Динь Зунг, Средняя ε-размерность класса функций $B_{G,p}$,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 727–736

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

СРЕДНЯЯ ε-РАЗМЕРНОСТЬ КЛАССА ФУНКЦИЙ $B_{G,p}$

Динь Зунг

1. Идея определить усредненные апроксимативные характеристики впервые была выдвинута К. Шенноном [1, стр. 330—332] для случайных процессов и А. Н. Колмогоровым [2] для функциональных классов. В [2] В. М. Тихомировым была вычислена ε-энтропия на единицу времени различных классов аналитических функций, в частности класса B_σ. В [3] было введено определение средней ε-размерности, предложенное В. М. Тихомировым, и вычислена величина средней ε-размерности классов $B_{G,2}$ и $\overline{W}_2^\alpha$. В этой работе доказано некоторое обобщение результата автора [3]. Перейдем к точным определениям.

Пусть X — нормированное пространство. $\mathfrak{M}_m$ — совокупность линейных многообразий в X размерности, не превосходящей m, A и B — подмножества в X. Величина

$$d_m(A, X) = \inf_{M \in \mathfrak{M}_m} E(A, M, X),$$

где

$$E(A, B, X) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_X,$$

называется m-мерным поперечником A в X по Колмогорову. Введем величину $K_\varepsilon(A, X)$, обратную к поперечнику по Колмогорову:

$$K_\varepsilon(A, X) = \inf\{m \mid \exists M \in \mathfrak{M}_m\colon E(A, M, X) < \varepsilon\}.$$

Величина $K_\varepsilon(A, X)$ характеризует необходимое число измерений линейного многообразия для приближения множества A с точностью до ε. Назовем ее ε-размерностью А.

Далее, пусть X — нормированное пространство функций, заданных на $\mathbf{R}^n$. Предположим, что для любой функции $x(\cdot) \in X$ функция $(T_\tau x)(t) = x(t+\tau)$ и $x^T(t) = x(t)\chi^T(t)$, где $\chi^T(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid |t_j| \leqslant T\}$, также принадлежат X. Обозначим через $\omega(\cdot, x(\cdot), X)$ модуль непрерывности функции $x(\cdot)$ в метрике X, Ω — совокупность всех модулей непрерывности. Для класса функций $W \subset X$ положим

$$K_\varepsilon^s(W, X) = \sup_{\omega \in \Omega} \limsup_{T \to \infty} K_\varepsilon((W \cap H_{\omega, X})^T, X^T)/(2T)^n,$$

$$K_\varepsilon^i(W, X) = \sup_{\omega \in \Omega} \liminf_{T \to \infty} K_\varepsilon((W \cap H_{\omega, X})^T, X^T)/(2T)^n,$$

где $W^T = \{x^T(\cdot) \mid x(\cdot) \in W\}$,

$$H_{\omega,X} = \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot)\|_X \leqslant 1,\ \omega(h, x(\cdot), X) \leqslant \omega(h),\ h \geqslant 0\} \quad (\omega \in \Omega),$$

Если две эти величины совпадают, то обозначим их через $\overline{K}_\varepsilon(W, X)$ и назовем средней ε-размерностью класса W. Если же для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, $\overline{K}_\varepsilon(W, X)$ не зависит от ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то назовем величину $\overline{K}_\varepsilon(W, X)$ средней размерностью W, а класс W — правильным.

Мы будем иметь дело с классами функций из пространства $\mathscr{L}_p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, поэтому не будем различать две функции, отличающиеся на множестве меры нуль. Далее будут использоваться следующие обозначения: (x, y) — скалярное произведение векторов x и y из $\mathbf{R}^n$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$ — длина вектора x, BX — единичный шар в нормированном пространстве X,

$$\|x(\cdot)\|_{X,T} = \|x^T(\cdot)\|_X,\quad \mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p(\mathbf{R}^n),$$

$$\|x(\cdot)\|_p = \|x(\cdot)\|_{\mathscr{L}_p},\quad \omega(\cdot, x(\cdot))_p = \omega(\cdot\ x(\cdot), \mathscr{L}_p),$$

$$H_{\omega,p} = H_{\omega, \mathscr{L}_p};$$

$$\square_\sigma = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid |t_j| \leqslant \sigma_j\},\quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),\ \sigma_j > 0$$

(если $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = T$, то $\square_\delta = \square_T$).

2. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^n$, $\sigma_j > 0$. Целая функция n комплексных переменных $x(\cdot)$ называется функцией экспоненциального типа σ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $a = a(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$|x(z)| \leqslant a \exp \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k + \varepsilon) |z_k|, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n.$$

Класс функций, ограниченных на $\mathbf{R}^n$, которые могут быть аналитически продолжены до целых функций экспоненциального типа σ, обозначим через B_σ, а пересечение B_σ с $\mathscr{L}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ через $B_{\sigma, p}$ $(B_{\sigma, \infty} = B_\sigma)$. По теореме Шварца

$$B_{\sigma, p} = \{x(\cdot) \in \mathscr{L}_p \mid \operatorname{supp} \hat{x}(\cdot) \subset \square_\sigma\},$$

где $\hat{x}(\cdot)$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$ в смысле обобщенных функций (см., например, [4, стр. 227]). В случае $p = 2$ этот результат составляет содержание классической теоремы Винера — Пэли. Определим более общий, чем $B_{\sigma, p}$, класс функций $B_{G, p}$ $(G \subset \mathbf{R}^n)$:

$$B_{G, p} = \{x(\cdot) \in \mathscr{L}_p \mid \operatorname{supp} \hat{x}(\cdot) \subset G\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Класс $B_{G, p}$ представляет значительный интерес в вопросах о приближении классов функций многих переменных. В приближении классов гладких функций, заданных на $\mathbf{R}^n$ подпространствами, средняя размерность которых задана, класс $B_{G, p}$ является экстремальным среди подпространств, средняя размерность которых равна $(2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G$.

3. Сформулируем некоторые вспомогательные факты.

Предложение 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $c = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j$. *Тогда*

$$\sup_{x(\cdot) \in B_{\sigma, p}} \omega(h, x(\cdot))_p \leqslant ch, \quad h \geqslant 0.$$

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из неравенства Гёльдера и неравенства Бернштейна, если $x(\cdot) \in B_{\sigma, p}$, то $\| \dot{x}(\cdot) \|_p \leqslant c \| x(\cdot) \|_p$ (см. [5, стр. 116]).

Предложение 2 (см. [5, стр. 123]). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_j > 0$. *Тогда существует константа* $c = c(h, \sigma, p) > 0$ *такая, что для любой* *функции* $x(\cdot)$ *из* $B_{\sigma,p}$ *выполняется неравенство*

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}^n} |x(kh)|^p \leqslant c\,\|x(\cdot)\|_p^p,$$

где $k=(k_1\ldots,k_n)\in\mathbf{Z}^n$, $kh=(k_1h_1,\ldots,k_nh_n)$.

Предложение 3 (см. [5, стр. 182]). *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\sigma=(1/h,\ldots,1/h)$, $h>0$. *Тогда существует константа* $c=c(\sigma,p)>0$ *такая, что для любой функции* $x(\cdot)$ *из* $\mathscr{L}_p$ *выполняется неравенство*

$$\inf_{y(\cdot)\in B_{\sigma,p}} \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_p \leqslant c\omega(h,x(\cdot))_p.$$

Предложение 4 (интерполяционная формула Картрайт). *Любая функция* $x(\cdot)$ *из* B_σ *может быть представлена в виде*

$$x(t)=\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}^n} x(k\Delta)\,\varphi_{\rho,k}(t),\qquad \rho>0,$$

где $\Delta=(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)=(\pi/(\sigma_1+\rho),\ldots,\pi/(\sigma_n+\rho))$, $k\Delta=(k_1\Delta_1,\ldots,k_n\Delta_n)$,

$$\varphi_{\rho,k}(t)=\prod\nolimits_{j=1}^{n}\frac{\sin\rho(t_j-k_j\Delta_j)\sin(\sigma_j+\rho)(t_j-k_j\Delta_j)}{\rho(\sigma_j+\rho)(t_j-k_j\Delta_j)^2}.$$

Для функций одного переменного формула Картрайт выводится с помощью теоремы Фрагмена — Линделефа (см., например, [6]). Для функций многих переменных она может быть получена методом индукции по числу переменных.

