



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Трушин, М. М. Хапаев, Г. В. Шолин, Применение методов теории сингулярно возмущенных систем к анализу условия вмороженности магнитного поля в электронную жидкость, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1990, том 31, выпуск 4, 3–10

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

17 марта 2025 г., 07:08:17



УДК 533.951

С. А. Трушин, М. М. Хапаев, Г. В. Шолин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ К АНАЛИЗУ
УСЛОВИЯ ВМОРОЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ЭЛЕКТРОННУЮ ЖИДКОСТЬ

В теории плазмы важное место занимает двухжидкостная магнитогидродинамическая модель [1—3]. Особенно полезной такая модель оказывается при исследовании движений плазмы в скрещенных $E \times H$ полях. Для этого случая имеется достаточно надежное обоснование применимости гидродинамических уравнений и получен ряд решений для нелинейных волновых движений. Большинство решений нелинейных уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики основано на использовании упрощающих предположений типа свойств квазинейтральности ($n_e = n_i$) или в замороженности ($n_e/B = \text{const}$), справедливость которых, как правило, не анализируется. Достаточным критерием для справедливости приближения квазинейтральности считается выполнение неравенства $\mu \ll 1$ ($\mu = \omega_{Be}/\omega_{pe}$, где $\omega_{Be} = |e| B_0/m_e c$ — электронная циклотронная, а $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_e}$ — ленгмюровская частоты). В обратном предельном случае ($\mu \gg 1$) используют условие в замороженности.

Обращение к свойствам квазинейтральности, или в замороженности, позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений. При этом неизбежно отбрасываются члены с малыми параметрами при старших производных. С математической точки зрения попытка учета отброшенных членов означает внесение сингулярных возмущений, на что впервые было обращено внимание в [4, 5]. В [6—10] показано, что квазинейтральность нельзя считать универсальным свойством плазмы при $\mu \ll 1$: поле разделения зарядов может потерять устойчивость, и в плазме разовьются колебания, амплитуда которых соответствует почти полному разделению зарядов на масштабах, значительно меньших масштаба внешнего возмущения. Развившиеся стационарные колебания могут существенно повлиять на характер изменения медленных переменных, описывающих плазму [4, 6, 8]. Таким образом, детальный анализ уравнений для переменных с наименьшим масштабом изменения должен предшествовать как аналитическому, так и численному решению гидродинамических уравнений плазмы.

В настоящей работе методы теории сингулярно возмущенных систем применены для анализа свойства в замороженности электронов ($n_e/B = \text{const}$) для плазмы, в которой $\mu \gg 1$. Основная цель — предложить математический аппарат, который позволил бы получать стационарные решения в том случае, когда условие в замороженности может не выполняться, а плотность и скорость электронов в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению распространения волны, совершают колебания с частотой порядка электронной циклотронной.

Рассмотрим прямую магнитозвуковую волну конечной амплитуды. Будем описывать ее в рамках уравнений двухжидкостной бесстолкновительной магнитной гидродинамики, условием применимости которой является выполнение соотношения $l \gg \rho$ (l — характерный масштаб пространственного изменения гидродинамических величин, ρ — ларморовский радиус электронов) [11]. Используем систему координат с осью Oz , направленной вдоль магнитного поля \mathbf{B} . Считаем, что все величины зависят только от координаты x , магнитозвуковая волна распространяется вдоль оси Ox . Решение волнового типа ищется зависящим от переменной $\zeta = x - ut$. Тогда система уравнений Максвелла вместе с уравнениями движения и непрерывности для электронов и ионов запишется как

$$\begin{aligned} (1) \quad & E_y = (u/c)(B - B_0); \\ (2) \quad & dE_x/d\zeta = 4\pi |e| (n_i - n_e); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & -\gamma^2 dB/d\xi = 4\pi |e| (n_i v_{iy} - n_e v_{ey})/c; \\
(4) \quad & m_{e,i} n_0 u dv_{e,ix}/d\xi = dp_{e,i}/d\xi \pm |e| n_{e,i} (E_x + v_{e,iy} B/c); \\
(5) \quad & m_{e,i} n_0 u dv_{e,iy}/d\xi = \pm |e| n_{e,i} (E_y - v_{e,ix} B/c); \\
(6) \quad & n_{e,i} = n_0 u / (u - v_{e,ix})
\end{aligned}$$

