Ф. Л. Варпаховский, О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул логики высказываний, *Докл. АН СССР*, 1965, том 161, номер 6, 1257–1258

https://www.mathnet.ru/dan31016

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 161, № 6

МАТЕМАТИКА

Ф. Л. ВАРПАХОВСКИЙ

О НЕРЕАЛИЗУЕМОСТИ ДИЗЪЮНКЦИИ НЕРЕАЛИЗУЕМЫХ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 XI 1964)

Понятие реализуемости логико-арифметических формул введено Клини ([1,2]). На базе этого понятия определяется класс реализуемых формул логики высказываний. Именно: формула логики высказываний считается реализуемой, если реализуема всякая формула, получаемая из нее подстановкой формул арифметики вместо пропозициональных переменных. Известно, что все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении Гейтинга, реализуемы ([3]). Роуз построил первый пример реализуемой формулы, невыводимой в исчислении Гейтинга ([4]).

Для исчисления Гейтинга справедливо следующее утверждение: если выводима формула $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, то выводима, по крайней мере, одна из формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. В связи с результатом Роуза возникает вопрос, справедливо ли аналогичное утверждение для реализуемых формул, т. е. влечет ли реализуемость формулы $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ реализуемость, по крайней мере, одной из формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Оказывается, что (классически) поставленный вопрос решается в положительном смысле.

Введем следующие обозначения. Выражение $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ (сокращенно $\mathfrak{A}(a_i)$) означает формулу логики высказываний, которая не содержит пропозициональных переменных, отличных от $a_1, \ldots, a_n$. Большими латинскими буквами с индексами или без индексов обозначаются формулы арифметики. Выражение вида $A(x_1, \ldots, x_m)$ означает формулу арифметики, которая не содержит свободно переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_m$. Результат подстановки арифметических формул A_i вместо пропозициональных переменных a_i в формулу $\mathfrak{A}(a_i)$ записывается в виде $\mathfrak{A}(A_i)$. Выражение

$$kr\mathfrak{A}(A_i(x_1, \ldots, x_m))\,(\varphi(x_1, \ldots, x_m))r\mathfrak{A}(A_i(x_1, \ldots, x_m))$$

означает, что число k (обще-рекурсивная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$) реализует формулу $\mathfrak{A}(A_i(x_1, \ldots, x_m))$.

Определение. Набор формул арифметики $\{A_1, \ldots, A_n\}$ называется *опровержением формулы* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *логики высказываний*, а формула $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ — *опровержимой*, если формула $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ нереализуема.

Теорема. *Дизъюнкция опровержимых формул опровержима.*

Рассмотрим вкратце применяемую конструкцию и ход доказательства теоремы.

1. Пусть формулы $\mathfrak{A}_1(a_i)$, $\mathfrak{A}_2(a_i)$ опровержимы и $\{A_{1i}\}$, $\{A_{2i}\}$ — их опровержения. Можно считать, что формулы набора $\{A_{1i}\}$ содержат свободно не более одного переменного, одного и того же для всех формул A_{1i}, и аналогично для набора $\{A_{2i}\}$. Можно считать, далее, что свободные переменные наборов $\{A_{1i}\}$ и $\{A_{2i}\}$ различны между собой; пусть это будут переменные x_1, x_2. По определению опровержения, для наборов $\{A_{1i}(x_1)\}$, $\{A_{2i}(x_2)\}$ и любых обще-рекурсивных g и h

$$\neg g(x_1)\ r\ \mathfrak{A}_1(A_{1i}(x_1)), \tag{1}$$

$$\neg h(x_2)\ r\ \mathfrak{A}_2(A_{2i}(x_2)). \tag{2}$$

2. Строится формула $R(x)$, выражающая на логико-арифметическом языке следующий содержательный предикат: «x есть гёделев номер частично-рекурсивной функции φ одного переменного и $\varphi(x)=0$». Доказывается, что для всех x истинность указанного предиката равносильна реализуемости $R(x)$.

