2 = q^1 + q^2.$$

Кроме того, касательная к линии, описываемой точкой $A_1 - A_2$, пересекает ребро (A_3A_4) в точке $A_3 - A_4$, и, таким образом, имеется возможность охарактеризовать геометрически единичную точку E $(1, 1, 1, 1)$.

Геометрическое значение инвариантного параметра s следует из равенства

$$ds = DV_0(A_2, A_3; E_{23}, P),$$

где DV_0 означает главную часть сложного отношения

$$DV(A_2, A_3, E_{23}, P)_{\lambda} = \frac{ds}{1 - q^2},$$

а точка $P = A_2 ds + (1 + q^2 ds) A_3$ есть точка пересечения плоскости Π , проходящей через ребро (A_1, A_4) и бесконечно близкую точку к A_2 при смещении по линии, описываемой точкой A_2 с прямой (A_2A_3) .

После введения обозначений $a_{112} = p, a_{233} = q$, образующая кубика записывается уравнениями

$$(x^3)^3 + 3p((x^1)^2x^2 + x^1x^2x^3 + x^1(x^2)^2) + 3qx^2(x^3)^2 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Найдены геометрические значения всех инвариантов кубикальной поверхности $p^1, p^2, q^1, q^2, b, b^2, b^3, a^\infty, p, q$. Так, например,

$$q = \frac{1}{2} DV(A_2, A_3; N, E_{-23}), \quad p = DV(A_2, A_3; M, E_{-23}),$$

$$b = DV(A_3, A_1; R, E_{-13}), \quad b^3 = b DV(A_3, A_4; E_{34}, Q) - \\ - DV(A_2, A_3; P, E_{23}),$$

где N — точка пересечения первой поляры точки A_3 относительно образующей кубики с ребром (A_2A_3) , M — точка пересечения первой поляры точки A_3 относительно конической поляры той же точки A_3 относительно данной кубики с ребром (A_1A_3) , R — точка пересечения характеристики плоскости кубики с ребром (A_1A_3) , Q — точка пересечения плоскости Π , проходящей через ребро (A_1A_2) и близкую к A_3 точку с ребром (A_3A_4) .

Из рассмотрения здесь исключены следующие случаи: 1) кубикальные поверхности, образованные кубиками с двойными (особыми) точками; 2) характеристика плоскости кубики касается кубики, т. е. регулюс (A_2A_3) является торсом; 3) регулюс касательных в точке перегиба является торсом; 4) касательная в точке $E_{12} = A_1 + A_2$ к линии, описываемой этой точкой, проходит через точку $E_{34} = A_3 + A_4$; 5) кубикальные поверхности, образованные кубиками, имеющими такие точки, касательные в которых к кубике проходят через точку пересечения касательной к кубике в точке перегиба и касательной в точке пересечения характеристики плоскости кубики с кубикой.

Класс кубикальных поверхностей, определенный натуральным уравнением $q=0$, характеризуется каждым из следующих свойств:

а) характеристика плоскости кубики пересекает кубику в точке перегиба, отличной от точки перегиба A_1 ; б) вторые поляры вершин репера A_1, A_2, A_3 относительно кубики образуют автополярный трехсторонник второго рода первой (конической) поляры точки A_3 ;

в) первая поляра точки пересечения характеристики плоскости кубики с кубикой распадается на ребро (A_2A_3) репера ($x^1=0$) и прямую

$$x^1 + 2x^2 + x^3 = 0, \quad x^4 = 0,$$

являющуюся гармонической полярой [31] точки A_2 .

Натуральное уравнение $a^2=0$ выделяет те кубикальные поверхности, для которых все вершины репера являются квазифлекнодальными точками [3, 4], т. е. пара ассоциированных с ними регулюсов (A_1A_2) и (A_3A_4) обладает парами квазифлекнодальных точек A_1, A_2 и A_4, A_3 .

Равенства $q=0, a^2=0$ означают, что две из трех действительных точек перегиба кубики, образующей кубикальную поверхность, являются точками A_1, A_2 в паре указанных выше ас-

соцированных регулюсов, а вершины A_4, A_3 служат второй парой квазифлекнодальных точек регулюса (A_4A_3).

Натуральные уравнения $a^1=b^2, a^2=0$ выделяют класс кубикальных поверхностей, для которых пара ассоциированных с ними регулюсов (A_1A_2) и (A_3A_4) расслояема [33, 35, 36]. Дери- вационные формулы канонического репера вместе с условиями расслояемости пары регулюсов

$$\begin{aligned} \omega_3^1\omega_2^3 + \omega_4^1\omega_2^4 &= 0, & \omega_1^2\omega_4^1 + \omega_2^3\omega_4^2 &= 0, & \omega_3^2\omega_1^3 + \omega_4^2\omega_1^4 &= 0, \\ \omega_1^4\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_3^2 &= 0, & \omega_1^3\omega_3^1 - \omega_2^4\omega_4^2 &= 0, & \omega_3^2\omega_3^2 - \omega_1^4\omega_4^1 &= 0 \end{aligned}$$

дают возможность легко убедиться в этом.

Класс кубикальных поверхностей, выделяемый равенствами $p^2=0, p^1+q^2+2b^3=-b, a^3=0$, замечателен тем, что регулюс (A_1A_2) образуется «движением» образующей A_1A_2 регулюса по прямолинейным направляющим $Q=A_1+\rho A_4$ и $Q=A_1-A_2+\rho(A_3-A_4)$. Подробное изложение п. 1 содержится в работах [28] и [25].