(n_0 и B_0 — невозмущенные значения плотности частиц и магнитного поля, $\gamma = \sqrt{1 - (u/c)^2}$). В (1)–(6) предполагается, что в невозмущенном состоянии при $\xi \rightarrow +\infty$ гидродинамические движения отсутствуют: $v_{e,i}(+\infty) = 0$. Тем самым не учитываются отклонения от равновесия при $\xi \rightarrow +\infty$, вызванные тепловыми шумами собственных колебаний плазмы. Как и в [11, 12], в уравнениях (1)–(6) пренебрегается явлениями, связанными с конечностью ларморовского радиуса заряженных частиц (магнитной вязкостью), поскольку $l \gg \rho$, а также столкновительным трением. Применяя к системе (1)–(6) процедуру, описанную в [8], сведем ее при $\mu \gg 1$ к следующей:

$$\begin{aligned}
(7) \quad & (M \sqrt{\varepsilon/\mu}) dY/d\xi = F(X, Y, b, Z)/Q(X, Y, b, Z); \\
(8) \quad & (M \sqrt{\varepsilon/\mu}) dZ/d\xi = b - \tilde{n}; \\
(9) \quad & M \sqrt{\varepsilon\mu} dX/d\xi = Y; \\
(10) \quad & (\gamma^2/M \sqrt{\varepsilon\mu}) db/d\xi = Z(\tilde{n} + \varepsilon n) - X n \varepsilon \mu^2,
\end{aligned}$$

где $\xi = \zeta \omega_{pe}^2 / c \omega_{Be}$; $X = E_x / M \sqrt{\varepsilon\mu} B_0$; $b = B/B_0$; $n = n_i/n_0$; $\tilde{n} = n_e/n_0$ ($\tilde{n} = n - Y$); $M = u/v_A$ ($v_A^2 = B_0^2/4\pi n_0 m_i$); $\varepsilon = m_e/m_i$; $Q(X, Y, b, Z) = 1 - \beta \tilde{n}^2$; $\beta = T_e/m_e u^2$; $F(X, Y, b, Z) = -X[\tilde{n}^3 + \varepsilon Q(X, Y, b, Z)n^3(1 + b\varepsilon\mu^2)] - bZ[\tilde{n}^3 - \varepsilon^2 Q(X, Y, b, Z)n^3]$. При этом система (7)–(10) дополняется алгебраическим уравнением, связывающим переменные n и \tilde{n} [8]:

$$(11) \quad \varepsilon(1 - 1/\tilde{n}) + 1 - 1/n = (\tilde{n} - 1)\varepsilon\beta + [\gamma^2(b^2 - 1) - M^2\varepsilon\mu^2 X^2]/2M^2.$$

При получении (7)–(11) сделано единственное допущение: $T_i = 0$, $T_e = \text{const}$, причем в силу наложенных на систему (1)–(6) ограничений в дальнейшем считаем $\beta \ll 1$.

Решение системы (7)–(11) ищется для $\xi \rightarrow -\infty$ при дополнительных условиях. Для переменных b и X ставятся граничные условия в области $\xi \rightarrow +\infty$, куда еще не дошла магнитозвуковая волна: $b(+\infty) = 1$, $X(+\infty) = 0$. Что касается переменных Z и Y , то из физических соображений потребуем при $\xi \rightarrow +\infty$ только близости величин $Z(+\infty)$ и $Y(+\infty)$ к их равновесным значениям: $Z_{\text{равн}} = 0$ и $\tilde{n}_{\text{равн}} = b_{\text{равн}} = 1$. Более определенное их задание невозможно. В алгебраическом выражении (11), которое можно рассматривать как уравнение для плотности ионов, переходу к невозмущенному состоянию $n(+\infty) = 1$ при учете, что $\beta \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$, отвечает корень $n = 2M^2/[2M^2 + \gamma^2(1 - b^2) + M^2\varepsilon\mu^2 X^2]$. Ограничимся случаем не слишком сильных волн, для которых число Альвена — Маха $M \leq 2,76$ [3] и явления «сгребания» или «отражения» ионов не возникают. При этом совокупность уравнений (7)–(11) с дополнительными условиями при $\xi \rightarrow +\infty$ относится к классу сингулярно возмущенных систем [13, 14], так как в системе (7)–(10) при производных имеются малые параметры $M \sqrt{\varepsilon/\mu} \ll M \sqrt{\varepsilon\mu} < 1$ (отметим, что $\mu \gg 1$, но в силу $u/c < 1$ $M \sqrt{\varepsilon\mu} < 1$).

