В. П. Ильин, Некоторые функциональные неравенства типа теорем вложения, *Докл. АН СССР*, 1958, том 123, номер 6, 967–970

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 123, № 6

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 VIII 1958)

В настоящей заметке мы рассматриваем некоторые оценки для функций, заданных в области D n-мерного пространства, аналогичные тем, которые дают теоремы вложения С. Л. Соболева ([1], [2]), но при некоторых дополнительных предположениях. В отличие от условий теорем С. Л. Соболева, в которых задана одна и та же оценка для интегралов от p-х степеней l-х производных по любой подобласти Ω области D, мы будем предполагать эту оценку зависящей от некоторой положительной степени α диаметра или всей подобласти Ω, или ее сечений меньшего числа измерений. Для случая $(l+\alpha)p>n$ при несколько иных предположениях относительно функций аналогичные результаты получены Греко ([3]) и Ниренбергом ([4]).

I. Относительно области D в дальнейшем будем предполагать, что она такова, что к каждой ее точке можно провести n-мерный шаровой сектор постоянного радиуса и формы с вершиной в этой точке, целиком лежащей в D. Класс областей такого вида будем обозначать $C_{\mathscr{H}}^{n}$, где $\mathscr{H}$ — величина наибольшего допустимого радиуса достигающего сектора.

Введем следующие обозначения. Через D_m будем обозначать произвольное сечение области D гиперплоскостью $x_{m+1}=\mathrm{const},\ldots, x_n=\mathrm{const}$. Пусть D_m — некоторое сечение области D гиперплоскостью $x_{m+1}=a_{m+1},\ldots, x_n=a_n$; тогда через $[D_m]_{n-m}^d$ будем обозначать множество точек $P(x_1,\ldots, x_m, x_{m+1},\ldots, x_n)$ области D, для координат которых справедливы неравенства $|x_i-a_i|\leqslant d$, $i=m+1,\ldots, n$. В частности, например, $[D_0]_n^d$ является частью области D, заключенной внутри некоторого n-мерного куба со стороной $2d$, а $[D_n]_0^d\equiv D$.

II. В дальнейшем будем предполагать, что $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная в области $D\in C_{\mathscr{H}}^{n}$, имеющая непрерывные производные до порядка l, удовлетворяющая условиям

1)
$$\Big[\overbrace{\int\cdots\int_{(D)}}^{n}|f|^p dv_n\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant A\qquad(p\geqslant 1),\tag{1}$$

где $dv=dx_1\ldots dx_n$;

2) существует постоянное число $M>0$ такое, что для любого целого m, $0\leqslant m\leqslant n$, и любого $d>0$ справедливо неравенство

$$\max_{D_m}\Big[\overbrace{\int\cdots\int_{[D_m]_{n-m}^d}}^{n}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n}\Big|\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\Big|^2\Big)^{\frac{p}{2}}dv_n\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant Md^{\alpha m},\tag{2}$$

где α_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ — фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n = 0, \qquad \alpha_m \leqslant \frac{n-m}{p}. \tag{3}$$

Из того, что $\alpha_n = 0$, следует, что при $d \geqslant 1$ в правой части неравенства (2) d^{α_m} можно опустить.

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям* (1) — (3); *k — целое число, причем $0 \leqslant k \leqslant l-1$.*

Тогда:

1) *если* $l + \alpha_0 - \frac{n}{p} - k = \varepsilon_0 - k > 0$ *и* $\frac{\partial^k l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ *непрерывна в* $\bar{D} = D + \Gamma$ (Γ — *граница* D), *то для любой точки* $P \in \bar{D}$ *справедлива оценка*

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right| \leqslant C_1 A h^{-k-\frac{n}{p}} + C_2 M h^{\varepsilon_0 - k}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_0 = l + \alpha_0 - \frac{n}{p}$;

