



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. G. Magomed-Kasumov, Approximation of Functions by Fourier–Haar Sums in Weighted Variable Lebesgue and Sobolev Spaces, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, Volume 14, Issue 3, 295–304

DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-3-295-304

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

February 17, 2025, 20:47:21





УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов

Научный сотрудник отдела математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, rasuldev@gmail.com

Рассматриваются весовые пространства Лебега $L_w^{p(x)}$ и Соболева $W_{p(\cdot),w}$, показатель $p(x) \geq 1$ и вес $w(x)$ которых удовлетворяют условиям, обеспечивающим базисность системы Хаара в $L_w^{p(x)}$. Для функций из этих пространств получены оценки скорости сходимости сумм Фурье – Хаара. Оценки даны в терминах модуля непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot),w}$, основанного на усредненном сдвиге (функции Стеклова).

Ключевые слова: весовое пространство, пространство Лебега, пространство Соболева, переменный показатель, модуль непрерывности, функция Стеклова, прямые теоремы теории приближений, скорость сходимости, суммы Фурье – Хаара, условие Макенхоупта.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p(x)$ — измеримая на E функция такая, что $1 \leq \underline{p}(E) \leq \bar{p}(E) < \infty$. Здесь и далее символами $\underline{p}(M)$, $\bar{p}(M)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf}_{x \in M} p(x)$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} p(x)$ соответственно. Пусть $w(x)$ — неотрицательная

почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес). Через $L_w^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty$. Пространство

$L_w^{p(x)}(E)$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством (см. [1–4])

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}.$$

В данной работе рассмотрена задача о приближении функций суммами Фурье – Хаара в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}([0, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$. Далее, если речь идет об отрезке $[0, 1]$, то существенную верхнюю и нижнюю грани функции $p(x)$ будем обозначать кратко \bar{p} и \underline{p} соответственно. Через $c, c(p), c(p, w)$ будут обозначаться константы, зависящие лишь от величин в скобках и, вообще говоря, различные в разных местах. Результаты данной статьи являются обобщениями на весовой случай результатов, полученных в статье [5].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом параграфе приводятся некоторые свойства весовых пространств Лебега с переменным показателем.

Лемма 1. *Множество непрерывных функций $C[0, 1]$ всюду плотно в $L_w^{p(x)}$.*

Доказательство. Доказательство проведем в три шага. Сначала 1) докажем, что пространство ограниченных функций всюду плотно в $L_w^{p(x)}$, затем 2) покажем, что всякая ограниченная функция может быть сколь угодно точно приближена функциями с конечным числом значений. И наконец, 3) заметим, что функции с конечным числом значений можно с любой степенью точности приближать непрерывными функциями.

1. Отметим сначала, что всякая ограниченная измеримая функция $g(x)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, будет принадлежать $L_w^{p(x)}$:

$$|g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 |g(x)|^{p(x)} w(x) dx \leq (c+1)^{\bar{p}} \int_0^1 w(x) dx < \infty.$$



Возьмем теперь произвольную функцию $f(x) \in L_w^{p(x)}$. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого множества $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu(E) < \delta$ интеграл $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \varepsilon$. С другой стороны, $f(x)$ — измеримая функция, поэтому, пользуясь C -свойством Лузина, мы можем утверждать, что для данного $\delta > 0$ всегда найдется замкнутое множество $F_\delta \subset [0, 1]$ с мерой $\mu(F_\delta) > 1 - \delta$, на котором $f(x)$ будет непрерывной. Рассмотрим следующую функцию:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_\delta, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus F_\delta. \end{cases}$$

Из сказанного видно, что $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, причем

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^{p(x)} w(x) dx = \int_{[0,1] \setminus F_\delta} |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \varepsilon,$$

так как $\mu([0, 1] \setminus F_\delta) < \delta$. Это и означает, что множество ограниченных функций всюду плотно в $L_w^{p(x)}$.