3. В качестве опровержения формулы $\mathfrak{A}_1(a_i) \vee \mathfrak{A}_2(a_i)$ берется набор $\{A_{1i}(x_1)\ \&\ \neg\neg R(x) \vee A_{2i}(x_2)\ \&\ \neg R(x)\}$ (сокращенно $\{M_i(x_1,x,x_2)\}$), причем переменное x выбирается отличным от переменных x_1, x_2.

4. Пусть теперь формула $\mathfrak{A}_1(M_i) \vee \mathfrak{A}_2(M_i)$ реализуема, т. е. для некоторой обще-рекурсивной функции f

$$f(x_1,x,x_2)\ r\ \mathfrak{A}_1(M_i(x_1,x,x_2)) \vee \mathfrak{A}_2(M_i(x_1,x,x_2)). \tag{3}$$

Из определения реализуемости дизъюнкции ([1]) следует, что $f(x_1,x,x_2) = 2^{f_0(x_1,x,x_2)}3^{f_1(x_1,x,x_2)}$, и обе функции f_0, f_1 обще-рекурсивны.

5. Строятся две частично-рекурсивные функции $\rho_1(\alpha)$ $(\rho_2(\alpha))$, обладающие следующими свойствами: если α реализует формулу $\mathfrak{A}_1(M_i(x_1,x,x_2))$ (формулу $\mathfrak{A}_2(M_i(x_1,x,x_2))$) и формула $R(x)$ реализуема (нереализуема), то $\rho_1(\alpha)$ $(\rho_2(\alpha))$ определена и реализует формулу $\mathfrak{A}_1(A_{1i}(x_1))$ (формулу $\mathfrak{A}_2(A_{2i}(x_2))$). При построении функций $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$ используется известное следствие теоремы Нельсона, по которому для каждой формулы $\mathfrak{A}(a_i)$ логики высказываний, выводимой в исчислении Гейтинга, можно указать число k такое, что $k\ r\ \mathfrak{A}(A_i)$ для любых A_i ([1]).

6. Пусть, далее,

$$(Ex_2)(x_1)f_0(x_1,\psi(x_1,x_2),x_2)=0, \tag{4}$$

где $\psi(x_1,x_2)$ — такая примитивно-рекурсивная функция, что для произвольных фиксированных x_1^*, x_2^* $\psi(x_1^*,x_2^*)$ дает гёделев номер обще-рекурсивной функции $f_0(x_1^*,x,x_2^*)$ одного переменного ([1]). Если x_2^* выбрано в соответствии с (4) таким, что $(x_1)f_0(x_1,\psi(x_1,x_2^*),x_2^*)=0$, то, как доказывается, функция $\rho_1(f_1(x_1,\psi(x_1,x_2^*),x_2^*)$ обще-рекурсивна и реализует $\mathfrak{A}_1(A_{1i}(x_1))$ в противоречие с (1). Поэтому из (1), (2), (3) следует

$$\neg(Ex_2)(x_1)f_0(x_1,\psi(x_1,x_2),x_2)=0. \tag{5}$$

7. Условие (5) преобразуется в условие

$$(x_2)(Ex_1)f_0(x_1,\psi(x_1,x_2),x_2)=1. \tag{5'}$$

Из (5′) следует, что функция $\chi(x_2)=\mu x_1(f_0(x_1,\psi(x_1,x_2),x_2)=1)$ обще-рекурсивна. В этом случае, как нетрудно доказать, функция $\rho_2(f_1(\chi(x_2),\psi(\chi(x_2),x_2),x_2))$ является обще-рекурсивной и реализующей для $\mathfrak{A}_2(A_{2i}(x_2))$. Полученное противоречие доказывает теорему.

При переходе от (5) к (5′) используется ленинградский принцип.

Поступило
14 XI 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. [2] S. C. Kleene, J. Symbolic Logic, 10, 109 (1945). [3] D. Nelson, Trans. Am. Math. Soc., 61, 307 (1947). [4] G. F. Rose, Trans. Am. Math. Soc., 75, 1 (1953).