2. Рассмотрим кубикальные поверхности, которые образованы неособыми кубиками, среди которых содержатся исключенные ранее кубикальные поверхности такие, что касательная к кубике в ее действительной точке перегиба есть характеристика плоскости кубики.

Фиксация элементов канонического репера в плоскости кубики сделана так же, как и в пункте 1, а вершина A_4 репера помещена в точку пересечения касательных плоскостей к регулюсам, порожденным, соответственно, прямой $Q=A_1+\rho A_3$ в точке A , прямой $Q=A_1+A_2+\rho A_2$ в точке A_1+A_3 и, наконец, прямой $Q=A_1-A_3+\rho A_2$ в точке A_1-A_3 . Дери- вационные формулы канонического репера имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dA_1 &= (a^1 A_1 + A_3 + A_4) ds, & dA_2 &= b^\alpha A_\alpha ds, \\ dA_3 &= (A_1 + p^2 A_2 + a^1 A_3 + q^1 A_4) ds, & dA_4 &= (m^\alpha A_\alpha + m A_4) ds, \end{aligned}$$

где

$$m + 2a^1 + b^2 = 0.$$

Класс кубикальных поверхностей, заданный натуральным уравнением $q^4=0$, характеризуется тем, что характеристика плоскости кубики касается кубики, т. е. кубикальная поверхность этого класса касается торса, огибаемого плоскостями кубики.

Натуральные уравнения $q=0, q^4=0$ характеризуют тот класс кубикальных поверхностей, для которого торс, огибаемый плоскостями кубики, образован касательными к кубике в действительной точке перегиба.

Кубикальные поверхности, определяемые уравнением $b^3=0$, обладают тем свойством, что регулюс, образованный прямыми, соединяющими действительную точку перегиба кубики с точкой

пересечения кубики с характеристикой ее плоскости, вырождается в торс.

Класс кубикальных поверхностей, для которого $q=0$, $b^3=0$, характеризуется вырождением регулуса, порожденного прямыми, на которых лежат все три действительные точки перегиба кубики, в торс, огибаемый плоскостью кубики.

Кубикальные поверхности, определенные натуральными уравнениями $p^2=1$, $b^1=m^2=m^3=q^4=q=0$, обладают следующими свойствами: вершины репера A_1, A_2, A_3 образуют автополярный трехсторонник второго рода первой (конической) полярной точки A_3 относительно кубики: прямые (A_2A_3) образуют торс, огибаемый плоскостями кубики; поверхность, образованная первыми полярными (кониками) точки относительно кубики, принадлежит классу вырожденных одномерных многообразий коник ([27], стр. 67), для которого касательная в единичной точке ребра E_{13} к линии, описываемой этой точкой, проходит через единичную точку ребра A_2A_4 .

3. Здесь рассматриваются кубикальные поверхности, исключенные в п. 1 этого параграфа условиями $a_{123} \neq 0$, $\omega_1^4 \neq 0$. Для этого форму Пфаффа ω_3^4 выберем в качестве базисной. Дифференциальные формулы канонического репера имеют следующий вид:

$$dA_1 = (m^1 A_1 + m^2 A_2 + A_3 + m^4 A_4) ds, \quad dA_3 = (A_1 + m^1 A_3 + A_4) ds, \\ dA_2 = n^a A_a ds, \quad dA_4 = (p^a A_a - (n^2 + 2m^1) A_4) ds.$$

Уравнения образующей кубики имеют вид

$$(x^3)^3 + 3px^1 x^2 (x^1 + x^2 + 2rx^3) + 3qx^2 (x^3)^2 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Строение канонического репера в этом пункте такое же, как и во втором пункте.

Кубикальные поверхности, определенные натуральным уравнением $m^4=0$, обладают тем свойством, что регулус (A_1A_2) вырождается в торс, огибаемый плоскостью кубики. При этом образующие этого торса пересекают образующую кубики в точке перегиба, отличной от A_1 , и еще в двух точках, одна из которых является единичной точкой ребра A_1A_2 .

Кубикальная поверхность, заданная натуральными уравнениями $m^4=0$, $q=0$, обладает тем свойством, что торс, огибаемый плоскостью кубики, образован прямыми, проходящими через все три действительные точки перегиба.

Класс кубикальных поверхностей, удовлетворяющий натуральным уравнениям $r=0$, $q=0$, характеризуется тем, что касательные в трех действительных точках перегиба кубики пересекаются в одной точке A_3 (кубика, порождающая данную кубикальную поверхность, называется эквиангармонической [31] второго типа).

Кубикальные поверхности, для которых $m^4=0$, $r=0$, $q=0$, обладают свойствами обоих предыдущих классов.

§ 3. Кубикальные поверхности, порожденные кубикой с узловой точкой

Для кубики с узловой (особой, двойной) точкой имеем $R = S^3 - T^2 = 0$, и, кроме того, $S > 0$, $T > 0$.