Система (7)–(11) в общих чертах совпадает с соответствующими уравнениями из [4, 10], полученными для $\mu \ll 1$. В отличие от [4, 10] при $\mu \gg 1$, исходя из требования представительности системы (7)–(10) (возможность выразить быстрые переменные через медленные тогда, когда малый параметр формально устремляется к нулю [13, 14]), в качестве быстрой подсистемы с самым малым параметром при производных необходимо рассматривать уравнения для Y и Z , в то время как при $\mu \ll 1$

малый параметр при производных появлялся в уравнениях для X и Y . Второе принципиальное отличие от [4, 10] — уравнение для магнитного поля — отдельно не выделяется. Для записи анализируемых уравнений в стандартной форме [15] при условии ограниченности производных медленных переменных необходимо использовать переменную Z (10), а не $\alpha = db/d\xi$, как в [4, 6–10]*.

При анализе уравнений (7)–(11) методами теории сингулярно возмущенных систем [13, 14] необходимо прежде всего рассмотреть вырожденную систему, которая получается, если в (7)–(11) формально положить $M\sqrt{\varepsilon/\mu} = 0$ и считать $M\sqrt{\varepsilon\mu} \neq 0$:

$$(12) \quad F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z}) = 0, \quad (Q(X, Y, b, Z) \neq 0);$$

$$(13) \quad \bar{n} - \bar{b} = 0;$$

$$(14) \quad M\sqrt{\varepsilon\mu} d\bar{X}/d\xi = \bar{Y};$$

$$(15) \quad (\gamma^2/M\sqrt{\varepsilon\mu}) d\bar{b}/d\xi = \bar{Z}\bar{n} - \bar{X}\bar{n}\varepsilon\mu^2;$$

$$(16) \quad \bar{n} = 2M^2/[2M^2 + \gamma^2(1 - \bar{b}^2) + M^2\varepsilon\mu^2\bar{X}^2].$$

В (12)–(16) для простоты изложения опущены члены, содержащие параметр ε , так как $\varepsilon \ll M\sqrt{\varepsilon\mu} < 1$. Согласно (13), условию в замороженности отвечает переход от системы (7)–(11) к вырожденной системе (12)–(16), которая дает все известные результаты по структуре магнитогидродинамических ударных волн [12]. В самом деле, полагая $\bar{X} = -(d\varphi/d\xi)/M\sqrt{\varepsilon\mu}$ и учитывая, что $(u/c)^2 \ll 1$, из (12)–(16) легко вывести уравнение для φ :

$$(17) \quad d^2\varphi/d\xi^2 = \varphi + 1 - \bar{n},$$

которое по внешнему виду совпадает с соответствующим уравнением из [12], полученным в предположениях $\mu \gg 1$, $u/c < 1$. Однако в (17) $\bar{n} \approx 2M^2/[1 + 2M^2 - (1 + \varphi)^2]$, в то время как в [12] из-за нереупрощения уравнения движения ионов их плотность выражается несколько иначе, что, впрочем, существенно не влияет на поведение функции $\varphi = \varphi(\xi)$. Из анализа уравнения (17) следует, что при изменении ξ от $+\infty$ до $-\infty$ знак \bar{X} меняется с $+$ на $-$ [12].

Возможность использования (12)–(16) вместо (7)–(11) зависит от асимптотической устойчивости присоединенной системы [13, 14] в окрестности выбранного корня ($\bar{Z} = \bar{Z}(\bar{X}, \bar{b})$; $\bar{Y} = \bar{Y}(\bar{X}, \bar{b})$). Запишем присоединенную систему

$$(18) \quad (M\sqrt{\varepsilon/\mu}) d\bar{Y}/d\xi = F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z})/Q(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z});$$

$$(19) \quad (M\sqrt{\varepsilon/\mu}) d\bar{Z}/d\xi = \bar{b} - (\bar{n} - \bar{Y}),$$

