А. П. Киселев, Точечные источники колебаний в слабо анизотропной упругой среде, *Докл. АН СССР*, 1988, том 300, номер 4, 824–826

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 300, № 4

УДК 539.3:550.334:517.9 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А.П. КИСЕЛЕВ

ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ КОЛЕБАНИЙ В СЛАБО АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком В.В. Новожиловым 13 XII 1986)

Задачи о колебаниях анизотропных упругих сред, несмотря на свою связь с приложениями, стимулировавшую усилия многих исследователей [1, 2], изучены далеко не достаточно из-за крайней громоздкости и малой наглядности возникающих формул.

Существует, однако, важный (например, для сейсмики) класс сред, мало отличающихся от изотропной, для которых волновые задачи допускают построение простых формул посредством теории возмущений. В заметке изучается возбуждение таких сред точечными источниками. Среда предполагается однородной, а анизотропия слабой, но произвольной. Основным результатом являются простые выражения для продольной волны от центра вращения и поперечной — от центра расширения, пригодные в дальней зоне на расстояниях, малых по сравнению с $1/\epsilon$, где $\epsilon \ll 1$ — параметр, характеризующий отклонение среды от изотропии.

1. Пусть тензор напряжений, соответствующий перемещению $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, имеет вид

$$(1)\qquad \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \sigma^0_{ij}(\mathbf{u}) + \epsilon a_{ijmn}\partial_m u_n, \qquad \partial_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

где ϵ — малый параметр, σ^0_{ij} отвечает изотропной среде,

$$(2)\qquad \sigma^0_{ij}(\mathbf{u}) = \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},$$

$\lambda + 2\mu > \mu > 0$, δ_{ij} — символ Кронекера, а по повторяющимся нижним значкам подразумевается суммирование от 1 до 3. От тензора a_{ijmn} требуется только симметрия относительно перестановок $i \leftrightarrow j$, $m \leftrightarrow n$, $ij \leftrightarrow mn$.

Гармонические по времени колебания среды с угловой частотой ω под действием объемных сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ описываются уравнением

$$(3)\qquad \mathbf{L}^0(\mathbf{u}) + \epsilon\mathbf{L}^1(\mathbf{u}) = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{L}^0(\mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u},$$

$$\mathbf{L}^1_i(\mathbf{u}) = a_{ijmn}\partial_j\partial_m u_n,$$

$\rho > 0$ — плотность среды. Временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ опущен. На бесконечности предположено выполненным условие предельного поглощения, гарантирующее для источников с ограниченным носителем единственность решения.

Для приложений особенно интересны центр расширения

$$(4)\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi\,\mathrm{grad}\{\delta(x_1)\sigma(x_2)\,\delta(x_3)\}$$

($\delta(x_m)$ — одномерная дельта-функция) и центр вращения

$$(5)\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi\,\mathrm{rot}\{\mathbf{l}\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\},$$

где $\mathbf{l}$ — заданный единичный вектор.

Поле любого точечного источника можно получить из решения задачи о сосредоточенной силе

$$(6)\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4\pi \mathbf{l}\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

дифференцированием и заменой $\mathbf{l}$.

2. Для построения теории возмущений по параметру ϵ положим

$$(7)\qquad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r};\,\epsilon) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}) + \epsilon\mathbf{u}^1(\mathbf{r}) + \epsilon^2\mathbf{u}^2(\mathbf{r}) + \ldots$$

Тогда

$$(8)\qquad \mathbf{L}^0(\mathbf{u}^0) = \mathbf{F},$$

$$(9)\qquad \mathbf{L}^0(\mathbf{u}^q) = -\mathbf{L}^1(\mathbf{u}^{q-1}), \quad q \geqslant 1.$$

Решение уравнений (8), (9) для любого точечного источника можно построить с помощью методики [3–5]. Оказывается, что векторы $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^1$, . . . выражаются через конечные комбинации элементарных функций, причем в случае сосредоточенной силы (6)

$$(10)\qquad \mathbf{u}^q(\mathbf{r}) = e^{ikr}\sum_{j=-3-4q}^{j=q}\mathbf{P}^{qj}(\mathbf{r}) + e^{i\kappa r}\sum_{j=-3-4q}^{j=q}\mathbf{Q}^{qj}(\mathbf{r}),\ q = 0, 1, \ldots,$$

где k и κ – волновые числа продольных и поперечных волн в изотропной среде $(\epsilon = 0)$:

$$k = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad \kappa = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

а функции $\mathbf{P}^{qj}$, $\mathbf{Q}^{qj}$ однородны степени j.

Особенности функций $\mathbf{u}^q$ в точке $\mathbf{r} = 0$, как можно показать, следуя [4, 5], не растут с номером.

