С. Л. Берлов, Антиклики и хроматические числа в круговых графах, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2013, том 417, 5–10

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 417, 2013 г.

С. Л. Берлов

АНТИКЛИКИ И ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА В КРУГОВЫХ ГРАФАХ

Если $G = (V,\ E)$ – граф, то будем обозначать через:

$V(G)$ – множество вершин G, а $E(G)$ – множество ребер;

$d_G(x)$ (*степень* вершины графа) – количество ребер, содержащих вершину $x \in V$;

$\Delta(G)$ – максимальная из степеней вершин;

$\delta(G)$ – минимальная из степеней вершин;

$\chi(G)$ – *хроматическое число* G, то есть минимальное возможное число цветов по всем правильным раскраскам G.

$\omega(G)$ – кликовое число графа G, то есть размер максимальной клики как индуцированного подграфа G.

$\overline{G}$ – *дополнительный* граф к графу $G = (V, E)$ то есть граф, получаемый из G заменой всех рёбер на антирёбра и наоборот.

§1. Введение

Круговым графом называется граф пересечений конечного множества хорд в круге. Вершинами такого графа будут хорды, соединяющие некоторые пары данных точек на окружности, а смежными будут пары вершин, соответствующие хорды которых имеют общую внутреннюю точку. Будем обозначать множество таких графов через CIR. Свойства круговых графов изучаются с середины прошлого века. Проверка, является ли данный граф круговым, представляет собой NP-трудную задачу, и математики концентрировались на установлении различных свойств круговых графов. В статье [1] приведены алгоритмы нахождения максимальных клик и антиклик (то есть, независимых множеств) в этих графах, а статья [2] даёт характеризацию круговых графов в терминах графов пересечений коциклических путей.

Ключевые слова: граф, хроматическое число, антиклика, круговой граф.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00096) и при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор No. 11.G34.31.0053.

Введём обозначение: $f(k) = \max(\chi(G)|\ G \in CIR; \omega(G) \leq k)$. Вопрос о наиболее точных значениях $f(k)$ рассматривался в ряде работ. Для произвольного k наилучшая верхняя оценка была получена в [3]. Там было доказано, что $f(k) \leq 2^{k+6}$. Для маленьких значений k известны более точные оценки: $f(2) = 5$ (статьи [4] и [5]) и $f(3) \leq 30$ (статья [6]).

Рассмотрим несколько иной подход к круговым графам. Обозначим через $CIR(n)$ полный круговой граф на n точках. Т. е. граф пересечений всех хорд, соединяющих данные n точек на окружности. В этом графе $\frac{n(n-1)}{2}$ вершин и C_n^4 рёбер. Пусть все вершины этого графа разбиты на m множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному множеству. Понятно, что тогда $m \geq n$. Возникает вопрос: верно ли, что в одном из множеств найдётся достаточно большая антиклика? Если зафиксировать отношение $\frac{m}{n} = k$, то этот вопрос весьма нетривиален. Ответ на него содержится в следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть все вершины графа $CIR(n)$ разбиты на m множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному множеству. Тогда в одном из множеств найдётся антиклика мощности не менее* $\lceil \frac{n}{m} \ln[\frac{n-1}{2}] \rceil$.

Это означает, что при достаточно больших значениях n и фиксированном k найдётся достаточно большая антиклика.

В качестве очевидного следствия вытекает такая теорема:

Теорема 1. *Дано число $k \geqslant 1$. Рассмотрим граф, дополнительный к $CIR(n)$. Пусть его вершины разбиты на kn множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному из множеств. Тогда хроматическое число подграфа, порождённого одним из множеств будет не меньше* $\lceil \frac{1}{k} \ln[\frac{n-1}{2}] \rceil$.