2) *если* $l + \alpha_0 - \frac{n}{p} - k \leqslant 0$, m — *целое*, $1 \leqslant m \leqslant n$, $l + \alpha_m - \frac{n-m}{p} - k > 0$, *то для любого сечения* D_m *области* D *и любого показателя* $q \geqslant p$ *такого, что*

$$q < \frac{m - (\alpha_0 - \alpha_m) p}{n - (l - k + \alpha_0) p} p, \tag{5}$$

справедливо неравенство

$$\left[\underbrace{\int \cdots \int}_{(D_m)}^{m} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^q dv_m \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant C_3 A h^{\frac{m}{q} - k - \frac{n}{p}} + C_4 M h^{\varepsilon_m - k}, \tag{6}$$

где $dv_m = dx_1 \ldots dx_m$; $\varepsilon_m = l + \alpha_0 \left(1 - \frac{p}{q}\right) + \alpha_m \frac{p}{q} + \frac{m}{q} - \frac{n}{p}$; h — *произвольное положительное число* $\leqslant \mathscr{H}$; C_1, C_2, C_3, C_4 — *постоянные, не зависящие от* A, M, h, *а лишь от* l, k, α_0, α_m, p, q, m, n *и вида области* D (*от телесного угла сектора, достигающего каждую точку области* D).

Из неравенств (4) и (5) следуют также неравенства:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right| \leqslant C_5 \left(A^{\varepsilon_0 - k} M^{k + \frac{n}{p}}\right)^{\frac{1}{l+\alpha_0}} + C_6 A, \text{ если } \varepsilon_0 - k > 0; \tag{4'}$$

$$\left[\underbrace{\int \cdots \int}_{(D_m)}^{m} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^q dv_m \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \left(A^{\varepsilon_m - k} M^{k + \frac{n}{p} - \frac{m}{q}}\right)^{\frac{1}{l + \alpha_0 \left(1 - \frac{p}{q}\right) + \alpha_m \frac{p}{q}}} + C_8 A, \tag{6'}$$

если $\varepsilon_0 - k \leqslant 0$, $\quad l + \alpha_m - \frac{n-m}{p} - k > 0$, $\quad p \leqslant q < \frac{m - (\alpha_0 - \alpha_m) p}{n - (l + \alpha_0 - k) p} p$.

Нетрудно показать примерами, что указанные оценки в смысле порядка являются точными.

III. Предположим теперь, что область $D \in C^n_{\mathscr{H}}$ такова, что любые ее две точки P и Q можно соединить с помощью ломаной $P_0\ P_1 \ldots P_{s-1} P_s$ ($P_0 = P$; $P_s = Q$) с конечным числом звеньев (число звеньев для любых двух точек P и Q ограничено и $\leqslant s_0$) с длинами, не превосходящими $|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|$, причем таких, что для любых двух соседних вершин P_{i-1} и P существуют достигающие секторы одного и того же раствора и радиуса, оси которых лежат на отрезке $P_{i-1}P_i$, и расположенные так, что сферическая поверхность одного из них лежит внутри другого и наоборот (см. рис. 1).

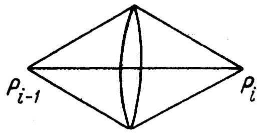

Рис. 1

Теорема 2. *Пусть область D удовлетворяет условиям настоящего пункта; P, Q — две произвольные точки из D. Тогда при условиях пункта* 1) *теоремы* 1 *для любого числа* λ, *удовлетворяющего неравенствам* $0 < \lambda \leqslant \varepsilon_0 - k$, $\lambda \leqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\frac{\left| \dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} - \dfrac{\partial^k f(Q)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|}{|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_9 \left(Ah^{-k-\frac{n}{p}-\lambda} + Mh^{\varepsilon_0-k-\lambda}\right), & \text{если } \varepsilon_0 - k > 1 \text{ или } \varepsilon_0 - k < 1; \\ C_{10} \left(Ah^{-k-\frac{n}{p}-\lambda} + \dfrac{1}{1-\lambda} Mh^{\varepsilon_0-k-\lambda}\right), & \text{если } \varepsilon_0 - k = 1, \lambda < 1; \\ C_{11} \left[A\mathscr{H}^{-\frac{n}{p}-k-1} + M\left(1 + \left|\ln\dfrac{\mathscr{H}}{H}\right|\right)\right], & \text{если } \varepsilon_0 - k = 1,\ \lambda = 1, \end{cases} \tag{7}$$

где C_9, C_{10}, C_{11} — постоянные, не зависящие от A, M, h, λ; h — произвольное положительное число $\leqslant \mathscr{H}$; $H \leqslant \mathscr{H}$, $|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|$.

