В. В. Лебедев, О равномерной сходимости рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 946–949

DOI: 10.4213/mzm9165

О равномерной сходимости рядов Фурье

В. В. Лебедев

Для произвольной интегрируемой функции f на окружности $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая и $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(t)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{ikt},\qquad \widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Пусть $C(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ с обычной нормой $\|f\|_{C(\mathbb{T})}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|f(t)|$. Пусть $U(\mathbb{T})$ – пространство всех функций $f\in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых равномерно сходится, т.е. $\|S_N(f)-f\|_{C(\mathbb{T})}\to 0$ при $N\to\infty$, где $S_N(f)$ есть N-я частичная сумма ряда Фурье функции f:

$$S_N(f)(t)=\sum_{|k|\leqslant N}\widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Снабженное естественной нормой

$$\|f\|_{U(\mathbb{T})}=\sup_N\|S_N(f)\|_{C(\mathbb{T})},$$

пространство $U(\mathbb{T})$ является банаховым пространством.

Рассмотрим также пространство $A(\mathbb{T})$ функций $f\in C(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно сходящийся ряд Фурье. Положим

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})}=\|\widehat{f}\|_{l^1}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|.$$

Пространство $A(\mathbb{T})$ банахово. Имеем $A(\mathbb{T})\subset U(\mathbb{T})$ и $\|\cdot\|_{U(\mathbb{T})}\leqslant\|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$.

Пусть φ – непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя, т.е. непрерывная функция $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$, $t\in\mathbb{R}$. Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона [1] (см. также [2], [3]), если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}=O(1)$, $n\to\infty$, то функция φ линейна. Вместе с тем известно, что существуют нетривиальные отображения $\varphi\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ такие, что $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}=O(1)$. Обзор ряда результатов об отображениях окружности и пространствах $A(\mathbb{T})$, $U(\mathbb{T})$ имеется в работах [3], [4]. Более поздние результаты получены в [5].

Кахану принадлежит следующее утверждение [2; гл. IV]. Если нелинейное непрерывное отображение $\varphi\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ кусочно линейно (т.е. таково, что $[0,2\pi]$ является конечным объединением интервалов, на каждом из которых функция φ линейна), то $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}\simeq\log|n|$. (Знак $\simeq$ означает, что при всех достаточно больших $n\in\mathbb{Z}$ отношение соответствующих величин заключено между двумя положительными константами.) Здесь мы получим аналог этого утверждения для пространства $U(\mathbb{T})$.

Теорема. *Пусть φ – кусочно линейное, но нелинейное непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Тогда*

$$\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}\simeq\log|n|,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что нетривиальные кусочно линейные замены переменной, вообще говоря, разрушают равномерную сходимость рядов Фурье. Более того, они не действуют из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$. В самом деле, предположив, что для любой функции $f\in A(\mathbb{T})$ суперпозиция $f\circ\varphi$ принадлежит $U(\mathbb{T})$, мы имели бы $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}=O(1)$ (достаточно применить теорему о замкнутом графике к оператору $f\to f\circ\varphi$).

Для доказательства теоремы надо лишь доказать $(\log|n|)$-оценку снизу; оценка сверху $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}=O(\log|n|)$ следует из неравенства $\|\cdot\|_{U(\mathbb{T})}\leqslant\|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$ и указанного выше результата Кахана.

Лемма. *Пусть $m \in C(\mathbb{T})$ – функция такая, что*

$$\|m\|_* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{m}(n)| \log(|n|+2) < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$ имеем $mf \in U(\mathbb{T})$ и

$$\|mf\|_{U(\mathbb{T})} \leqslant c\|m\|_* \|f\|_{U(\mathbb{T})},$$

где константа $c > 0$ не зависит от f и m.

Доказательство. Пусть $f \in U(\mathbb{T})$. При $n \in \mathbb{Z}$ положим $e_n(t) = e^{int}$. Пусть $n > 0$. Тогда

$$S_N(e_n f) = e_n S_{N+n}(f) + e_N \widehat{f}(N-n) - e_{N+n} S_n(e_{-N} f). \tag{1}$$

Легко увидеть, что отсюда следует включение $e_n f \in U(\mathbb{T})$.