2. Любую ограниченную измеримую функцию $g(x)$ можно с любой степенью точности равномерно приблизить функциями с конечным числом значений. Действительно, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, разобьем множество значений $[A, B]$ функции $g(x)$ на интервалы длиной меньше чем ε :

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_N = B, \quad y_{j+1} - y_j < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $e_j = \{x : y_j \leq g(x) < y_{j+1}\}$, $j = \overline{0, N-1}$, $e_N = \{x : g(x) = y_N\}$. Введем функцию $h(x)$, положив $h(x) = y_j$, $x \in e_j$. Ясно, что $h(x)$ — функция, принимающая конечное число значений, и $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$, $x \in [0, 1]$. Следовательно, функции с конечным числом значений также образуют в $L_w^{p(x)}$ всюду плотное множество.

3. Покажем теперь, что всякую функцию $h(x)$, имеющую конечное число значений, можно как угодно точно приблизить в $L_w^{p(x)}$ непрерывными функциями. Поскольку функцию с конечным числом значений можно представить как линейную комбинацию характеристических функций $\chi_M(x)$, то доказательство достаточно провести только для $\chi_M(x)$.

Пусть $M \subset [0, 1]$ — измеримое множество и

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается обычная мера Лебега на прямой, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие множества F_M — замкнутое и G_M — открытое, что

$$F_M \subset M \subset G_M \quad \text{и} \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

Определим теперь функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, [0, 1] \setminus G_M)}{\rho(x, [0, 1] \setminus G_M) + \rho(x, F_M)}.$$

Легко заметить, что введенная функция является непрерывной, равна 1 на множестве F_M , 0 вне множества G_M и не превосходит 1 на $G_M \setminus F_M$. Поэтому разность $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|$ отлична от нуля только на $G_M \setminus F_M$, причем $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$, $x \in G_M \setminus F_M$. Отсюда имеем:

$$\int_0^1 |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x) dx = \int_{G_M \setminus F_M} |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x) dx \leq \int_{G_M \setminus F_M} w(x) dx.$$

Но $w(x) \in L^1$, поэтому в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега за счет выбора ε последний интеграл в приведенной формуле можно сделать сколь угодно малым. \square



Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы в [1], можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. Если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

где

$$r_{p,q}^w \leq \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x) dx}{\underline{\alpha}^*} \quad \left(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - 1} \right).$$

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $f(x, t)$ — измеримая функция, заданная на декартовом произведении $E_1 \times E_2$ множеств E_1 и E_2 , на которых заданы конечные меры μ_1 и μ_2 соответственно. Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| d\mu_2(x) \right\|_{p(\cdot),w(E_1)} \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot),w(E_1)} d\mu_2(x), \quad (1)$$

где

$$r_p \leq \frac{1}{\underline{p}(E_1)} + \frac{1}{\underline{p}'(E_1)} \leq 2, \quad \frac{1}{p(t)} + \frac{1}{p'(t)} = 1, \quad 1 \leq p(t) \leq \bar{p}(E_1) < \infty.$$

Доказательство. Утверждение леммы в случае $w(x) = 1$ было доказано в [2, с. 35]. Перенести его на случай произвольного веса $w(x)$ не составляет труда, если учесть, что $\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f \cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| d\mu_2(x) \right\|_{p(\cdot),w(E_1)} = \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}| d\mu_2(x) \right\|_{p(E_1)} \leq \\ & \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(E_1)} d\mu_2(x) = r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot),w(E_1)} d\mu_2(x). \quad \square \end{aligned}$$

Как было отмечено в [6, 7], для построения рядов Фурье – Хаара (см. определение в [8, с. 70]) для функций из $L_w^{p(x)}$ необходимо и достаточно, чтобы имело место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$. Там же было показано, что для выполнения указанного требования достаточно, чтобы вес удовлетворял следующим условиям:

- 1) $w(x) \geq C_1(w) > 0, \quad x \in E_1$ (п. в.),
- 2) $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty,$

где $E_1 = \{x : p(x) = 1\}, E_2 = [0, 1] \setminus E_1, \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

Множество весовых функций $w(x)$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих при заданном $p(x)$ условиям 1) и 2), будем обозначать через $\mathcal{H}(p)$. Таким образом, если $w \in \mathcal{H}(p)$, то $L_w^{p(x)} \subset L^1$.