1. Положим в равенствах (2.3) $a_{113} = a_{223} = a_{112} = a_{122} = a_{133} = a_{233} = 0$ и $a_{111} = 2a_{123} = 1$. Кубика, порождающая кубикальную поверхность, имеет уравнения

$$(x^1)^3 + 3x^1x^2x^3 + (x^2)^3 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Канонический репер поверхности, образованной этими кубиками, имеет следующие дериационные формулы

$$dA_1 = (a^1A_1 + A_3 + A_4) ds, \quad dA_2 = (b^1A_1 + b^2A_2 + b^3A_3 + b^4A_4) ds,$$

$$dA_3 = (A_1 + c^2A_2 + a^1A_3 + c^4A_4) ds, \quad dA_4 = (m^aA_a - (b^2 + 2a^1)A_4) ds.$$

Вершина A_2 репера помещена в узловую точку кубики, а ребра A_2A_1 и A_2A_3 — касательные к кубике в узловой точке. Точки $P_1(1, 0, -1)$, $P_2(1 + \sqrt{3}i, 0, 2)$, $P_3(1 - \sqrt{3}i, 0, 2)$ являются точками перегиба кубики. Ребро A_1A_3 совпадает с прямой P_1P_3 , и, таким образом, определены вершины A_1 , A_2 репера и единичная точка $E_{-13} = P_1 = A_1 - A_3$.

Первая (коническая) поляра точки перегиба P_1 относительно кубики

$$(x^1)^2 - (x^3)^2 + x^2x^3 - x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0$$

распадается на касательную прямую $x^1 - x^2 + x^3 = 0$ к кубике в точке P_1 и гармоническую полярю точки P_1 $x^1 - x^3 = 0$, $x^4 = 0$. Эти прямые пересекаются в точке $T(1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$, которая позволяет определить единичную точку $E_4(1, 1, 1, 0)$ плоскости кубики. Вершина A_4 репера расположена в точке пересечения касательных плоскостей к регулюсам, образованным прямыми $Q = A_1 + \rho A_3$, $Q = A_2 + \rho(A_1 + A_3)$, $Q = A_2 + \rho(A_1 - A_3)$ в точках, соответственно, A_1 , E_{13} , E_{-13} .

Класс кубикальных поверхностей, определяемый натуральным уравнением $b^4 = 0$ ($c^4 = 0$), характеризуется тем, что образующие торса, огибаемого плоскостями кубики, проходят через узловую точку кубики (проходит через точку пересечения касательной (A_2A_3) к кубике в точке A_2 и прямой, соединяющей три точки перегиба кубики).

При $b^4 = 0$, $c^4 = 0$ регулюс (A_2A_3) вырождается в торс, огибаемый плоскостями кубик.

Если $b^4 = 0$, $c^4 = 0$, $b^1 = 0$, $b^3 = 0$, $c^2 = 0$, $m^a = 0$, то точки ребра (A_1A_4) неподвижны, плоскости $(A_1A_3A_4)$ и (A_2, A_4, E_{-12}) неподвижны. Регулюс (A_2A_3) является конусом с вершиной в узловой точке, плоскость образующей кубики является касательной для этого конуса.

2. При выборе в качестве базисной формы ω_1^4 мы исключили из рассмотрения возможность прохождения характеристики плоскости кубики через вершину A_1 репера и через действительную точку перегиба кубики.

Выберем в качестве базисной форму ω_2^4 и построим канонический репер, вершины A_α которого выбраны так же, как и в предыдущем пункте, а вершина A_4 есть точка пересечения касательной к линии, описываемой точкой-узлом в этой точке и касательной плоскости в точке A_2-A_3 к регулюсу, образованному прямыми $Q=A_2-A_3+\rho A_1$. Деривационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned} dA_1 &= (p^\alpha A_\alpha + p^4 A_4) ds, & dA_3 &= ((1-r_0) A_1 + \\ &+ (q^2 - q^3) A_2 + q^3 A_3 + r_0 A_4) ds, & dA_2 &= (q^2 A_2 + A_4) ds, \\ dA_4 &= (s^\alpha A_\alpha + (p^1 + q^2 + q^3) A_4) ds. \end{aligned}$$

Класс кубикальных поверхностей, для которых $p^4=0$, $r_0=0$, определяется вырождением регулюса, проходящего через точки перегиба кубики в торс, огибаемый плоскостями кубики.

Натуральные уравнения $p^4=0$, $r_0=0$, $p^2=0$, $q^2=q^3$ выделяют кубикальные поверхности, для которых регулюс, порожденный прямыми, проходящими через три точки перегиба P_1, P_2, P_3 , вырождается в торс, огибаемый плоскостями кубики.

Для многообразия кубик, заданного равенствами $s^1=0$, $p^1 + q^2=0$, $s^2 - q^2=0$, $q^3 - q^2=0$, $s^3=0$, имеем выражение регулюса, образованного касательными $A_2 A_3$, в квадрату.