Также получается такое следствие:

Следствие 1. *Если $n > 2e^{2t-2} + 3$ при некотором натуральном числе t, то при расстановке в n точках на окружности чисел от 1 до n в произвольном порядке всегда можно выбрать t попарно непересекающихся хорд, суммы чисел на концах которых равны.*

Если отказаться от условия на то, что хорды, принадлежащие одному множеству не могут иметь общего конца, то получается такой результат:

Теорема 2. *Дано положительное число k. Рассмотрим граф $CIR(n)$. Пусть его вершины разбиты на kn множеств. Тогда подграф, порождённый одним из множеств, будет содержать антиклику не менее, чем на $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$ вершинах.*

И следствие:

Следствие 2. *Дано натуральное число k. Если $n > 2e^{2kt^2}$ для некоторого натурального числа t, то при расстановке в n точках на окружности натуральных чисел, не превосходящих kn, всегда можно выбрать более t попарно непересекающихся хорд, суммы чисел на концах которых равны.*

§2. Максимальная антиклика

Сначала докажем важную лемму:

Лемма 2. *Пусть в графе G ровно a_i вершин степени i. Тогда в нем существует антиклика мощности $a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots$.*

Эта лемма достаточно известна, например, в несколько иной формулировке встречалась в [7, Лемма 25.1]. Здесь для полноты мы приведём доказательство этого факта.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по количеству вершин. Обозначим сумму $a_0+a_1/2+a_2/3+\dots$ через $S(G)$. Достаточно доказать, что $S(G) \le \omega(\overline{G})$.

База: если граф полный и содержит n вершин, то $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0, a_{n-1} = n$ и $S(G) = 1$.

Переход: Пусть граф не является полным. Удалим вершину A наименьшей степени $\delta(G)$. Также удалим все вершины, смежные с A. Поскольку граф G не являлся полным, после этой операции останется граф G_1, не являющийся пустым. Для него верно предположение индукции. Заметим, что $\omega(\overline{G}) \ge \omega(\overline{G}_1) + 1$, поскольку к максимальной антиклике G_1 можно добавить вершину A.

Поскольку из графа G было удалено $\delta(G) + 1$ вершин, степени которых были не меньше $\delta(G)$, то вклад удалённых вершин в $S(G)$ был не больше 1. Поскольку степени остальных вершин не увеличились, то их вклад в эту сумму не уменьшился. Таким образом, $S(G)$ уменьшилась не более, чем на 1. Но после этого она стала не больше, чем $\omega(\overline{G}_1) \le \omega(\overline{G}) - 1$. Следовательно, изначально $S(G) \le \omega(\overline{G})$. □

Докажем теперь лемму 1.

Доказательство. Предположим противное. *Длиной* хорды A назовем количество точек, находящихся с той стороны от хорды, где их меньше. Будем обозначать эту длину через $\ell(A)$. Заметим, что эту хорду может пересекать не более $\ell(A)$ других хорд из множества, в которое попала хорда A, поскольку любая пересекающая её хорда этого множества имеет концы в разных полуплоскостях относительно A. Следовательно, степень вершины A в том множестве, в которое попала хорда A, не превосходит $\ell(A)$. Обозначим число $[\frac{n-3}{2}]$ через s. Заметим, что тогда в графе $CIR(n)$ будет ровно по n хорд, длины которых равны $1, 2, \dots, s$. Тогда в силу леммы 2, для любого множества, для которого существует ровно a_i хорд длины i, размер максимальной антиклики не меньше $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1}$. Но тогда выполнено неравенство $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1} < \lceil \frac{n}{m} \ln(s+1) \rceil$. Так как левая часть не превосходит размера максимальной антиклики, а правая – строго больше, то правая часть больше размера максимальной антиклики хотя бы на 1, откуда $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1} < \frac{n}{m} \ln(s+1)$. Просуммируем подобные неравенства по всем множествам. Поскольку имеется ровно n хорд длины i при $i \leq s$ и каждая из этих хорд будет ровно один раз участвовать в сумме, то получим $n(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s+1}) < n \ln(s+1)$. Поскольку $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s+1} > \ln(s+1)$, то получается противоречие, которое доказывает лемму 1. □

Следствие 1 доказывается так:

Доказательство. Разобьём все хорды на $2n$ множеств: i-ому множеству будут принадлежать хорды с суммой чисел на концах, равной $i+2$ (некоторые множества могут быть пусты). Применим лемму 1. Тогда найдутся $\lceil \frac{1}{2} \ln[\frac{n-1}{2}] \rceil$ попарно непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству. Поскольку $n > 2e^{2t-2} + 3$, то найдётся более $\frac{1}{2} \ln[e^{2t-2} + 1] \geq t - 1$ попарно непересекающихся хорд, т. е. не менее t. □