Заметим также [6, 7], что для функций $f \in L_w^{p(x)}$ при $w \in \mathcal{H}(p)$ имеет место неравенство

$$\int_E |f(x)| dx \leq c(p, w) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}. \quad (2)$$

В [6, 7] были получены достаточные условия, при которых система Хаара образует базис в $L_w^{p(x)}$. Приведем соответствующую теорему из упомянутой статьи. Для этого сначала введем некоторые обозначения.

Пусть \mathfrak{S} — система множеств. Через $\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S})$ будем обозначать подсистему системы множеств \mathfrak{S} , состоящую из множеств S , для которых $\underline{p}(S) = 1$:

$$\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S}) = \{S \in \mathfrak{S} : \underline{p}(S) = 1\}.$$



Для заданной системы множеств \mathfrak{S} символом $\hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{S})$ обозначим множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$(A1) \quad \sup_{S \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{S})} \frac{1}{|S|} \int_S w(x) dx < c(p, w),$$

$$(A2) \quad \sup_{S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_p(\mathfrak{S})} \left(\frac{1}{|S|} \int_S w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|S|} \int_S w(x)^{-\frac{1}{p(S)-1}} dx \right)^{p(S)-1} < c(p, w).$$

Пусть \mathfrak{B}_ν — множество всех двоичных интервалов (см. [8, с. 69]) из пачек с номерами $j \geq \nu$

$$\mathfrak{B}_\nu = \{\Delta_j^i : j \geq \nu, i = 1, \dots, 2^j\}.$$

Множество измеримых на $[0, 1]$ функций $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq c(p), \tag{3}$$

будем обозначать символом \mathcal{P}^{log} .

Теорема А. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p)$. Тогда система Хаара будет базисом пространства $L_w^{p(x)}$, если $w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{B}_\nu)$.

Отметим, что в безвесовом случае условия базисности системы Хаара были найдены в работе [9].

Основным результатом настоящей работы является оценка скорости сходимости сумм Фурье – Хаара $Q_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k(x)$ к исходной функции $f(x)$ в метрике пространства $L_w^{p(x)}$. Для безвесового случая исследование этого вопроса было проведено в [5], где автор отмечает необходимость использования для пространств Лебега с переменным показателем модуля непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$, основанного на усредненном сдвиге (см. также [10]). В весовом случае мы воспользуемся аналогичной конструкцией. Пусть $f(x) \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$. Будем считать, что функция $f(x)$ продолжена на всю полуось $[0, +\infty)$ с помощью равенства $f(x) = 0, x > 1$. Тогда для таких функций $f(x)$ мы можем ввести оператор Стеклова:

$$s_h(f) = s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Отметим, что при условии $w \in \mathcal{H}(p)$ имеет место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$, поэтому оператор Стеклова будет определен для любой $f \in L_w^{p(x)}$. Введем теперь модуль непрерывности:

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w} = \begin{cases} 0, & \delta = 0, \\ \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot), w}, & \delta > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Модуль непрерывности (4) является неубывающей неотрицательной функцией, а при некоторых ограничениях на показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ также и непрерывной. Последнее вытекает из следующего результата, доказанного в работе [11].

Теорема В. Пусть $\mathfrak{D}_\nu = \{\Delta_j^i \cup \Delta_j^{i+1} : j \geq \nu, i = 1, \dots, 2^j - 1\}$ и

$$1) p(x) \in \mathcal{P}^{log}(E), \quad 2) w(x) \in \mathcal{H}_{p(\cdot)}(E), \quad 3) w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu).$$

Тогда для функций $f(x) \in L_w^{p(x)}$ имеет место оценка ($0 < h \leq 1$)

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}.$$

Другими словами, семейство операторов $s_h(f)$ ($0 < h \leq 1$) будет равномерно ограничено в $L_w^{p(x)}$.