§ 4. Кубикальные поверхности, образованные кубикой с изолированной точкой

Кубика с изолированной точкой удовлетворяет условиям

$$R = S^3 - T^2 = 0, \quad S > 0, \quad T < 0.$$

1. Положим в равенствах (2.3) $a_{111} = a_{222} = a_{113} = a_{223} = a_{133} = a_{233} = 0$, $a_{112} = a_{122}$, $2a_{123} = -3a_{112}$, тогда уравнения кубики записываются следующим образом

$$(x^3)^3 - 2a_{123} x^1 x^2 (x^1 + x^2 - 3x^3) = 0, \quad x^4 = 0.$$

В этом случае

$$S = \frac{4}{9} a_{123}^3 (9a_{123} + 4), \quad T = \frac{8}{27} a_{123}^4 (27a_{123}^2 + 18a_{123} + 2),$$

и условие $R=0$ приводит к равенству $8a_{123}^3 (2a_{123} + 1) = 0$. Так как при $a_{123}=0$ кубика вырождается в строенную прямую, то здесь надо положить $2a_{123} + 1 = 0$, и уравнения кубики имеют следующий вид:

$$(x^3)^3 + x^1 x^2 (x^1 + x^2 - 3x^3) = 0, \quad x^4 = 0.$$

Деривационные формулы канонического репера имеют следующий вид:

$$dA_1 = (aA_1 + A_3 + A_4) ds, \quad dA_2 = (a^\alpha A_\alpha + bA_4) ds, \\ dA_3 = (A_1 + b^2 A_2 + aA_3 + cA_4) ds, \quad dA_4 = (m^\alpha A_\alpha - (2a + a^2) A_4) ds^*$$

Вершины A_1, A_2 репера помещены в действительные точки перегиба, а вершина A_3 — в полюс прямой $(A_1 A_2)$ относительно кубики. Вершина A_4 — точка пересечения касательных плоскостей к регулюсам, описываемым $Q = A_3 + \rho A_1, Q = A_2 + \rho(A_1 + A_3), Q = A_2 + \rho(A_1 - A_3)$ в точках, соответственно, A_1, E_{13}, E_{-13} .

Кубикальная поверхность, заданная натуральным уравнением: $b=0$ ($c=0$), обладает тем свойством, что образующая торса, огибаемого плоскостями кубик, проходит через точку перегиба A_2 (через полюс A_3 прямой, на которой лежат все три действительных точки перегиба кубики).

Класс кубикальных поверхностей, для которых выполнены одновременно равенства $b=0, c=0$, обладает обоими свойствами, указанными в предыдущем классе.

Натуральные уравнения $2b=1, 2c=-1$ ($b=2, c=-3$) выделяют кубикальные поверхности, для которых характеристика плоскости кубики совпадает с гармонической полярой $2x^1 + x^2 - 3x^3 = 0$ точки перегиба A_1 кубики (с гармонической полярой $x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0$ точки перегиба A_2 кубики).

Натуральные уравнения $a^1=0, a^3=0, m^1=0, m^3=0, b^2 + m^2=0, 3a + a^2 - c=0$ определяют кубикальные поверхности, для которых регулюс, порожденный прямой, на которой лежат все три действительных точки перегиба кубики $A_1, A_2, A_1 - A_2$, образован «движением» образующей прямой по прямым $Q = A_2 + \rho A_4, Q = A_1 + \rho(A_3 + A_4)$.

2. При построении этого канонического репера исключаются из рассмотрения возможности обращения в нуль форм Пфаффа ω_1^4, ω_1^3 и ω_3^1 , кроме того, в рассмотренном выше случае $c \neq \pm 1$.

Выберем в качестве базисной формы ω_3^4 . Вершины A_α репера расположим так же, как и в предыдущем случае, вершина A_4 — точка пересечения касательной в точке A_3 к линии, описываемой этой точкой, с касательной плоскостью к регулюсу прямых, соединяющих точку перегиба A_1 кубики с изолированной точкой кубики, в точке $A_2 + A_3$.

Деривационные формулы этого канонического репера имеют вид

$$dA_1 = (m^\alpha A_\alpha + m_1 A_4) ds, \quad dA_3 = ((m_2 + 1) A_1 + n^2 A_2 + \\ + n^3 A_3 + m_2 A_4) ds, \quad dA_2 = ((n^2 - p^3) A_3 + A_4) ds, \\ dA_4 = (q^\alpha A_\alpha + (n^3 - m^1 - 2n^2) A_4) ds.$$

Кубикальные поверхности, задаваемые натуральными уравнениями $m_1=0$, $m_2=0$, обладают тем свойством, что торс, огибаемый плоскостями кубики, образован прямой, содержащий все три действительные точки перегиба кубики.

Для класса кубикальных поверхностей, определенного натуральными уравнениями $m_1=0$, $m_2=0$, $m^3=0$, $n^3=0$, торс, огибаемый плоскостями кубики, вырождается в неподвижную прямую, проходящую через все три действительные точки перегиба кубики. (Эта кубикальная поверхность получается «вращением» кубики вокруг прямой, на которой лежат ее действительные точки перегиба).

Кубикальные поверхности, для которых $q^1=0$, $q^2=0$, $n^2=0$, $m^3=0$, $m_1=0$, $m_2=0$, обладают тем свойством, что регулюсы, образованные касательными в точках перегиба A_1 , A_2 , вырождаются в регулюсы с «направляющими» прямыми (A_1A_2) и (A_3A_4) .

§ 5. Кубикальные поверхности, порожденные кубиками с точкой возврата

Для кубики с двойной точкой — точкой возврата — инварианты R , S , T обращаются в нуль. Следовательно, при выборе репера нужно учитывать эти условия и, кроме того, коэффициенты $a_{\alpha\beta\gamma}$ должны быть такими, чтобы уравнение кубики определяло нераспадающуюся кривую.