в которой переменные \bar{X} и \bar{b} рассматриваются как параметры. Асимпто-

* Поведение быстрых переменных сказывается на характере изменения медленных [13, 14], которые, согласно процедуре решения сингулярно возмущенных уравнений [18], при осцилляторном характере изменения быстрых переменных заменяются на некоторые средние. В качестве быстрых естественно выбирать такие физические величины, которые могут быть измерены в эксперименте локально. В качестве медленных — те, которые измеряются усредненными. В этом случае результаты теории могут быть поставлены в соответствие эксперименту. Кроме того, если точка равновесия для быстрых переменных окажется неустойчивой [19], то при наличии ограничивающих кривых (только тогда можно построить решение) и возможного выхода решения на них система (7)–(10) должна остаться представительной [13, 14] и переменные, выбранные в начальный момент в качестве медленных, должны при выходе на ограничивающие кривые такими и остаться. Согласно [4, 7, 10], при $\mu \ll 1$ имеется особое многообразие $Q = 0$, которое, как было показано в [10], обладает притягивающими свойствами. Следовательно, выбор в качестве медленных переменных (b, α) неправилен и нужно рассматривать переменные (b, Z). В результате критерий асимптотической устойчивости, полученный в [10] для выполнения условия квазинейтральности ($n_e = n_i$), выполнен при $Z > 0$, т. е. при $db/d\xi > 0$.

тическая устойчивость имеет место, если корни системы $F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z}) = 0$ и $\bar{b} - \bar{n} = 0$, отвечающие точке равновесия ($\bar{Z} = \bar{Z}(\bar{X}, \bar{b})$, $\bar{Y} = \bar{Y}(\bar{X}, \bar{b})$) присоединенной системы (18), (19), обладают при $\xi \rightarrow -\infty$ свойствами устойчивых узла или фокуса. Точка равновесия (\bar{Z}, \bar{Y}) оказывается центром. В связи с этим воспользуемся результатами [16], где условие асимптотической устойчивости системы (18), (19) заменяется условием устойчивости при дополнительном предположении о существовании и положительности среднего от производной функции Ляпунова (ищем решение при $\xi \rightarrow -\infty$), где среднее вычисляется вдоль интегральных кривых системы (18), (19). Введем в системе (7)–(10) медленную координату $\tau = \xi\mu/M\sqrt{\varepsilon}$ и сделаем замену переменных $Y = Y_0 + u$, $Z = Z_0 + v$, где $(Y_0; Z_0)$ — корень системы (12), (13). В результате с точностью до членов порядка $1/\mu^2$, ε и β получим

$$(20) \quad \begin{aligned} du/d\tau = & -vb(b-u)^3 - \varepsilon n^3 X [1 - ((b-n)/b)^3] - \\ & - (Y_0 + u)(dn/dX)/\mu^2 + (1 - dn/db)(-X/b + v)(b-u)(M^2\varepsilon/\gamma^2) - \\ & - \beta v\Phi(u, b, X); \end{aligned}$$

$$(21) \quad dv/d\tau = u + (Y_0 + u)/\mu^2 b - (M^2\varepsilon/\gamma^2)(X/b^2)(v - X/b)(b-u);$$

$$(22) \quad dX/d\tau = (n - b + u)/\mu^2;$$

$$(23) \quad db/d\tau = (M^2\varepsilon/\gamma^2)(v - X/b)(b-u).$$

Здесь $\Phi(u, b, X)$ — некоторая функция, конкретный вид которой неважен, так как в критерий устойчивости она, как будет видно в дальнейшем, не входит. Функцию Ляпунова \mathcal{V}_0 введем исходя из интеграла движения системы (20)–(23) в приближении $\varepsilon = \beta = 1/\mu^2 = 0$:

$$\mathcal{V}_0 = (b/2)v^2 - (b-2u)/2(b-u)^2 + 1/2b.$$

Продифференцируем \mathcal{V}_0 в силу системы (20)–(23):

$$(24) \quad \begin{aligned} d\mathcal{V}_0/d\tau = & \kappa(u, v, b, X) \\ \kappa(u, v, b, X) = & (Y_0 + u)v/\mu^2 - \beta v\Phi(u, b, X)u/(b-u)^3 - \\ & - (\varepsilon M^2/\gamma^2)[v(X/b)(v - X/b)(b-u) + n^3 X(b^3 - \\ & - (b-u)^3)(u/(b-u)^3)/b^3 M^2 + (n^2 b - 1)(v - \\ & - X/b)(b-u)(u/(b-u)^3) - XY_0 n^2 u/(b-u)^2 M^2]. \end{aligned}$$

Выражение (24) получено в первом исчезающем приближении с точностью до членов порядка ε , β и $1/\mu^2$. Согласно [16], решение системы (7)–(10) близко к решению системы (12)–(16) при выполнении неравенства