Данная теорема позволяет утверждать, в частности, что при условиях 1)–3) усредненный сдвиг $s_h(f)$ для любой функции $f \in L_w^{p(x)}$ также будет принадлежать пространству $L_w^{p(x)}$. Более того, с помощью этой теоремы легко устанавливается следующий факт (см. также [5, лемма 3.2]).



Лемма 4. Если $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_{\nu}) \right]$, то

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (5)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2 в работе [5] с той лишь особенностью, что в данном случае приходится пользоваться леммой 1 о всюду плотности непрерывных функций в $L_w^{p(x)}$.

Отметим, что система Хаара будет базисом в пространствах $L_w^{p(x)}$, если показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы В.

В данной работе рассматривается задача об оценке в терминах модуля непрерывности (4) скорости приближения функций суммами Фурье – Хаара в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$ и весом $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_{\nu}) \right]$.

3. ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Классом Соболева $W_{p(\cdot), w}^r(M)$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$ будем называть множество $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L_w^{p(x)}$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot), w} \leq M$. Положим $W_{p(\cdot), w}^r = \cup_{M>0} W_{p(\cdot), w}^r(M)$, $W_{p(\cdot), w} = W_{p(\cdot), w}^1$. В настоящем параграфе рассмотрена задача о приближении функций $f \in W_{p(\cdot), w}$ суммами Фурье – Хаара $Q_n(f) = Q_n(f, x)$.

Теорема 1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_{\nu}) \right]$. Справедлива следующая оценка для $f \in W_{p(\cdot), w}$:

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq \frac{c(p, w)}{n} \|f'\|_{p(\cdot), w}.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \in W_{p(\cdot), w}^1(1)$. Следовательно, $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и

$$\|f'\|_{p(\cdot), w} \leq 1. \quad (6)$$

Напомним, что для сумм Фурье – Хаара справедлива формула [12, с. 21]

$$S_n(f, x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} f(t) dt, \quad x \in \lambda_{ns},$$

где λ_{ns} , $s = \overline{1, n}$ – двоичные интервалы постоянства системы функций χ_k , $k = \overline{1, n}$ и

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}}, & 1 \leq s \leq 2i, \\ \frac{1}{2^j}, & 2i + 1 \leq s \leq n \end{cases}.$$

Используя эту формулу, оценим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} (f(y) - f(x)) dy \right|^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} \left[\int_x^y f'(t) dt \right] dy \right|^{p(x)} w(x) dx \leq \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[\frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} dy \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} w(x) dx = \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} w(x) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где через p_s обозначен минимум $p(x)$ на λ_{ns} . Поскольку $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и $w(x) \in \mathcal{H}(p)$, то можно применить неравенство (2). Поэтому, используя условие (3) и неравенство (6) для одного из множителей под интегралом в последнем выражении цепочки соотношений (7), получим:

$$\left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} \leq n^{p(x)-p_s} \left[\int_0^1 |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} \leq$$



$$\leq c(p) \left[c(p, w) \|f'(t)\|_{p(\cdot), w} \right]^{p(x)-p_s} \leq c(p, w). \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx &\leq c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n.s}} \left[n \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s} w(x) dx = \\ &= c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n.s}} w(x) dx \left[n \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Разобьем полученную сумму на две части: к первой части Σ_1 отнесем члены с такими номерами s , для которых $p_s = 1$, а все остальные включим во вторую часть Σ_2 . Так как $w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_{\nu})$, то для веса $w(x)$ выполняется условие (A1). Поэтому для первой суммы ($\sigma_1 = \{s : p_s = 1\}$) можно написать:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{s \in \sigma_1} \frac{1}{|\lambda_{n.s}|} \int_{\lambda_{n.s}} w(x) dx \cdot (n|\lambda_{n.s}|) \cdot \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt < c(p, w) \sum_{s \in \sigma_1} \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt \leq \\ &\leq c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt = c(p, w) \|f'\|_1. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, к $f'(x)$ применимо неравенство (2). Поэтому для суммы Σ_1 получим:

$$\Sigma_1 < c(p, w). \tag{10}$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй суммы ($\sigma_2 = \{s : p_s > 1\}$):

$$\Sigma_2 = \sum_{s \in \sigma_2} \int_{\lambda_{n.s}} w(x) dx \left[n \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s}. \tag{11}$$