1. Положим в равенствах (2.3) $a_{111}=a_{222}=a_{113}=a_{223}=a_{112}=a_{123}=0$, $3a_{122}=-1$, $a_{133}=a_{233}=0$. Тогда уравнения кубики имеют вид

$$(x^3)^3 - x^1(x^2)^2 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Точка A_1 репера помещена в точку возврата кубики, точка A_2 — в действительную точку перегиба кривой, а точка A_3 — в точку пересечения касательных к кубике в точке возврата и в ее действительной точке перегиба. Определим положение единичной точки в плоскости кубики. Уравнения для определения квазифлекнодальных [3], [4] точек пары линейчатых поверхностей (A_2A_3) и (A_1A_4) находятся из условий

$$(A_2, A_3, A_1 + \varphi A_4, d(A_2 + \rho A_3)) = 0,$$

$$(A_1, A_4, A_2 + \rho A_3, d(A_1 + \varphi A_4)) = 0,$$

которые дают уравнения второй степени относительно ρ и φ :

$$\begin{cases} a_3\rho^2 + (a_2 - a_3)\rho - a_2 = 0, \\ (a_2^1 + a_3^1)\varphi^2 - (a_2 + a_3)\varphi = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где величины a_α , a_α^β взяты из дериационных формул канонического репера

$$\begin{aligned} dA_1 &= (a_1^1 A_1 + A_4) ds, & dA_3 &= (a_3^1 A_1 + (1 - a_3) A_2 + \\ &+ (a_1^1 - a_3^1) A_3 + a_3 A_4) ds, & dA_2 &= (a_2^\alpha A_\alpha + a_2 A_4) ds, \\ dA_4 &= (a_4^1 A_1 + a_4^2 (A_2 + A_3) + (a_3^1 - a_2^2 - 2a_1^1) A_4) ds. \end{aligned}$$

Первое уравнение из (5.1) имеет корень $\rho_1 = 1$, следовательно, точка $A_2 + A_3$ является квазифлекнодальной точкой прямой $(A_2 A_3)$. Прямая, соединяющая квазифлекнодальную точку $A_2 + A_3$ с точкой возврата кубики, пересекает кубику в единичной точке $E_4 = A_1 + A_2 + A_3$.

Вершина A_4 репера есть точка пересечения касательной плоскости в точке E_{-13} к регулюсу, порожденному прямыми $Q = A_2 + \rho(A_1 - A_3)$, с касательной в точке возврата кубики к линии, описываемой этой точкой. Касательная к линии, описываемой точкой E_{-13} , в этой точке пересекает ребро $A_2 A_4$ в его единичной точке.

Кубикальные поверхности, определенные натуральным уравнением $a_2 = a_3$, характеризуются тем, что квазифлекнодальные точки образующей регулюса $(A_1 A_2)$ — касательных к кубике в действительной точке перегиба — гармонически разделяют точку перегиба кубики A_2 и точку A_3 пересечения касательных к кубике в точке возврата кубики A_1 и в точке перегиба A_2 кубики.

Натуральные уравнения $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ выделяют класс кубикальных поверхностей, для которых регулюс касательных к кубике в точке перегиба A_2 кубики вырождается в торс, огибаемый плоскостью кубики.

Если к уравнениям $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ присоединить уравнения $a_2^1 = 0$, $a_2^3 = 0$, то полученный класс кубикальных поверхностей обладает следующим свойством: регулюс $(A_2 A_3)$, порожденный касательными к кубике в точке перегиба, вырождается в конус с вершиной в действительной точке перегиба кубики, огибаемый плоскостями кубики.

2. Выбрав в п. 1 в качестве базисной формы ω_1^4 , мы исключили из рассмотрения кубикальные поверхности, для которых образующая торса, огибаемого плоскостью кубики, может проходить через точку возврата кубики. Рассмотрим кубикальные поверхности, допускающие эту возможность, выбирая в качестве базисной формы ω_2^4 .

Обычным образом построен канонический репер кубикальной поверхности с дериационными формулами

$$\begin{aligned} dA_1 &= (a_1^\alpha A_\alpha + b_1 A_4) ds, \\ dA_3 &= ((1 - b_2) A_1 + b_3^2 A_2 + (a_2^2 - b_3^2) A_3 + b_2 A_4) ds, \end{aligned}$$

$$dA_2 = (a_2^2 A_2 + A_4) ds,$$

$$dA_4 = (c^1(A_1 - A_3) + c^2 A_2 + (b_3^2 - a_1^2 - 2a_2^2) A_4) ds.$$

Вершины A_a и единичная точка плоскости кубики выбраны так же, как и в предыдущем случае.

В качестве вершины A_4 репера взята точка пересечения касательной к линии, описываемой действительной точкой перегиба кубики, в этой точке с касательной плоскостью регулюса, образованного прямыми $Q = A_1 + \rho(A_2 - A_3)$ в точке E_{-23} . Единичная точка E_{-14} есть точка пересечения касательной к линии, описываемой точкой E_{-13} , в этой точке с ребром репера $A_1 A_4$.

