Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 1993. Том 34, № 6

УДК 517.383

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ О СРЕДНЕМ

Ю. Г. Никоноров

Рассмотрим первую теорему о среднем (см. [1, с. 151]) в следующей формулировке: для любой непрерывной вещественной функции f, определенной на отрезке $[0,1]$, существует единственная функция $\xi : [0,1] \to R$, удовлетворяющая для каждого $x \in [0,1]$ условиям:

a) $0 \leqslant \xi(x) \leqslant x$;

b) $xf(\xi(x)) = \int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau$;

c) если $\xi(x) < t \leqslant x$, то $xf(t) \neq \int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau$.

В. К. Ионин высказал гипотезу: верхний предел отношения $\xi(x)/x$ при $x \to 0$ не может быть меньше $1/e$. Здесь мы докажем справедливость этой гипотезы, т. е. покажем, что имеет место следующая

Теорема. *Если $1/e \leqslant s \leqslant 1$, то существует такая непрерывная функция $f : [0,1] \to R$, что*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} = s, \tag{1}$$

причем для произвольной непрерывной функции имеет место неравенство

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} \geqslant \frac{1}{e}. \tag{2}$$

Пункты 1–9 посвящены доказательству этой теоремы.

1. Все утверждения настоящего пункта имеют простые доказательства, поэтому мы ограничимся только их формулировками.

Если $s = 1/e$, то равенство (1) имеет место для функции f, задаваемой условиями: $f(0) = 0$, $f(x) = (-\ln x/2)^{-1}$ при $x \in (0,1]$. Если $1/e < s < 1$, то (1) выполняется для функции f, определяемой равенствами $s = (1+t)^{1/t}$, $f(x) = x^t$. Если $s = 1$, то (1) верно для функции $f(x) \equiv 0$.

2. Приступим к доказательству неравенства (2). Будем предполагать, что $f(0) = 0$. Так как функциям f и $f + C$, где C — произвольная константа, соответствует одна и та же функция ξ, это не ограничивает общности.

Определим функцию $g : [0,1] \to R$ равенством

$$g(x) = f(\xi(x)).$$

Функцию g можно определить также следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau, & \text{если } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Ясно, что для произвольного $x \in (0,1)$ функция $g(x)$ дифференцируема, причем

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\left(xf(x) - \int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau\right), \quad f(x) = g(x) + xg'(x).$$

Пусть E — множество нулей функции g'. Возможны два случая: $\inf E = 0$ и $\inf E > 0$.

3. В первом случае существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Так как $x_n \in E$, то $x_n f(x_n) = \int\limits_0^{x_n} f(\tau)\,d\tau$, т. е. $\xi(x_n) = x_n$ и

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} \geqslant \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\xi(x_n)}{x_n} = 1 > \frac{1}{e}.$$

4. В дальнейшем будем предполагать, что $\inf E > 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $g'(x) > 0$ на интервале $(0,\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Допустим, что для функции f выполняется неравенство $\varlimsup\limits_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} < 1/a$, где $a > e$. Для доказательства теоремы достаточно получить противоречие.

5. Существует такое $\delta \in (0,\varepsilon]$, что для любого $x \in (0,\delta)$

$$\frac{g(ax) - g(x)}{xg'(x)} < 1.$$

Доказательство проведем от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и

$$\frac{g(ax_n) - g(x_n)}{x_n g'(x_n)} \geqslant 1.$$

Легко заметить, что $g(x_n) < g(x_n) + x_n g'(x_n) \leqslant g(ax_n)$. В силу непрерывности функции g существует $y_n \in [x_n, ax_n]$, удовлетворяющий уравнению $g(y_n) = g(x_n) + x_n g'(x_n)$. Воспользовавшись свойствами функции g, получаем $f(\xi(y_n)) = g(y_n) = g(x_n) + x_n g'(x_n) = f(x_n)$, т. е. $\xi(y_n) \geqslant x_n$. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\xi(y_n)}{y_n} \geqslant \frac{x_n}{ax_n} = \frac{1}{a}.$$

Это противоречит последнему неравенству п. 4. Доказательство закончено.