Применяя неравенство Гельдера для второго множителя, можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left[n \int_{\lambda_{n.s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s} &= \left[n \int_{\lambda_{n.s}} w(t)^{\frac{1}{p_s}} |f'(t)| w(t)^{-\frac{1}{p_s}} dt \right]^{p_s} \leq \\ &\leq \left[n \left(\int_{\lambda_{n.s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right)^{\frac{1}{p_s}} \left(\int_{\lambda_{n.s}} w(t)^{-\frac{p'_s}{p_s}} dt \right)^{\frac{1}{p'_s}} \right]^{p_s} < \\ &< \frac{c(p)}{|\lambda_{n.s}|^{p_s}} \left(\int_{\lambda_{n.s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right) \left(\int_{\lambda_{n.s}} w(t)^{-\frac{p'_s}{p_s}} dt \right)^{\frac{p_s}{p'_s}} = \\ &= c(p) \frac{1}{|\lambda_{n.s}|} \left(\int_{\lambda_{n.s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right) \left(\frac{1}{|\lambda_{n.s}|} \int_{\lambda_{n.s}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}} dt \right)^{p_s-1}, \quad \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p'_s} = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), приходим к следующему соотношению:

$$\Sigma_2 < c(p) \sum_{s \in \sigma_2} \left[\frac{1}{|\lambda_{n.s}|} \int_{\lambda_{n.s}} w(x) dx \left(\frac{1}{|\lambda_{n.s}|} \int_{\lambda_{n.s}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}} dt \right)^{p_s-1} \right] \int_{\lambda_{n.s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt.$$

В силу (A2) выражение в квадратных скобках ограничено величиной $c(p, w)$, не зависящей от $\lambda_{n.s}$. Следовательно,

$$\Sigma_2 < c(p, w) \sum_{s \in \sigma_2} \int_{\lambda_{n.s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt.$$



Рассмотрим функцию $h(t) = p_s, t \in \lambda_{n,s}$. Так как $h(t) \leq p(t)$, то в силу леммы 2 и условия (6) имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< c(p, w) \sum_{s \in \sigma_2 \lambda_{n,s}} \int w(t) |f'(t)|^{h(t)} dt \leq c(p, w) \int_0^1 w(t) |f'(t)|^{h(t)} dt = \\ &= c(p, w) \int_0^1 w(t) \|f'\|_{h(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq c(p, w) \int_0^1 w(t) (r_{h,p}^w)^{h(t)} \|f'\|_{p(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq \\ &\leq c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}} \int_0^1 w(t) \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt = c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (9), (10) и (13) находим

$$\int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx \leq c(p, w).$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \left| \frac{n(Q_n(f, x) - f(x))}{c(p, w)^{\frac{1}{p(x)}}} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1.$$

Но тогда тем более

$$\int_0^1 \left| \frac{(Q_n(f, x) - f(x))}{(1 + c(p, w))^{\frac{1}{2}} / n} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1.$$

Последнее и означает, что

$$\|Q_n(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq \frac{(1 + c(p, w))^{\frac{1}{2}}}{n} = \frac{c(p, w)}{n}.$$

Таким образом, для $f(x) \in W_{p(\cdot), w}^1(1)$ теорема доказана. Случай $f(x) \in W_{p(\cdot), w}$ сводится к уже доказанному заменой $g(x) = \frac{f(x)}{\|f'\|_{p(\cdot), w}}$. \square

4. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В случае постоянного p задача о скорости приближения функций $f(x) \in L^p$ суммами Фурье – Хаара была решена П. Л. Ульяновым.