Кубикальные поверхности, определенные натуральным уравнением $b_1 = b_2$, характеризуются каждым из следующих двух свойств:

1) квазифлекнодалные точки образующей регулюса, касательных к кубике в ее точке возврата гармонически, разделяют точку возврата кубики и точку пересечения указанной касательной с касательной в действительной точке перегиба кубики;

2) образующая торса, огибаемого плоскостями кубики, пересекает касательную к кубике в ее точке возврата в такой точке P , что

$$DV(P, E_{13}; A_1, A_3) = -1.$$

Класс кубикальных поверхностей, для которого $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, обладает следующим свойством: регулюс касательных к кубике в точке возврата вырождается в торс, огибаемый плоскостью кубики.

3. В обоих предыдущих пунктах исключены из рассмотрения кубикальные поверхности, для которых ассоциированный регулюс прямых, соединяющих точку возврата кубики и действительную точку перегиба ее, может вырождаться в торс, огибаемый плоскостью кубики. Рассмотрим такие кубикальные поверхности, которые допускают эту возможность. Для этого в качестве базисной выберем форму ω_3^4 , тогда обычным путем построим канонический репер, вершины A_a которого выбраны так же, как и в предыдущем пункте. Точка E_{12} есть одна из квазифлекнодалных точек образующей $A_1 A_2$ регулюса, а точка $E_4(1, 1, 1, 0)$ — точка пересечения прямой, соединяющей эту квазифлекнодалную точку с вершиной репера A_3 , и кубики.

Вершина A_4 репера — точка пересечения касательной к линии, описываемой точкой E_{-13} , в этой точке и касательной плоскости к регулюсу, порожденному прямыми $Q = A_1 - A_3 + \rho A_2$ в точке $E_{-13} = A_1 - A_3$. Точка E_{24} есть общая точка ребра $A_2 A_4$ с касательной к линии, описываемой точкой E_{-13} , в этой точке.

Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$dA_1 = ((c_3^3 - c_1^3) A_1 + (c_1 - 1) A_2 + c_1^3 A_3 + c_1 A_4) ds,$$

$$dA_2 = (c_2^{\infty} A_{\alpha} + c_2 A_4) ds,$$

$$dA_3 = (c_3^3 A_3 + A_4) ds,$$

$$dA_4 = (c_4^1 (A_1 + A_2) + c_4^3 A_3 + (c_1^3 - c_2^2 - 2c_3^3) A_4) ds.$$

Кубикальные поверхности, у которых $c_1 = c_2$, характеризуются каждым из следующих двух свойств:

1) квазифлекнодалные точки образующей регулюса (гармонической поляры действительной точки перегиба кубики) гармонически разделяют точку перегиба кубики и точку пересечения касательных в точке перегиба кубики и в точке возврата ее;

2) образующая торса, огибаемого плоскостью кубики, пересекает гармоническую поляру точки перегиба ее в такой точке Q , что

$$DV(Q, E_{12}; A_1, A_2) = -1.$$

Кубикальные поверхности, определенные натуральными уравнениями $c_1 = 0, c_2 = 0$, обладают следующим свойством: регулюс, порожденный гармонической полярой точки перегиба кубики A_2 , вырождается в торс, огибаемый плоскостью кубики.

Класс кубикальных поверхностей, для которого $c_1 = 0, c_2 = 0, c_2^1 = 0, c_2^3 = 0$, есть подкласс предыдущего, в котором названный выше торс вырождается в конус с вершиной в точке перегиба кубики.

Натуральные уравнения $c_1 = 0, c_2 = 0, c_1^3 = 0, c_2^3 = 0$ определяют кубикальные поверхности, для которых торс, огибаемый плоскостями кубики, вырождается в неподвижную прямую — гармоническую поляру точки перегиба кубики.

Кубикальные поверхности, для которых $c_1 = 0, c_2 = 0, c_1^3 = 0, c_2^1 = 0, c_2^3 = 0$, выделяются из предыдущего класса тем, что неподвижной является не только гармоническая поляра точки перегиба кубики, но и сама точка перегиба кубики стационарна.

§ 6. Кубикальные конгруэнции

Здесь рассматривается двупараметрическое многообразие плоских неособых кривых третьего порядка (кубикальная конгруэнция) в трехмерном проективном пространстве [22], плоскости которых образуют двупараметрическое семейство. Исключены из рассмотрения те случаи, когда для многообразия $(h, h, n)^k$ (см. [24]) при $h=2, k=3$ выполнены следующие условия для коэффициентов уравнений кубики

$$A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} = 0, x^4 = 0, (\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3). \quad (6.1)$$

1. $A_{\alpha\alpha\beta} = 0$ ($\alpha \neq \beta$), $A_{\alpha\alpha\alpha} = 1, A_{123} = -1$. В этом случае кубики

распадаются на прямую и конику, соответственно:

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - x^1 x^2 - x^2 x^3 - x^1 x^3 = 0, x^4 = 0.$$

$$2. A_{\alpha\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta), A_{111} = A_{222} = 0, A_{333} = 1, A_{123} \neq 0.$$

Нераспадающиеся кубики — особая (имеет одну двойную точку).

$$3. A_{\alpha\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta), A_{111} = A_{222} = 0, A_{333} = 1, A_{123} \neq 0.$$

Кубика распадается на прямую и конику

$$x^3 = 0, (x^3)^2 + 6A_{123}x^1x^2 = 0, x^4 = 0.$$

4. $A_{\alpha\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta), A_{\alpha\alpha\alpha} = 0, A_{123} \neq 0$. Кубика распадается на три различные прямые $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = 0, x^4 = 0$.