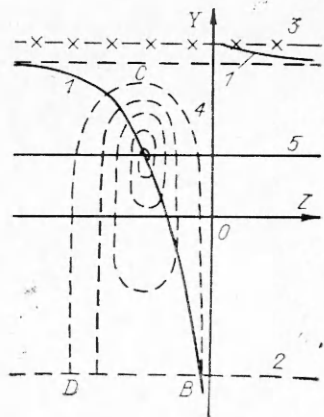
$$(25) \quad L = \int_0^T \kappa(u, v, b, X) d\tau > 0 \quad (T \gg 1).$$

Интеграл в (25) вычисляется при фиксированных b и X вдоль решения системы (20), (21). Приближенно найти L можно исходя из того, что точка покоя системы (18), (19) является центром, поэтому, полагая $u \approx |a| \sin \tau$, $v \approx -|a| \cos \tau$ ($|a|$ — амплитуда изменения быстрых переменных, причем $|a| \ll 1$), с точностью до членов $\sim a^2$ имеем

$$(26) \quad L = -(M^2\varepsilon/\gamma^2)(X/b)(a^2/2)(1 + 8M^4(bn + 1)/nb).$$

Условие (25) гарантирует близость решения системы (7)–(10) к решению вырожденной системы (12)–(16), когда параметры \bar{M} , \bar{V} , ε и $1/\mu$ имеют одинаковый порядок величины [16]. Согласно (25), (26), приближение вырожденности оправдано для $X < 0$ (из (12)–(16) следует, что это участок «спадания» b при $\tau \rightarrow -\infty$). При $X > 0$ это приближение, вообще говоря, может оказаться несправедливым и потребуются дополнительный анализ. На рисунке представлена фазовая плоскость (Z, Y) , качественно

отображающая основные особенности быстрой подсистемы (7), (8) при $\beta b^2 \ll 1$. По физическому смыслу движению по кривой $F(X, Y, b, Z) = 0$ (линия 1) соответствует дрейфовый характер y -составляющей электронного тока. Кривая $Q(X, Y, b, Z) = 0$ определяет особое многообразие, на котором происходит перемена знака правой части уравнения для Y , на ней тепловой поток электронов сравнивается с гидродинамическим: $n_e v_{Te} = n_0 u$ ($v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$) и достигается максимально возможная синхронность колебаний частиц. Особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ играет такую же роль в сингулярно возмущенных системах, как и устойчивые корни вырожденных уравнений [5]. Штриховая линия 4 на рисунке — траектория системы, 5 — линия, на которой выполнено условие вмороженности ($\tilde{n} = b$), линия 3 — $\tilde{n} = 0$.



Поскольку у вырожденной системы (12)—(16) нельзя указать других алгебраических корней, обладающих свойством устойчивости в области $X > 0$, к которым бы могло устремиться решение, необходим анализ на фазовой плоскости всех особенностей системы (7)—(10). Движение интегральной кривой подсистемы (7), (8) определяется тремя режимами в зависимости от соотношения между $M\sqrt{\epsilon}$ и $1/\mu$. Вблизи положения равновесия движение описывается согласно теории, развитой в [16]. При удалении от точки (Y, Z) оно ограничено снизу особым многообразием $Q(X, Y, b, Z) = 0$ (кривая 2). Если за время изменения медленных переменных (9), (10), когда знак X не меняется, интегральная кривая попадает на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$, то в этом случае, согласно [5], движение происходит вдоль кривой 2, согласно (8), где Y принадлежит $Q(X, Y, b, Z) = 0$. Однозначность поведения будет нарушена в точке пересечения кривых 2 и 1, которая является седлом. После ее прохождения особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ становится неустойчивым. Выбирая из физических соображений направление движения в сторону возрастания Y (так как при $Y \rightarrow -\infty$ $n_e \rightarrow \infty$), убеждаемся, что траектория совершит обход точки (\bar{Y}, \bar{Z}) и вновь попадет на кривую 2, т. е. движение повторится. Из анализа фазового портрета системы, изображенной на рисунке, видно, что предельная траектория быстрой подсистемы (7), (8) не зависит от начальных возмущений и тем самым обладает устойчивостью. Действительно, если начальное значение удалено от (\bar{Y}, \bar{Z}) на значительное расстояние, например, находится в первом квадранте плоскости (Y, Z) , то в направлении $Y \rightarrow +\infty$ движение запрещено, поскольку при $\tilde{n} \rightarrow \epsilon^{1/3} n$ ($\tilde{n} = n - Y$) в (7) величина $F(X, Y, b, Z)$ становится порядка ϵ . Движение вдоль OY при этом прекращается и может происходить только вдоль оси OZ до тех пор, пока интегральная кривая не пересечет кривую 1. Затем движение пойдет в направлении $Y \rightarrow -\infty$ и интегральная кривая попадает на кривую 2. Именно выход любой траектории на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ и движение вдоль него до точки пересечения с $F(X, Y, b, Z) = 0$ обеспечивают устойчивость предельной траектории. (Начальные значения должны располагаться на фазовой плоскости выше кривой 2, поскольку ниже ее уравнения (1)—(6) недостаточны: там необходимо учитывать вязкие члены тензора давления.) Полученная картина изменения быстрых переменных близка к релаксационным колебаниям [17]. При этом осциллируют концентрация электронов $\tilde{n} = n - Y$ и y -составляющая скорости электронов: $v_{ey} \sim Z$. Нетрудно оценить период этих колебаний. Предельная траектория на плоскости (Y, Z) состоит из участка DB особого многообразия $Q(X, Y, b, Z) = 0$, вдоль которого она движется за характерное время T_1 , и кривой BCD , охватывающей точку