Предложение 5. *Пусть* L — *m-мерное подпространство в нормированном пространстве* X. *Тогда*

$$d_{m-1}(\varepsilon(L\cap BX),X)=\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Это утверждение принадлежит В. М. Тихомирову [7].

Говорят, что функция $\psi(\cdot)$ является мультипликатором в $\mathscr{L}_p$, если существует константа $c=c(p,\psi)>0$ такая, что для любой функции $x(\cdot)$ из $\mathscr{L}_p$ выполняется неравенство

$$\|(\widetilde{\tilde{x}\psi})(\cdot)\|_p\leqslant c\,\|x(\cdot)\|_p,$$

где $\tilde{g}(\cdot)$ — обратное преобразование Фурье $g(\cdot)$ в смысле обобщенных функций.

Предложение 6 (см., например, [8]). *Характеристическая функция множества* $\xi+\square_\sigma$ $(\xi\in\mathbf{R}^n)$ $\chi_{\xi+\square_\sigma}(\cdot)$ *является мультипликатором в* $\mathscr{L}_p$, $1<p<\infty$.

4. Прежде чем сформулировать теорему, касающуюся правильности и средней ε-размерности класса $B_{G,p}$, докажем одну предварительную лемму.

ЛЕММА. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$,

$$G = \bigcup_{j=1}^{s} (\xi^j + \square_\alpha),$$

$$\mathrm{int}\,(\xi^j + \square_\alpha) \cap \mathrm{int}\,(\xi^{j'} + \square_\alpha) = \phi, \quad j' \neq j,$$

$$\delta = \pi/(\alpha - \rho), \; 0 < \rho < \alpha,$$

$N\delta < T$ *и* L — *линейное подпространство в* $\mathcal{L}_p$, *натянутое на функции* $\exp\{i(\xi^j \mid t)\}\, \varphi_{-\rho,k}(t)$, $k \in \square_N$, $j = 1, \ldots, s$. *Тогда* $L \subset B_{G,p}$ *и для любой функции* $x(\cdot)$ *из* L *имеет место следующая оценка*:

$$\| x(\cdot) \|_{p,T}^p = \| x(\cdot) \|_p^p \,(1 - R(T, N)),$$

где

$$R(T, N) = cN^{p-1}/(T - N\delta)^{2p-1}, \; c = c(\alpha, \rho, p) > 0.$$

Доказательство. Включение $L \subset B_{G,p}$ непосредственно вытекает из определения. Пусть

$$x(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k \in \square_N} x_{jk} \exp\{i(\xi^j \mid t)\}\, \varphi_{-\rho,k}(t) = \\ = \sum_{j=1}^{s} \exp\{i(\xi^j \mid t)\}\, x_j(t).$$

Рассмотрим сначала случай функции одного переменного. Пользуясь неравенством Гёльдера, равенством $x_j(k\delta) = x_{jk}$ и предложением 2, мы получим, что

$$\int_T^\infty |x_j(t)|^p\, dt = \int_T^\infty \left| \sum_{|k| \leqslant N} x_{jk} \varphi_{-\rho,k}(t) \right|^p dt \leqslant \\ \leqslant \int_T^\infty \left(\sum_{|k| \leqslant N} |x_{jk}|^p \right) \left(\sum_{|k| \leqslant N} |\varphi_{-\rho,k}(t)|^q \right)^{p/q} dt \leqslant \\ \leqslant c_1 \| x_j(\cdot) \|_p^p \int_T^\infty \left(\sum_{|k| \leqslant N} |\varphi_{-\rho,k}(t)|^q \right)^{p/q} dt \leqslant \\ \leqslant c_2 \| x_j(\cdot) \|_p^p \int_T^\infty \left(\frac{N}{(t - N\delta)^{2q}} \right)^{p/q} dt = \\ = c_2 \| x_j(\cdot) \|_p^p N^{p-1} \int_T^\infty \frac{dt}{(t - N\delta)^{2p}} \leqslant c_3 \| x_j(\cdot) \|_p^p \frac{N^{p-1}}{(T - N\delta)^{2p-1}}.$$