Для любой функции $g \in U(\mathbb{T})$ мы имеем $\|g\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant \|g\|_{U(\mathbb{T})}$. Вместе с тем (как хорошо известно) для любой функции $g \in C(\mathbb{T})$ имеем

$$\|S_n(g)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant c\|g\|_{C(\mathbb{T})} \log(n+2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от n и g. Поэтому (1) дает

$$\begin{aligned}\|S_N(e_n f)\|_{C(\mathbb{T})} &\leqslant \|S_{N+n}(f)\|_{C(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + \|S_n(e_{-N} f)\|_{C(\mathbb{T})} \\ &\leqslant \|f\|_{U(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + c\|f\|_{C(\mathbb{T})} \log(n+2) \leqslant c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(n+2).\end{aligned}$$

Таким образом, $\|e_n f\|_{U(\mathbb{T})} \leqslant c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(|n|+2)$. Такое же соотношение верно при $n < 0$ (комплексное сопряжение не меняет норму функции в $U(\mathbb{T})$). Отсюда немедленно получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Стандартным образом будем отождествлять функции на $\mathbb{T}$ и функции на отрезке $[-\pi, \pi]$. При $v \in \mathbb{R}$ определим функции e_v на $[-\pi, \pi]$, полагая $e_v(t) = e^{ivt}$. Для произвольного интервала $I \subseteq [-\pi, \pi]$ пусть 1_I – его характеристическая функция: $1_I(t) = 1$ при $t \in I$, $1_I(t) = 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \setminus I$. При $0 < \varepsilon < \pi$ пусть Δ_ε – "треугольная" функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $[-\pi, \pi]$, определенная соотношением $\Delta_\varepsilon(t) = \max(0, 1 - |t|/\varepsilon)$.

Пусть t_0 – такая точка, что функция φ линейна в некоторой левой полуокрестности точки t_0 и линейна в некоторой правой полуокрестности точки t_0, но не линейна ни в какой ее окрестности. Заменяя (при необходимости) функцию $\varphi(t)$ на $\varphi(t+t_0) - \varphi(t_0)$, можем считать, что $t_0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$; таким образом, можем считать, что для некоторого ε, $0 < \varepsilon < \pi$, имеем $\varphi(t) = \alpha t$ при $t \in (-\varepsilon, 0]$ и $\varphi(t) = \beta t$ при $t \in [0, \varepsilon)$, где $\alpha \neq \beta$.

Непосредственное вычисление дает при $k \neq n\alpha$, $n\beta$

$$\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{n\beta - k}\right) - \frac{1}{i\varepsilon}\left(\frac{1}{n\alpha - k}\,\widehat{e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon,0)}}(k) - \frac{1}{n\beta - k}\,\widehat{e_{n\beta} 1_{(0,\varepsilon)}}(k)\right). \tag{2}$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть

$$Q(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}:\ |k-\lambda|\geqslant 1} \frac{1}{(k-\lambda)^2}.$$

Легко проверить, что

$$Q(\lambda) \leqslant 4, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Покажем сначала, что при $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, мы имеем

$$\|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \geqslant \frac{1}{2\pi} \log|n| + c(\varphi), \tag{4}$$

где $c(\varphi)$ не зависит от n.

Если $g \in U(\mathbb{T})$, то функция $g(-t)$ и функция $\overline{g(t)}$ (полученная комплексным сопряжением) принадлежат $U(\mathbb{T})$ и имеют ту же норму, что и g. Поэтому при доказательстве оценки (4) мы можем считать, что $\alpha > 0$ и рассматривать лишь следующие три случая:

1) $|\beta|>\alpha$;
2) $\beta=-\alpha$;
3) $\beta=0$.

Мы можем также считать, что n положительно и настолько велико, что $n\alpha\geqslant 2$. Всюду далее мы полагаем $N=[n\alpha]-1$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

Случай 1). Имеем

$$\begin{aligned}\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\alpha-k}\biggr|&=\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\alpha-k}\geqslant\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{N+2-k}\\&=\frac12+\frac13+\dots+\frac{1}{2N+2}\geqslant\log(N+1)\geqslant\log\frac{n\alpha}{2}\,.\end{aligned}\tag{5}$$