Теорема (П. Л. Ульянов). Если $f(x) \in L^p(0, 1)$ с некоторым $p \in [1, \infty]$, то

$$\|f - Q_n(f)\|_p \leq 24 \omega_p(f, \frac{1}{n}) \text{ при } n \geq 1,$$

где $\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Данная теорема получила обобщение на переменный показатель в работе И. И. Шарапудинова [5]. Напомним, что для этого потребовалось ввести модуль непрерывности, основанный на усредненном сдвиге.

Теорема (И. И. Шарапудинов). Пусть $p(x) \in P^{log}$, $f(x) \in L^{p(x)}$. Тогда справедлива оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}.$$

В этом параграфе мы получим аналогичную оценку для функций $f(x) \in L_w^{p(x)}$ в терминах модуля непрерывности (4). Для этого нам понадобится следующий оператор:

$$\Theta_\nu(f)(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu s_h(f)(x) dh = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \frac{dh}{h} \int_0^h f(x+t) dt = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \frac{dh}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt, \quad 0 < \nu \leq 1.$$



Отметим, что данный оператор использовался при доказательстве приведенной ранее теоремы из статьи [5, § 5] (см. также [10, с. 291]). Рассмотрим некоторые свойства этого оператора.

1. Для любого $f(x) \in L^1$ функция $\Theta_\nu(f)(x)$, $0 < \nu \leq 1$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство есть в [5, теорема 4]. Таким образом, $\Theta_\nu(f)(x)$ — абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду дифференцируема. Более того, справедливо следующее свойство.

2. Для любого $f(x) \in L^1$ для почти всех $x \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$(\Theta_\nu(f))'(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dh. \tag{14}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [5, с. 13].

3. Для любого $f(x) \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$ выполняется неравенство ($0 < \nu \leq 1$)

$$\|(\Theta_\nu(f))'\|_{p(\cdot),w} \leq c(p) \frac{\Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}}{\nu}.$$

Доказательство. Воспользуемся интегрированием по частям для интеграла из (14) ($u = 1/h$, $v' = f(x+h) - f(x)$):

$$\begin{aligned} \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh &= \frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \Big|_{\nu/2}^{\nu} + \\ &+ \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h^2} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt dh = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \tag{15}$$

$I_1(x)$ можно записать в следующем виде:

$$I_1(x) = (s_\nu(f)(x) - f(x)) - (s_{\nu/2}(f)(x) - f(x)).$$

Отсюда следует, что

$$\|I_1\|_{p(\cdot),w} \leq \|s_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} + \|s_{\nu/2}(f) - f\|_{p(\cdot),w} \leq \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w} + \Omega(f, \frac{\nu}{2})_{p(\cdot),w} \leq 2\Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \right] dh = \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (s_h(f)(x) - f(x)) dh.$$

Тогда, используя лемму 3, получим:

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{p(\cdot),w} &= \left\| \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (s_h(f)(\cdot) - f(\cdot)) dh \right\|_{p(\cdot),w} \leq \\ &\leq c(p) \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot),w} dh \leq c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w} \quad (c(p) \leq 2). \end{aligned} \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получаем требуемое. □

Из свойств 1 и 3 следует, что, в частности

4. $\Theta_\nu(f) \in W_{p(\cdot),w}$ для $f \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$, $0 < \nu \leq 1$.

5. Пусть $f \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$, $0 < \nu \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\Theta_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} \leq c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}.$$



Доказательство. В силу того что $|\Theta_\nu(f)(x) - f(x)| \leq \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu |s_h(f)(x) - f(x)| dh$, пользуясь леммой 3, сразу получаем требуемое:

$$\|\Theta_\nu(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq c(p) \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot), w} dh \leq c(p) \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \Omega(f, \nu)_{p(\cdot), w} dh = c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot), w}. \quad \square$$

Сформулируем теперь основную теорему данного пункта.