(\bar{Y} , \bar{Z}), начинающейся от точки пересечения кривых 1 и 2 и попадающей на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ после обхода точки (\bar{Y} , \bar{Z}). Эту кривую система проходит за характерное время T_2 . Используя (8) и учитывая, что $\zeta = x - ut$, оценим T_1 и T_2 . При движении по участку BCD предельной траектории можно считать $\beta \bar{n}^2 \ll 1$, поэтому из (18) и (19) в приближении $\varepsilon = 0$ имеем

$$(27) \quad dY^*/dZ^* = -\bar{b}Z^*(\bar{b} - Y^*)^3/Y^*$$

$$(Y^* = \bar{b} - \bar{n} + \bar{Y}, Z^* = \bar{Z} + \bar{X}/\bar{b}).$$

Интегрируя (27) и полагая для простоты $\bar{b} \simeq 1$, получим

$$(28) \quad Z^{*2} + (Y^*/(1 - Y^*))^2 = A^2 \quad (A = \text{const}).$$

Из (28), ввиду того что $\bar{Y} < \bar{n}$, легко найти ограничение на $|A|$: $|A| < 1$. Отсюда следует, что при движении по предельной траектории на участке BCD (см. рисунок) $Y^* < 1/2$ и $Z^* < 1$, т. е. $n_e \geq B/2$, а максимальная амплитуда колебаний y -составляющей скорости электронов $|v_{ey}| \leq u$. В силу сказанного $T_2 \sim 1/\omega_{Be}$. При движении по участку DB ($\bar{n} = 1/\sqrt{\beta} \gg 1$, где $\beta \ll 1$) $\bar{n} \gg b$, следовательно, $T_1 \sim v_{Te}/u \times \omega_{Be}$. Так как $\beta \ll 1$, то $T_1 \ll T_2$, поэтому период возникающих колебаний $T = T_1 + T_2 \simeq 1/\omega_{Be}$.

Таким образом, при $\mu \gg 1$ имеем дело с «бунчировкой» электронов на ларморовском радиусе с раскачкой циклотронных колебаний релаксационного типа, поскольку движение вдоль особого многообразия в данном случае можно рассматривать как скачок y -составляющей скорости электронов при их неизменной концентрации. Следует подчеркнуть, что регулярные колебания на фронте волны при этом совершают плотность электронов и y -составляющая скорости электронов. Более сложным является промежуточный режим, когда при изменении медленных переменных (9), (10) знак X меняется до того, как интегральная кривая быстрой подсистемы (7), (8) успевает попасть на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$. В этом случае она совершает движение в области между точкой равновесия (\bar{Y} , \bar{Z}) и предельной траекторией, не выходя на последнюю. Реализация такого движения происходит, по-видимому, когда между $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$ выполняется соотношение $M\sqrt{\varepsilon}\mu \ll 1$.