Здесь $1/p + 1/q = 1$ и c_1, c_2, c_3 — константы, не зависящие от $x(\cdot)$. Такую же оценку можно получить для интеграла $\int_{-\infty}^{-T} |x_j(\cdot)|^p \, dt$. Итак, для функций одного переменного имеет место следующее неравенство:

$$\int_{|t|>T} |x_j(t)|^p \, dt \leqslant c_4 \frac{N^{p-1}}{(T-N\delta)^{2p-1}} \| x_j(\cdot) \|_p^p, \qquad j=1,\ldots,s.$$

Пусть теперь $x(t)$ — функция n переменных, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Тогда функции от t_k

$$x_j^k(t_k) = \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |x_j(t)|^p \, dt_1, \ldots dt_{k-1} \, dt_{k+1} \ldots dt_n\right)^{1/p},$$

$$k=1,\ldots,n; \quad j=1,\ldots,s$$

принадлежат классу $B_{\alpha,p}$ и $\| x_j^k(\cdot) \|_p \leqslant 2^{n-1} \| x_j(\cdot) \|_p$ (см. [5, стр. 130]). В силу неравенства для интеграла $\int_{|t|>T} |x_j(t)|^p \, dt$ для функции одного переменного получим, что

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus \square_T} |x_j(t)|^p \, dt \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{|t_k|>T} |x_j(t)|^p \, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{|t_k|>T} |x_j^k(t_k)|^p \, dt_k \leqslant c_5 \frac{N^{p-1}}{(T-N\delta)^{2p-1}} \| x_j(\cdot) \|_p^p.$$

Из предложения 6 вытекает, что $\| x_j(\cdot) \|_p \leqslant c(p) \| x(\cdot) \|_p$. Отсюда получим нужную оценку. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $1 < p < \infty$, $G \subset \mathbf{R}^n$ — *измеримое по Жордану множество. Тогда класс* $B_{G,p}$ *правильный и при этом*

$$\overline{K}_\varepsilon(B_{G,p}, \mathscr{L}_p) = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G, \ 0 < \varepsilon < 1.$$

В [2] В. М. Тихомировым фактически было доказано, что $\overline{K}_\varepsilon(B_\sigma, \mathscr{L}_\infty(R)) = \frac{\sigma}{\pi}$. В [3] автором была получена эта теорема для $p = 2$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma = (\alpha, \ldots, \alpha)$, $\alpha > 0$, $G = \bigcup_{j=1}^s (\xi^j + \square_\alpha)$,

$$\operatorname{int}(\xi^j + \square_\alpha) \cap \operatorname{int}(\xi^{j'} + \square_\alpha) = \phi, \ j' \neq j.$$

Оценка снизу. Поскольку G ограничено, то вследствие предложения 1 $B_{G,p} \cap B\mathscr{L}_p \subset H_{\omega,p}$, где $\omega(h) = ah$, $a > 0$. Для $T > 0$ положим $N = \frac{1}{\delta}(T - T^{1-\beta})$, $0 < \beta < p/(2p-1)$, $\delta = \pi/(\alpha - \rho)$, $0 < \rho < \alpha$. Пусть $x(\cdot) \in L \subset B_{G,p}$,

$\| x(\cdot) \|_{p,T} \leqslant 1$, где L — подпространство, определяемое в предыдущей лемме. Из леммы вытекает, что $\| x(\cdot) \|_p = 1 + a(T)$, где $a(T) \to \infty$ при $T \to \infty$. Отсюда получим, что для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для $T \geqslant T_0$

$$\varepsilon (L^T \cap B\mathscr{L}_p^T) \subset (L \cap B\mathscr{L}_p)^T.$$

Из предложения 5 вытекает, что

$$d_{m-1}((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathscr{L}_p^T) \geqslant d_{m-1}((L \cap B\mathscr{L}_p)^T, \mathscr{L}_p^T) \geqslant$$
$$\geqslant d_{m-1}(\varepsilon (L^T \cap B\mathscr{L}_p^T), \mathscr{L}_p^T) = \varepsilon,$$

где m — размерность L. Поскольку $m > s(2N-1)^n$, то

$$K_\varepsilon ((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathscr{L}_p^T) \geqslant s(2N-1)^n =$$
$$= (2T)^n s (2\alpha - 2\rho)^n/(2\pi)^n + o(T^n).$$