Теорема 2. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu) \right]$. Тогда для $f \in L_w^{p(\cdot)}$ имеет место оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} &\leq \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} + \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot), w} + \\ &+ \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ следует, что

$$\|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \quad (19)$$

Далее, при условиях теоремы система Хаара образует базис в $L_w^{p(x)}$ (см. теорему А), поэтому

$$\|Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}.$$

Но тогда в силу линейности оператора $Q_n(f)$ и свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ для 3-го слагаемого в (18) получаем:

$$\begin{aligned} \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} &= \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f)\|_{p(\cdot), w} \leq \\ &\leq c(p, w) \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (20)$$

Наконец, свойства 3, 4 оператора $\Theta_\nu(f)$ и теорема 1 позволяют написать для второго слагаемого из (18) оценку:

$$\begin{aligned} \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot), w} &\leq \frac{c(p, w)}{n} \|\Theta'_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} \leq \\ &\leq \frac{c(p, w)}{n} \cdot \frac{\Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}}{1/n} = c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство завершается подстановкой оценок (19)–(21) в (18). □

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
2. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 509. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. P. 312. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Шарапудинов И. И. Приближение функций из пространства Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье – Хаара // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 2. С. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.
6. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тез. докл. междунар. науч. конф. (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). Владикавказ, 2013. С. 68–69.
7. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара



- в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. мат. журн. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
9. Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.
10. Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. Math. Inequal. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
11. Шах-Эмиров Т. Н. О равномерной ограниченности семейства операторов Стеклова в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Вестн. ДНЦ РАН. 2014. Вып. 54. С. 12–17.
12. Соболев И. М. Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с.

Approximation of Functions by Fourier – Haar Sums in Weighted Variable Lebesgue and Sobolev Spaces

M. G. Magomed-Kasumov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, rasuldev@gmail.com

It is considered weighted variable Lebesgue $L_w^{p(x)}$ and Sobolev $W_{p(\cdot), w}$ spaces with conditions on exponent $p(x) \geq 1$ and weight $w(x)$ that provide Haar system to be a basis in $L_w^{p(x)}$. In such spaces there were obtained estimates of Fourier – Haar sums convergence speed. Estimates are given in terms of modulus of continuity $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w}$, based on mean shift (Steklov's function).

Key words: weighted space, Lebesgue space, Sobolev space, variable exponent, modulus of continuity, Steklov's function, direct theorems of approximation theory, convergence speed, Fourier – Haar sums, Muckenhoupt condition.

References

- Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0, 1])$. *Mat. Zametki*, 1979, vol. 26, no. 4, pp. 613–632. DOI: 10.1007/BF01159546.
- Sharapudinov I. I. *Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces*. Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
- Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 509 p. DOI : 10.1007/978-3-642-18363-8.
- Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2013. 312 p. DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3.
- Sharapudinov I.I. Approximation of function by Fourier – Haar sums in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces by Fourier – Haar sums. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 2, pp. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.
- Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Poriadkovyi analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniia: tezisy dokladov mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Vladikavkaz, 14–20.07.2013). Vladikavkaz, 2013, pp. 68–69 (in Russian).
- Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 38–46 (in Russian).
- Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989.
- Sharapudinov I.I. On the basis property of the Haar system in the space $L^p(t)([0, 1])$ and the principle of localization in the mean. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1987, vol. 58, no. 1, pp. 279–287. DOI: 10.1070/SM1987v058n 01ABEH003104.
- Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in generalized lebesgue spaces $L^{p(x)}$. *J. Math. Inequal.*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 285–299.
- Shakh-Emirov T. N. O ravnornomnoi ogranichennosti semeistva operatorov Steklova v vesovykh prostranstvakh Lebeга s peremennym pokazatelem [Uniform boundedness of Steklov's operators families in weighted variable Lebesgue spaces]. *Vestnik DNC RAN*, 2014, iss. 54, pp. 12–17 (in Russian).
- Sobol I. M. *Mnogomernye kvadratnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional Quadrature Formulas and Haar Functions]. Moscow, Nauka, 1969, 288 p. (in Russian).