Поскольку быстрые переменные (Y , Z) меняются в ограниченной области, то, когда их изменение происходит вблизи точки равновесия (\bar{Y} , \bar{Z}) или осуществляется выход на предельную траекторию, в уравнениях для (X , b) можно проводить процедуру усреднения. В первом случае усреднение ведется в полном соответствии с [16]. Во втором имеется особенность, связанная с тем, что при попадании на многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ производные быстрых переменных не определены, так что гладкость правых частей в уравнениях для (X , b) отсутствует. Однако и здесь процедура усреднения может быть обоснована [18]. После усреднения уравнений для медленных переменных (9), (10) получим

$$(29) \quad M\sqrt{\varepsilon}\mu d\langle X \rangle/d\xi = \langle Y \rangle;$$

$$(30) \quad (\gamma^2/M\sqrt{\varepsilon}\mu)d\langle b \rangle/d\xi = \langle Zn \rangle - \langle ZY \rangle - \varepsilon\mu^2\langle Xn \rangle,$$

где $\langle A \rangle$ означает среднее значение A , причем $\langle A \rangle$ зависит от того, какой режим в зависимости от $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$ устанавливается в быстрой подсистеме (7), (8). Так как $\langle Y \rangle$, $\langle Zn \rangle$, $\langle ZY \rangle$, $\langle Xn \rangle$ — функции $\langle X \rangle$ и $\langle b \rangle$, то система (29), (30) описывает изменение новых медленных переменных ($\langle X \rangle$, $\langle b \rangle$), которые близки к (X , b) в первом случае [16, 18]. Во втором решение системы (29), (30) может, однако, отличаться от решения системы (12) — (16) как масштабом изменения медленных переменных, так и функциональной зависимостью.

Таким образом, для исследования области применимости таких характерных свойств плазмы, как замороженность и квазинейтральность, необходимо прибегать к теории сингулярных возмущений [13, 14]. Особенность гидродинамических уравнений плазмы как объекта теории сингулярно-возмущенных систем в том, что положение равновесия соответствующей присоединенной системы в нулевом приближении по малым параметрам оказывается, как правило, центром, и поэтому требуется более тщательный анализ его устойчивости, основанный на построении функций Ляпунова [16]. Осцилляторный характер изменения быстрых переменных требует обязательной процедуры усреднения при решении системы уравнений для медленных переменных [18]. При устойчивом характере движения быстрых переменных около положения равновесия средние значения медленных переменных не будут отличаться от тех, которые получаются при замене присоединенной системы на вырожденную. В случае неустойчивости, как показал анализ, проведенный в [10, 5] и в данной работе, быстрые переменные изменяются в ограниченной области фазового пространства, и даже в простейшей модели плазмы с «холодными» электронами ($v_{Te} < u$) и при пренебрежении эффектом конечного ларморовского радиуса можно указать предельную траекторию, на которую асимптотически выходит интегральная кривая быстрой подсистемы. Существование предельной траектории обеспечивается, в первую очередь, особым многообразием $Q = 0$, обладающим притягивающими свойствами [5]. Наличие особого многообразия не только гарантирует устойчивость предельной траектории для быстрых переменных, но и является определяющим при выборе медленных переменных, которые необходимо представлять в стандартной форме [15], чтобы процедура усреднения имела смысл и при выходе на $Q = 0$.

Анализ быстрых переменных уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики методами теории сингулярно-возмущенных систем позволяет асимптотически точно описывать нелинейные электростатические колебания, имеющие релаксационный характер [17, 19] благодаря существованию особого многообразия $Q = 0$. Изменение концентрации электронов n y -составляющей скорости электронов приобретает характер регулярных циклотронных колебаний релаксационного типа с довольно существенным изменением концентрации электронов, поэтому можно говорить о «бунчировке» как о конечной стадии колебательного процесса с предельными значениями концентрации электронов, определяемыми ограничивающими кривыми $Q = 0$ и $n_e = 0$.

В заключение авторы выражают признательность А. Н. Тихонову и В. Д. Русанову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
2. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разряженной плазме.— М.: Атомиздат, 1964.— Т. 4.
3. Березин Ю. А. Численные исследования нелинейных волн в разряженной плазме.— Новосибирск: Наука, 1977.
4. Sholin G. V., Trushin S. A. Stationary deviations from quasineutrality in plasma dynamics // Proc. XVII th Intern. conf. on phenomena in ionized gases, Budapest, Hungary, 1985.
5. Хапаев М. М., Шолин Г. В. Анализ гидродинамических уравнений плазмы методами теории сингулярных возмущений // ДАН СССР.— 1986.— Т. 286, № 3.
6. Трушин С. А., Шолин Г. В. Развитие ленгмюровских колебаний при движении плазмы поперек магнитного поля // ДАН СССР.— 1980.— Т. 255, № 5.
7. Трушин С. А., Шолин Г. В. Автоколебательный режим возбуждения стохастических электростатических волн при движении плазмы поперек магнитного поля // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 3.
8. Трушин С. А., Шолин Г. В. Автоколебательный режим возбуждения электростатических шумов и динамика диссипативных процессов на фронте поперечных магнитозвуковых волн конечной амплитуды.— М., 1981.— (Препр./АН СССР, ИАЭ; № 3449/6).