Следовательно,

$$K_\varepsilon^i (B_{G,p}, \mathscr{L}_p) \geqslant s(2\alpha - 2\rho)^n/(2\pi)^n.$$

В силу произвольности $\rho > 0$ имеем

$$K_\varepsilon^i (B_{G,p}, \mathscr{L}_p) \geqslant s(2\alpha)^n / (2\pi)^n = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G,$$
$$0 < \varepsilon < 1.$$

Оценка сверху. Пусть $x(\cdot) \in B_{G,p}$, $\| x(\cdot) \|_p \leqslant 1$. Из определения и предложения 6 вытекает, что

$$x(t) = \sum_{j=1}^s \exp\{i(\xi^j \mid t)\} x_j(t), \quad \| x_j(\cdot) \|_p \leqslant c_1, \quad j = 1, \ldots, s,$$

где $x_j(\cdot) \in B_{\sigma,p}$ и константа c_1 не зависит от $x(\cdot)$. Пусть $T > 0$, $N\delta > T$, $\delta = \pi/(\alpha + \rho)$, $\rho > 0$, $\Delta = (\delta, \ldots, \delta)$. Проделав несложные выкладки с использованием предложений 2 и 4 неравенства Гёльдера, мы получим, что

$$\int_{\square_T} \left| x(t) - \sum_{j=1}^s \sum_{k \in \square_N} x_j(k\Delta) \exp\{i(\xi^j \mid t)\} \varphi_{\rho,k}(t) \right|^p dt =$$
$$= \int_{\square_T} \left| \sum_{j=1}^s \sum_{k \in \mathbf{Z}^n \setminus \square_N} x_j(k\Delta) \exp\{i(\xi^j \mid t)\} \varphi_{\rho,k}(t) \right|^p dt \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \frac{T}{(N\delta - T)^{p+1}},$$

где константа c_2 не зависит от $x(\cdot)$. Отсюда следует, что

$$E^p((B_{G,p} \cap B\mathscr{L}_p)^T, M^T, \mathscr{L}_p^T) \leqslant c_2 T/(N\delta - T)^{p+1},$$

где M — подпространство в $\mathscr{L}_p$, натянутое на функции $\exp\{i(\xi^j \mid t)\}\varphi_{\zeta,k}(t)$, $k \in \square_N$, $j = 1, \ldots s$. Для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1$, найдем N из равенства $c_2 T / (N\delta - T)^{p+1} = \varepsilon^p$. Так как размерность M не превосходит $s(2N+1)^n$, то для любого модуля непрерывности $\omega(\cdot)$ имеем

$$K_\varepsilon((B_{G,p} \cap H_{\omega,p})^T, \mathscr{L}_p^T) \leqslant K_\varepsilon((B_{G,p} \cap B\mathscr{L}_p)^T, \mathscr{L}_p^T) \leqslant \leqslant s(2N+1)^n = (2T)^n (2\alpha + 2\rho)^n / (2\pi)^n + o(T^n).$$

Следовательно,

$$K_\varepsilon^s(B_{G,p}, \mathscr{L}_p) \leqslant s(2\alpha + 2\rho)^n / (2\pi)^n$$

для произвольного $\rho > 0$, т. е. справедливо следующее неравенство:

$$K_\varepsilon^s(B_{G,p}, \mathscr{L}_p) \leqslant s(2\alpha)^n / (2\pi)^n = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

б) Пусть G — произвольное ограниченное множество. Тогда существуют множества G' и G'' рассматриваемого в п. а) вида такие, что $G' \subset G \subset G''$ и мера $G'' \setminus G'$ сколько угодно мала. Из включений $B_{G',p} \subset B_{G,p} \subset B_{G'',p}$ и доказанного вытекает утверждение теоремы для G.