5. Если в пунктах 2 и 3 дополнительно выполнено условие $A_{123} = 0$, то кубика либо распадается на прямую и конику

$$x^1 + x^3 = 0, (x^2)^2 - x^2x^3 + (x^3)^2 = 0, x^4 = 0,$$

либо вырождается в строенную прямую

$$(x^3)^3 = 0, x^4 = 0.$$

Кроме того, здесь исключается возможность такого выбора подвижного репера, в котором ребро A_1A_2 проходит через характеристическую точку плоскости кубики.

Проведена частичная специализация репера многообразия $(2,2,3)^3$ таким образом, что вершины A_α репера расположены в инвариантных точках (вершинах сизигетического трехсторонника [32], ассоциированного с кубикой) образующего элемента (6.1) при условии, что вершина A_4 репера — произвольная точка вне плоскости кубики, и уравнения образующей кубики имеют простейший (канонический) вид

$$(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3 + 6A_{123}x^1x^2x^3 = 0, x^4 = 0. \quad (6.2)$$

Уравнения гессианы [32] образующей кубики кубикальной конгруэнции имеют вид

$$A_{123}((x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3 - (1 + A_{123}^3)x^1x^2x^3) = 0, x^4 = 0. \quad (6.3)$$

Найдены необходимые и достаточные условия того, что:

1) характеристическая точка плоскости образующей кубики совпадает с вершиной A_3 действительного сизигетического трехсторонника;

2) прямая, проходящая через три действительные точки перегиба кубики, проходит и через характеристическую точку плоскости кубики конгруэнции;

3) характеристическая точка плоскости кубики есть четвертая гармоническая к трем действительным точкам перегиба кубики.

Абсолютный инвариант A_{123} указывает, к какому типу ([32],

стр. 17) принадлежит данная кубика. Дано геометрическое объяснение обращения в нуль инвариантов, групп инвариантов или их комбинаций, являющихся компонентами геометрического объекта $A_{\alpha\beta\gamma}$. Построен канонический репер кубикальной конгруэнции. Найдены инвариантные кривые на поверхностях, описываемых вершинами A_1, A_2 канонического репера, являющимися вершинами сизигетического трехсторонника (A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1) , с помощью которых объяснен выбор канонического репера кубикальной конгруэнции.

Рассмотрены также некоторые классы кубикальных конгруэнций, характеризующиеся обращением в нуль компонент геометрического объекта $A_{\alpha\beta\gamma}$ (или их комбинаций), которые связаны с инвариантными квадрами $Q_{\lambda\nu, i}^{\rho}$. Здесь названная квадрака проходит через ребро $(A_\lambda A_\rho)$ репера и касается ребра $(A_\lambda A_\nu)$ репера при смещении $\omega_i^{\lambda} = 0$ на поверхностях, описываемых вершинами репера (здесь $i=1, 2; \lambda, \nu, \zeta, \rho=1, 2, 3, 4$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Конформно-дифференциальная геометрия. В сб. Геометрия, 1963 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М., 1965, 108—137 (РЖМат, 1966, 11А353)
2. Гейдельман Р. М., Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. В сб. «Алгебра, Топология, Геометрия, 1965 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1967, 323—374 (РЖМат, 1967, 10А511)
3. Ивлев Е. Т., Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Докл. научн. конф. по теоретич. и прикладн. вопросам матем. Томск, 1960, 50—61
4. —, О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. Тр. Томск. ун-та, 1962, 161, 3—10 (РЖМат, 1963, 6А376)
5. Ким В. Б., О трехпараметрическом многообразии, элемент которого состоит из кубики и точки. Материалы второй научн. конф. по матем. и механ. Томск, 1972, 1, 65
6. —, О некоторых классах многообразий $K(0,2,2)^3$ в P_3 . Материалы четвертой научн. конф. по матем. и механ. Томск, 1974, 67
7. —, Трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из кубики и точки. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974, вып. 4, 29—43 (РЖМат, 1974, 8А525)
8. —, О многообразии $K(0,3,2)^3$ в P_3 . Научн. тр. Новосиб. гос. пед. ин-т, 1974, вып. 94, 64—65 (РЖМат, 1975, 1А764)
9. —, О многообразии кубик в проективном пространстве. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1976, вып. 7, 40—45 (РЖМат, 1977, 3А642)
10. —, Дифференциальная геометрия многообразий кубик проективного пространства. Кемеров. ун-т. Кемерово, 1979, 15 с. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 2 янв. 1980 г., № 21—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 4А701 ДЕП.)
11. —, Комплекс неособенных кубик в P_3 . Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1980, вып. 11, 41—45 (РЖМат, 1981, 1А692)
12. —, О некоторых классах комплексов кубик в P_3 . Кемеров. ун-т. Кемерово, 1982, 17 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 18 февр. 1982 г., № 737—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 6А589 ДЕП)