Отсюда следует, что ряд (7) является асимптотическим решением задачи (3) при условии

$$(11)\qquad kr \ll \frac{1}{\epsilon}, \quad \kappa r \ll \frac{1}{\epsilon},$$

гарантирующем близость фронтов квазипродольной и квазипоперечных волн к сферам радиусов соответственно k^{-1} и κ^{-1}.

На расстояниях, где неравенства (11) не выполняются, структура поля существенно усложняется [1, 6].

Нетрудно показать, что для произвольного сосредоточенного в начале координат источника $\mathbf{F}$ члены ряда (7) имеют такую же (с точностью до добавления константы к пределам суммирования в (10)) структуру и, следовательно, ту же область пригодности.

3. В изотропной среде перемещение $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ имеет на больших расстояниях вид суммы продольной и поперечной сферических волн

$$(12)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = f\mathbf{s}A\cdot\left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right) + \{\mathbf{g} - (\mathbf{g}, \mathbf{s})\mathbf{s}\}B\cdot\left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right),$$

$$(13)\qquad kr \gg 1, \quad \kappa r \gg 1,$$

где

$$A = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad B = \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

а $f = f(\mathbf{s})$ и $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{s})$ — гладкие на единичной сфере функции угловых переменных — диаграммы направленности продольных и поперечных колебаний. Для центра расширения $\mathbf{g} \equiv 0$, для центра вращения $f \equiv 0$.

Из (7), (10) следует, что асимптотика вида (12) имеет место и в слабо анизотропной среде при дополнительном условии (11). Остаточные члены в (12) заменяются соответственно на $1 + O(1/kr) + O(\epsilon kr)$ и $1 + O(1/\kappa r) + O(\epsilon\kappa r)$.

Вычисление коэффициентов в асимптотике (12) для источников (4) и (5) при $\epsilon \neq 0$ удобнее производить, не обращаясь к задаче о сосредоточенной силе.

В случае источника (4)

$$(14) \quad \mathbf{u}^0 = C \operatorname{grad} A, \qquad C = (\lambda + 2\mu)^{-1},$$

откуда

$$(15) \quad L_i^1(\mathbf{u}^0) = C a_{ijmn}\, \partial_j \partial_m \partial_n A.$$

Для нахождения поправки $\mathbf{u}^1$ (а следовательно, и $\mathbf{g}$) достаточно заметить [4, 5], что векторы $\psi^{(t)}$, $t = 1, 2, 3$,

$$(16) \quad \psi_j^{(t)} = -\frac{1}{\rho\omega^2}\left\{(\kappa^2\delta_{tj} + \partial_t\partial_j)\frac{A - B}{k^2 - \kappa^2} + \partial_t\partial_j \frac{e^{ikr}}{2ik}\right\},$$

удовлетворяют уравнениям

$$(17) \quad \mathbf{L}^0(\psi^{(t)}) = \mathbf{e}_t A,$$

где $\mathbf{e}_t$ — орт оси x_t. Из (9), (14)–(17) легко получается представляющая интерес для сейсмики асимптотика (12) в случае центра расширения

$$(18) \quad f(\mathbf{s}) = ikC(1 + O(\epsilon));$$

$$(19) \quad g_p(\mathbf{s}) = i\epsilon\kappa C \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} a_{pjmn} s_j s_m s_n (1 + O(\epsilon)).$$

Функции (18) и (19) имеют одинаковую (линейную) зависимость от ω, поэтому спектральный состав продольных волн и поперечных, возбуждаемых за счет слабой анизотропии среды, в нестационарной задаче одинаков. Это качественно отличает анизотропию от плавной неоднородности [3, 4].

Аналогично, для источника (5)

$$f(\mathbf{s}) = -i\epsilon kD \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} a_{pjmn} s_p s_j s_m d_n (1 + O(\epsilon)),$$

$$D = \mu^{-1}, \quad \mathbf{d} = [\mathbf{s}, \mathbf{l}],$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = i\kappa D \mathbf{d}(1 + O(\epsilon)).$$

Автор признателен В.М. Бабичу, А.А. Вакуленко и А.П. Качалову за полезные замечания.

Научно-производственное объединение
"Рудгеофизика"
Ленинград

Поступило
22 XII 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Musgrave M.J.P.* Crystal acoustics. San Francisco, 1970. 280 p. 2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с. 4. *Киселев А.П.* — ДАН, 1974, т. 219, № 4, с. 829–831. 4. *Киселев А.П.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1975, т. 1, с. 6–27. 5. *Киселев А.П.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 99, с. 28–42. 6. *Matsumura M.* — Publ. RIMS Kyoto Univ., Ser. A, 1976, vol. 12, №2, p. 327–377.