в) Пусть G — неограниченное множество. Положим

$$G_k = \{\tau \in G \mid |\tau| \leqslant k\}.$$

Оценка снизу. По доказанному в п. б) имеем

$$K_\varepsilon^i(B_{G,p}, \mathscr{L}_p) \geqslant \overline{K}_\varepsilon(B_{G_k,p}, \mathscr{L}_p) = = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G_k, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

При $k \to \infty$ получим такую оценку:

$$K_\varepsilon^i(B_{G,p}, \mathscr{L}_p) = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Оценка сверху. Пусть $\varphi(\cdot)$ — неотрицательная четная функция одного переменного из класса $B_{1,1}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathrm{R}^n} \varphi(|t|)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \int_0^\infty \varphi(\xi)(1+\xi)\,\mathrm{d}\xi < \infty$$

(такая функция, очевидно, существует). Далее, для функции из $\mathscr{L}_p$ положим

$$x_k(t) = k^n \int_{\mathrm{R}^n} x(t-\theta)\,\varphi(k|\theta|)\,\mathrm{d}\theta.$$

Легко проверить, что

$$\| x_k(\cdot) \|_p \leqslant \| x(\cdot) \|_p, \quad \| x(\cdot) - x_k(\cdot) \|_p \leqslant \leqslant c\omega (1/k, \ x(\cdot))_p,$$

где константа c не зависит от $x(\cdot)$. Пусть теперь $\omega(\cdot)$ — произвольный модуль непрерывности и $x(\cdot) \in B_{G, p} \cap H_{\omega, p}$. Тогда $x_k(\cdot) \in B_{Gk, p}$ и $\| x(\cdot) - x_k(\cdot) \|_p \leqslant c\omega(1/k)$. Отсюда следует, что

$$E(B_{G, p} \cap H_{\omega, p}, \ B_{Gk, p} \cap B\mathscr{L}_p, \ \mathscr{L}_p) \leqslant c\omega(1/k).$$

С другой стороны, в силу предложения 1 получим, что $B_{Gk, p} \cap B\mathscr{L}_p \subset H_{\omega_k, p}$, где $\omega_k(h) = ah$, $a = a(p, k) > 0$.

Из доказанного в п. б) вытекает, что для заданного $\varepsilon > 0$

$$K_{\varepsilon/2}((B_{G_k, p} \cap B\mathscr{L}_p)^T, \mathscr{L}_p^T) \leqslant (2T)^n \operatorname{mes} G/(2\pi)^n + o(T^n) = m(T).$$

Последнее неравенство означает, что для некоторого подпространства $L \subset \mathscr{L}_p^T$ размерности $m(T)$ имеет место неравенство

$$E((B_{G_k,p} \cap B\mathscr{L}_p)^T, \ L^T, \ \mathscr{L}_p^T) \leqslant \varepsilon/2.$$

Выбрав k достаточно большим, чтобы выполнилось неравенство $c\omega(1/k) \leqslant \varepsilon/2$, мы получим, что

$$E((B_{G, p} \cap H_{\omega, p})^T, \ L^T, \ \mathscr{L}_p^T) \leqslant \leqslant E(B_{G, p} \cap H_{\omega, p}, \ B_{G_k, p} \cap B\mathscr{L}_p, \ \mathscr{L}_p) + E((B_{Gk, p} \cap B\mathscr{L}_p)^T, L^T, \mathscr{L}_p^T) \leqslant \varepsilon.$$

А это означает, что

$$K_\varepsilon((B_{G, p} \cap H_{\omega, p})^T, \ \mathscr{L}_p^T) \leqslant (2T)^n \operatorname{mes} G/(2\pi)^n + o(T^n)$$

и, следовательно,

$$K_\varepsilon^s(B_{G, p}, \ \mathscr{L}_p) \leqslant (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} G.$$

Теорема полностью доказана.

Автор благодарит В. М. Тихомирова за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 19.IV.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетики, М., ИЛ, 1963.

[2] К о л м о г о р о в А. Н., Т и х о м и р о в В. М., ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи матем. наук, 14, № 2 (1959), 3—86.

[3] Д и н ь З у н г, Аппроксимативные характеристики классов гладких функций на $\mathbf{R}^n$ в метрике $\mathscr{L}_2$, Канд. диссертация, М., МГУ, 1978.

[4] И о с и д а К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.

[5] Н и к о л ь с к и й С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.

[6] Т и м а н А. Ф., Теория приближений функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.

[7] Т и х о м и р о в В. М., Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений, Успехи матем. наук, 15, № 3 (1960), 81—120.

[8] Л и з о р к и н П. И., Теорема типа Литтльвуда — Палея для кратных интегралов Фурье, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 89 (1967), 214—230.