13. —, Инвариантная связность, индуцированная комплексом кубик. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984, № 15, 38—40 (РЖМат, 1985, 2A708)
14. *Липтев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—383 (РЖМат, 1953, 433)
15. *Малаховский В. С.*, Многообразия алгебраических элементов в n -мерном проективном пространстве. Тр. Томск. ун-т, 1963, 168, 28—42 (РЖМат, 1964, 10A388)
16. —, Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Тр. геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1969, 2, 179—206 (РЖМат, 1970, 4A670)
17. —, Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 10 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1972, 113—157 (РЖМат, 1973, 5A659)
18. —, Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1981, 12, 31—60 (РЖМат, 1981, 10A516)
19. —, *Махоркин В. В.*, Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n -мерном проективном пространстве. Тр. геометр. семинара. Всес. ин-т научн. и техн. информ., 1974, 6, 113—134 (РЖМат, 1975, 3A716)
20. *Махоркин В. В.*, Многообразия кубических гиперповерхностей n -мерного проективного пространства. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974, вып. 5, 85—96 (РЖМат, 1975, 4A743)
21. *Мочернюк Н. Т.*, О многообразиях $(h, h, n)^k$. XXV научно-пед. конф. матем. кафедр педвузов Уральск. зоны. Тезисы докл. и сообщений. Свердловск, 1976, 60—62
22. —, Конгруэнции неособенных кубик в трехмерном проективном пространстве. Тр. Томск. ун-та, 1968, 196, 92—101 (РЖМат, 1969, 11A569)
23. —, Фокальная классификация конгруэнций коник. Материалы второй науч. конф. по матем. и механ. Томск, 1972, 1, 71—72
24. —, К дифференциальной геометрии многообразий алгебраических элементов в n -мерном проективном пространстве. Тр. Томск. ун-та, 1972, 205, 27—33 (РЖМат, 1974, 10A558)
25. —, Одномерные многообразия кубик (Методические разработки). Изд-во Караганд. ун-та. Караганда, 1982, 18 с.
26. —, Введение в фокальную классификацию конгруэнций коник в проективном пространстве. Мат. и физ. исследования. Караганда, 1974, вып. 1, 71—75
27. —, Вырожденные одномерные многообразия коник. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983, № 14, 64—69 (РЖМат, 1984, 1A674)
28. —, *Курамышина С. Г.*, Канонический репер однопараметрического многообразия переспадающих плоских кривых третьего порядка (кубик). Мат. и физ. исследования. Караганда, 1974, вып. 1, 71—75
29. *Пекарскене А. Ю.*, О геометрии многообразия вырожденных плоских кривых третьего порядка в P_3 . Лит. мат. сб., 1971, 11, № 3, 641—650 (РЖМат, 1972, 4A786)
30. *Рыжков В. В.*, О конгруэнциях плоских алгебраических кривых. Докл. АН СССР, 1943, 41, № 5, 202—208
31. *Смогоржевский А. С., Столова Е. С.*, Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М., Физматгиз, 1961, 263 с. (РЖМат, 1961, 12A462 К)
32. *Соколов Н. П.*, Пространственные матрицы и их приложения. М., Физматгиз, 1960, 300 с. (РЖМат, 1962, 10A129К)
33. *Фиников С. П.*, Пара линейчатых поверхностей, расслояемая двумя семействами кривых. Изв. АН СССР, 1945, 9, 79—112
34. —, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М. — Л., 1948
35. —, Теория конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1950.

36. —, Теория пар конгруэнций. М., Гостехиздат, 1956, 443 с. (РЖМат, 1958, 217 К)
37. Щербakov P. H., Линейчатая дифференциальная геометрия трехмерного пространства. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР», М., 1967, 265—321 (РЖМат, 1967, 10А510)
38. *Vackes F.*, Sur une congruence particulière de coniques. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1934, 20, 304—320
39. *Berzolari L.*, Sull'equazione differenziale di un sistema ∞^1 di coniche osculatrici a una conica data. Boll. Unione math. ital., 1939, 11, № 2, 1—10
40. *Bogdan C.*, Sur Les familles de coniques de l'espace ordinaire. Bul. Inst. plitehn. «Gh. Asachi», Iași, 1946, 1, 292—294
41. *Darboux G.*, Leçons sur la théorie general des surfaces. 1915, 2
42. *Kawaguchi A.*, Über die Differentialgeometrie von Kegelschnitten in dreidimensionalen projektiven Räumen. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1975, Ser. 1, 1—45
43. *Klobuček J.*, Sur les congruences des paraboles que admettent un system ∞^1 des surfaces normales. Bull. In., 1911, 16, 207—213
44. *Lane E.*, Surfaces and curvilinear congruences. Trans. Amer. Math. Soc., 1932, 34, 676—688
45. *Marcus Froim, Rottenberg Reuven R.*, Les surfaces cubiques à congruences planaires. «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1973, 54, № 1, 57—67. (РЖМат, 1974, 12А426)
46. *Rottenberg Reuven R.*, Correspondances entre surfaces à congruences planaires. «Rend. mat. e applic.», 1966 (1967), 25, № 3—4, 604—618. (РЖМат, 1968, 5А578)
47. —, Surfaces planaires et congruences P. Nota I. «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1967, 42, № 1, 28—34. (РЖМат, 1968, 5А576)
48. —, Surfaces planaires et congruences P. Nota II. «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1967, 42, № 2, 195—201. (РЖМат, 1968, 5А577)
49. *Su Buchin.*, On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. Tohoku Math. J. 1935, 40, 408—420
50. *Weiß Gunter.* Die algebraischen Konoide mit ebener Striktionslinie. «Monatsh. Math.», 1976, 81, № 1, 69—81. (РЖМат, 1976, 9А611)