Вместе с тем, при $|k|\leqslant N$ имеем $|n\beta-k|\geqslant|n\beta|-|n\alpha|=n(|\beta|-\alpha)$, поэтому

$$\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\beta-k}\biggr|\leqslant\frac{2N+1}{n(|\beta|-\alpha)}\leqslant\frac{3n\alpha}{n(|\beta|-\alpha)}=\frac{3\alpha}{|\beta|-\alpha}\,.\tag{6}$$

Заметим далее, что, пользуясь неравенством Коши и равенством Парсеваля, получаем (см. (3))

$$\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\alpha-k}\,\widehat{e_{n\alpha}1_{(-\varepsilon,0)}}(k)\biggr|\leqslant(Q(n\alpha))^{1/2}\|e_{n\alpha}1_{(-\varepsilon,0)}\|_{L^2(\mathbb{T})}\leqslant 2\varepsilon^{1/2},\tag{7}$$

и аналогично

$$\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\beta-k}\,\widehat{e_{n\beta}1_{(0,\varepsilon)}}(k)\biggr|\leqslant(Q(n\beta))^{1/2}\|e_{n\beta}1_{(0,\varepsilon)}\|_{L^2(\mathbb{T})}\leqslant 2\varepsilon^{1/2}.\tag{8}$$

Вместе соотношения (5)–(8) влекут (см. (2))

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)|=\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k)\biggr|\geqslant\frac{1}{2\pi}\biggl(\log\frac{n\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{|\beta|-\alpha}\biggr)-4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы получаем (4).

Случай 2). Имеем

$$\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\biggl(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{n\beta-k}\biggr)\biggr|=\biggl|\sum_{|k|\leqslant N}\biggl(\frac{1}{n\alpha-k}+\frac{1}{n\alpha+k}\biggr)\biggr|=\biggl|2\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{n\alpha-k}\biggr|\geqslant\log\frac{n\alpha}{2}\,.$$

Вместе с оценками (7), (8), которые верны в случае 2), эта оценка дает

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)|\geqslant\frac{1}{2\pi}\log\frac{n\alpha}{2}-4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы опять получаем (4).

Случай 3). Имеем

$$\biggl|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant N}\biggl(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{n\beta-k}\biggr)\biggr|=\biggl|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant N}\biggl(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{-k}\biggr)\biggr|=\biggl|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant N}\frac{1}{n\alpha-k}\biggr|\geqslant\log\frac{n\alpha}{2}-1.$$

Заметим, что оценки (7), (8) верны в случае 3), если промежуток $|k|\leqslant N$ в суммах заменить на $1\leqslant|k|\leqslant N$. Таким образом, видим, что

$$\biggl|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant N}\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k)\biggr|\geqslant\frac{1}{2\pi}\biggl(\log\frac{n\alpha}{2}-1\biggr)-4\varepsilon^{-1/2},$$

и, поскольку $|\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(0)| \leqslant 1$, получаем

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| \geqslant \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{n\alpha}{2} - 1\right) - 4\varepsilon^{-1/2} - 1.$$

Оценка (4) доказана.

Заметим теперь, что $\widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = O(1/|k|^2)$ при $|k| \to \infty$, поэтому

$$\|\Delta_\varepsilon\|_* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_\varepsilon}(k)| \log(|k|+2) = M(\varepsilon) < \infty,$$

и из (4), пользуясь леммой, получаем

$$c(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\log|n| \leqslant \|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \leqslant cM(\varepsilon)\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Было бы интересно описать поточечные мультипликаторы пространства $U(\mathbb{T})$, т.е. такие непрерывные функции m на $\mathbb{T}$, что $mf \in U(\mathbb{T})$ для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$. Согласно полученной выше лемме, условие

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{m}(k)| \log(|k|+2) < \infty$$

является достаточным для того, чтобы функция m являлась мультипликатором. Автору не известноб является ли это условие необходимым. Указанное условие нельзя заменить более слабым условием $m \in A(\mathbb{T})$ (см. [2; гл. I, § 6]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Beurling, H. Helson, *Math. Scand.*, **1** (1953), 120–126. **[2]** Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976. **[3]** J.-P. Kahane, *Topics in Modern Harmonic Analysis*, Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990. **[4]** А. М. Олевский, *УМН*, **40**:3 (1985), 157–193. **[5]** В. В. Лебедев, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 103–130.

В. В. Лебедев
Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)
E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило
26.05.2011
Исправленный вариант
19.01.2012