9. Жданов С. К., Трубников Б. А. Магнитозвуковой солитон разряда и генерация ВЧ колебаний при динамическом развитии z -пинча // ЖЭТФ.— 1982.— Т. 83, № 6.
10. Трушин С. А., Шолин Г. В., Хапаев М. М. О характере изменения электрического поля разделения зарядов на фронте нелинейных магнитозвуковых волн // Физика плазмы.— 1988.— Т. 14, № 1.
11. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
12. Лонгмайр К. Физика плазмы.— М.: Атомиздат, 1966.
13. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб.— 1952.— Т. 31(93), № 3.
14. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
15. Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н. Новые методы в нелинейной механике.— Киев: ГТЦ, 1934.
16. Хапаев М. М. О теореме А. Н. Тихонова для сингулярно возмущенных систем // ДАН СССР.— 1983.— Т. 271, № 5.
17. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.
18. Хапаев М. М. О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения.— 1966.— Т. 2, № 5.
19. Андронов А. А., Витт А. В., Хайкин С. З. Теория колебаний.— М.: Наука, 1977.

г. Москва

Поступила 8/II 1988 г.,
в окончательном варианте — 20/II 1989 г.

УДК 537.521+621.391.821

Е. А. Зобов, А. Н. Сидоров

СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МОЛНИИ И СКОЛЬЗЯЩЕЙ ИСКРЫ

Разряд молнии носит случайный и неконтролируемый характер, и получение экспериментальных данных о нем связано с определенными трудностями. Многие результаты получают при лабораторном изучении длинных искр [1, 2], которые иногда используют для моделирования молнии при испытаниях уязвимости топливных систем и электронного оборудования самолетов к воздействию атмосферного электричества [3]. Естественно, воздействие на аппаратуру можно моделировать любым разрядом с подходящим током, однако в модельных испытаниях для определения вероятного удара молнии [4, 5] ценность подобных испытаний зачастую сомнительна [6], поскольку молнии и длинные искры различаются многими характеристиками.

По нашему мнению, практически единственным видом разряда, процесс пробоя в котором наиболее близок к молнии и происходит с образованием ступенчатого лидера, является скользящая искра (СИ). Причины, почему эти несопоставимые по масштабам явления подчиняются примерно одинаковым закономерностям, исследованы пока недостаточно. Создание теории или моделей сильноточной стадии молнии [7, 8] затруднено из-за отсутствия начальных условий развития ее канала разряда. Разработка экспериментальной модели молнии, каковой может быть СИ на стадии пробоя, представляется полезным для понимания процессов пробоя в молнии.

Цель данной работы — сравнительное сопоставление электрических полей СИ и молнии, генерируемых развивающимся лидерным процессом, а также сопоставление на этой основе последующих стадий пробоя. Данные о молнии взяты из литературы, исследования СИ в основном выполнены авторами.

Каждый импульс молнии начинается со слабосветящегося предразряда, который получил название лидерного процесса [1, 2, 9, 10]. Чаще всего лидер движется от облака к земле отдельными ступенями, характерная длина которых около 50 м. В конце каждой ступени лидер останавливается на время около 50 мкс, а затем проходит следующую ступень, поэтому его часто называют ступенчатым. После замыкания разрядного промежутка (РП) облако — земля по создавшемуся проводящему каналу от земли к облаку развивается так называемый возвратный удар (главный или обратный разряд), формирующий яркий светящийся искровой канал. После некоторой паузы распространяется второй (стреловидный) лидер и второй возвратный удар.

Существующие теории ступенчатого лидера не дают ясной качественной картины происходящих процессов. Многие исследователи ([10] и цитируемая литература) считают несомненным, что необнаруживаемые световые процессы: стример-пилот, который движется непрерывно со скоростью, равной эффективной скорости распространения ступенчатого лидера, коронный разряд с вершины лидера, радиальные токи короны, вследствие которых канал лидера окружен оболочкой из коронного разряда \mathcal{C} радиусом в несколько метров, первичные и вторичные стримеры, — все эти процессы пред-