Пусть S_m — плоское m-мерное многообразие, содержащееся в D_m; $\mathbf{R}$ вектор такой, что все векторы $h\mathbf{R}$ $(0 \leqslant h \leqslant 1)$ сдвигают S_m в пределах D. Такой вектор $\mathbf{R}$ будем называть допустимым для $S_m \subset D_m$.

Предположим далее, что существуют допустимые векторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_t$, сдвигающие последовательно S_m в $S^{(1)}_m$, $S^{(1)}_m$ в $S^{(2)}_m, \ldots, S^{(t-1)}_m$ в $S^{(t)}_m = S'_m$ такие, что:

1) $\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_t = \mathbf{R}$ $(t \leqslant t_0)$;

2) $|\mathbf{R}_i| \leqslant |\mathbf{R}|$, $i = 1, 2, \ldots, t$;

3) для каждой точки P_{i-1} на $S^{(i-1)}_m$ и соответствующей точки P_i ($\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{R}_i$) на $S^{(i)}_m$ существуют достигающие секторы, целиком лежащие в D и обладающие тем же свойством, что и в III (см. рис. 1); радиусы и растворы этих секторов предполагаются одинаковыми.

Теорема 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям пункта* 2) *теоремы* 1; $S_m \subset D_m$; $\mathbf{R}$ — *вектор, допустимый для* S_m, *причем относительно* S_m *и* $\mathbf{R}$ *справедливы сделанные выше предположения.*

Тогда для любого $q \geqslant p$, удовлетворяющего условию (5), *и для любого числа* λ, *удовлетворяющего неравенствам* $0 < \lambda \leqslant \varepsilon_m - k$, $\lambda \leqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\frac{\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{(S_m)}^{m}\left|\frac{\partial^k f(\mathbf{P}+\mathbf{R})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}-\frac{\partial^k f(\mathbf{P})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\right|^q dv_{\mathbf{P}}\right]^{\frac{1}{q}}}{|\mathbf{R}|^{\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} C_{12}\left[Ah^{\frac{m}{q}-\frac{n}{p}-k-\lambda}+Mh^{\varepsilon_m-k-\lambda}\right], & \text{если } \varepsilon_m-k>1 \text{ или } \varepsilon_m-k<1; \\ C_{13}\left[Ah^{\frac{m}{q}-\frac{n}{p}-k-\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}Mh^{\varepsilon_m-k-\lambda}\right], & \text{если } \varepsilon_m-k=1,\ \lambda<1; \\ C_{14}\left[A\mathscr{H}^{\frac{m}{q}-\frac{n}{p}-k-\lambda}+M\left(1+\left|\ln\frac{\mathscr{H}}{H}\right|\right)\right], & \text{если } \varepsilon_m-k=1,\ \lambda=1, \end{cases}\quad(8)$$

где C_{12}, C_{13}, C_{14} не зависят от A, M, h, λ; h — произвольное положительное число $\leqslant\mathscr{H}$; $H\leqslant\mathscr{H}$, $|\mathbf{R}|$.

Из (7) и (8) следуют неравенства, аналогичные неравенствам (4′) и (6′).

IV. Приведенные теоремы будут справедливы и в том случае, если условие (2) заменить следующим:

Существует $M>0$ такое, что

$$\max_{D_m}\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{(D)}^{n} r_{n-m}^{-k_{n-m}}\left(\sum_{i_1\ldots i_l=1}^{n}\left|\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dv_n\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant M\qquad(m=0,1,\ldots,n),\quad(2')$$

где r_{n-m} — расстояние от плоскости D_m, $0\leqslant k_{n-m}<n-m$, $k_0=0$.

Кроме того отметим, что оценки, указанные для функций с непрерывными производными, распространяются также на функции, имеющие обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 VIII 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4, № 3, 471 (1938). [3] D. Greco, Ric. Mat. Napoli, 1, 124 (1952). [4] I. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 9, № 3, 509 (1956).