Перейдём к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Обозначим через t размер максимальной антиклики графа $CIR(n)$, принадлежащей одному множеству. Из каждой точки на окружности может выходить не более t хорд, принадлежащих одному множеству, поскольку все эти хорды образуют антиклику. Докажем, что хорду длины $\ell(A)$ может пересекать не более $t\ell(A)$ других хорд из множества, в которое попала хорда A. Действительно, любая пересекающая её хорда этого множества имеет концы в разных полуплоскостях относительно A, а с одной из сторон таких точек всего $\ell(A)$. Но при этом из каждой такой точки выходит не более t хорд, принадлежащих тому же классу, что и A. Следовательно, степень вершины A в том множестве, в которое попала хорда A, не превосходит $t\ell(A)$.

Пусть в некотором множестве будет ровно a_i хорд длины i. Обозначим число $[\frac{n-3}{2}]$ через s. Теперь применим лемму 2. Из неё следует, что $t \geq a_0 + \frac{a_1}{t+1} + \frac{a_2}{2t+1} + \frac{a_3}{3t+1} + \cdots + \frac{a_s}{st+1}$. Просуммируем подобные неравенства по всем множествам. Получим

$$knt \quad \geq \quad n\Big(1 \ + \ \frac{1}{t+1} \ + \ \frac{1}{2t+1} \ + \ \frac{1}{3t+1}\cdots \ + \ \frac{1}{st+1}\Big). \qquad (1)$$

Поскольку функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ убывает при положительных x, то в силу интегральной оценки

$$1+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2t+1}+\cdots+\frac{1}{st+1} \geq \int_0^{s+1} \frac{1}{tx+1}\,dx$$
$$= \frac{\ln(t(s+1)+1)}{t} \geq \frac{\ln(s+2)}{t} \geq \frac{\ln(n/2)}{t}. \qquad (2)$$

Если подставить это неравенство в 1, то получим, что $knt > n\frac{\ln(n/2)}{t}$, откуда $t > \sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$. Следовательно, в одном из подграфов, порождённых некоторым множеством, всегда найдётся антиклика мощности большей, чем $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$. □

Выведем теперь из этой теоремы следствие 2.

Доказательство. Разобьём все хорды на $2kn$ множеств: i-ому множеству будут принадлежать хорды с суммой чисел на концах, равной $i+1$ (некоторые множества могут быть пусты). Применим теорему 2. Тогда найдутся более, чем $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{2k}}$ попарно непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству. Поскольку $n > 2e^{2kt^2}$, то найдутся более $\sqrt{\frac{\ln e^{2kt^2}}{2k}} = t$ непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству. $\square$

Литература

1. F. Gavril, *Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph.* — Networks **3** (1975), 261–273.
2. H. de Fraysseix, *A characterization of circle graphs.* — Europ. J. Combin. **5** (1984), 223–238.
3. A. V. Kostochka and J. Kratochvil, *Covering and coloring poligon-circle graphs.* — Disc. Math. **163** (1997), 299-305.
4. A. V. Kostochka, *On upper bounds for the chromatic numbers of graphs.* — Trudy Inst. Math. **10** (1988), 204–226.
5. A. A. Ageev. *A triangle-free circle graph with chromatic number 5.* — Discrete Mathematics **152**, No. 1–3 (1996), 295–298.
6. Г. В. Ненашев, *Оценка хроматического числа графа пересечения хорд на окружности без K_4.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2012), 149–156.
7. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, и Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов.* Наука, 1990.

Berlov S. L. Independent sets and chromatic numbers of circle graphs.

Let the vertices of a circle graph be divided into several groups. This paper contains lower bounds on the size of an independent set that can be contained in one group of this subdivision.

Поступило 31 октября 2013 г.

Физико-математический лицей 239

Ярославский
государственный унивеситет,
ул. Советская, д. 14,
150000 Ярославль, Россия

E-mail: sberlov@rambler.ru