6. На интервале $(-1,0)$ непрерывная функция $\alpha \mapsto (1+\alpha)^{1/\alpha}$ строго убывает от $+\infty$ до e. Поэтому существует $\alpha < 0$, такое что $(1+\alpha)^{1/\alpha} = a$. Определим функцию $h : [0, g(\delta)] \to R$ равенством $h(g(x)) = x^\alpha$. Так как $g'(x) > 0$ для $x \in (0,\delta)$ и функции g и x^α имеют непрерывные производные, функция h непрерывна и имеет на интервале $(0, g(\delta))$ непрерывную производную, причем $h'(g(x))g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Очевидно, что $h'(x) < 0$ для всех $x \in (0, g(\delta))$.

7. Так как $(ax)^\alpha - x^\alpha = x\cdot\alpha x^{\alpha-1}$, $h(g(ax)) = (ax)^\alpha$, учитывая равенства предыдущего пункта, получаем $h(g(ax)) - h(g(x)) = xg'(x)h'(g(x))$ для любого $x \in (0, \delta/a)$. Это уравнение равносильно следующему:

$$h'(g(x)) = \frac{g(ax) - g(x)}{xg'(x)} \cdot \frac{h(g(ax)) - h(g(x))}{g(ax) - g(x)}.$$

По теореме Лагранжа о промежуточном значении существует $\tau = \tau(x) \in (g(x), g(ax))$, такое что $h(g(ax)) - h(g(x)) = h'(\tau)(g(ax) - g(x))$. Учитывая результат п. 5 и отрицательность h', получаем $h'(g(x)) > h'(\tau(x))$.

8. Пусть $C = \min h'(t)$, где $t \in [g(\delta/a), g(\delta)]$. Докажем, что это равенство сохраняется, если t пробегает весь полуинтервал $(0, g(\delta)]$. Допустим противное, т. е. существуют $\gamma > 0$ и $t_0 \in (0, g(\delta/a))$, такие что $h'(t_0) = C - \gamma$ и $h'(t) > C - \gamma$ для всех $t \in (t_0, g(\delta)]$. Пусть x_0 определяется равенством $g(x_0) = t_0$. Очевидно, что $x_0 < \delta/a$. В силу результата п. 7 существует число $\tau(x_0) \in (g(x_0), g(ax_0)) \subset (t_0, g(\delta))$, удовлетворяющее условию $h'(t_0) = h'(g(x_0)) > h'(\tau(x_0))$, т. е. $h'(\tau(x_0)) < C - \gamma$, чего не может быть. Полученное противоречие означает, что $h'(t) \geqslant C$ для всех $t \in (0, g(\delta))$.

9. Из последнего равенства п. 6, учитывая предыдущий пункт, можно получить неравенство

$$\alpha x^{\alpha-1} \geqslant Cg'(x),$$

где $x \in (0, \delta]$. Интегрируя его по произвольному отрезку $[p, g] \subset (0, \delta]$, находим, что

$$g^{\alpha} - Cg(q) \geqslant p^{\alpha} - Cg(p).$$

Фиксируем q и устремляем p к нулю. Так как $\lim\limits_{p\to 0} g(p) = 0$ и $\alpha < 0$, приходим к неверному неравенству

$$q^{\alpha} - Cg(q) \geqslant +\infty.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

10. Сформулируем еще одну гипотезу В. К. Ионина, естественно связанную с нашей теоремой.

Для вещественной функции f, определенной на отрезке $[0,1]$ и имеющей всюду в области определения n непрерывных производных, рассмотрим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{n}(t)}{n!}x^{n},$$

где t — некоторое число из отрезка $[0, x]$. Обозначим через $\xi(x)$ максимальное из таких t. Нетрудно доказать, что для любого $a > e^{-C}$, где $C = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} i^{-1} - \ln m\right)$ — число Эйлера, можно так подобрать n и функцию f, что выполняется неравенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{n\xi(x)}{x} < a.$$

Есть основания предполагать (в этом состоит гипотеза В. К. Ионина), что для любых n и f справедливо строгое неравенство

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{n\xi(x)}{x} > e^{-C}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

г. Новосибирск *Статья поступила 8 февраля 1993 г.*