



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Головин, А. Г. Петров, О движении двух пузырей в жидкости малой вязкости, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1968, том 9, выпуск 3, 29–36

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

16 марта 2025 г., 16:44:54



О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ПУЗЫРЕЙ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. Головин, А. Г. Петров

(Москва)

Далекое столкновение пузырей в жидкости малой вязкости изучаются при помощи уравнений Лагранжа. Функция Лагранжа равна кинетической энергии идеальной жидкости, обтекающей пузыри. Обобщенные внешние силы включают в себя силу Архимеда и силу вязкого сопротивления жидкости при обтекании каждого пузыря. Показано, что азимутальный угол утраивается в результате далеких столкновений. Рассчитана траектория относительного движения пузырей в случае, когда движение происходит с достаточно большой скоростью относительного движения, позволяющей пренебречь влиянием вязкости за время столкновения, а также в случае медленного относительного движения, когда вязкие силы определяют движение. Приведены оценки дифференциального «эффективного сечения» упругого рассеяния и «сечения слияния» пузырей.

**1. Уравнение Лагранжа.** Рассматривается система из двух сферических пузырей, радиусы которых равны  $a_i (i = 1, 2)$ . Пусть пузыри движутся со скоростями  $u_i$  в жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$ . Предполагается, что числа Рейнольдса  $R_i = u_i a_i / \nu$  удовлетворяют условию  $1 \ll R_i < 300$ .

Считая поле скоростей жидкости совпадающим с полем скоростей идеальной жидкости, для потенциала поля скоростей можно получить уравнение Лапласа в области, кроме  $r_i' < a_i (r_i' = |r_i'|, r_i' = r - r_i)$

$$\Delta \Phi = 0 \tag{1.1}$$

$r_i$  — координаты центра  $i$ -го пузыря. Граничные условия при  $r_i' = a_i$  имеют вид

$$n_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r_i'} - u_i^\alpha \right) = 0, \quad n_i^\alpha = \frac{r_i'^\alpha}{r_i'} \tag{1.2}$$

и, кроме того,

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \tag{1.3}$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. С точностью до членов порядка  $(a/r)^3$  включительно ( $a$  — средний радиус пузырей,  $r$  — расстояние между их центрами) для потенциала получается следующее выражение [1]:

$$\Phi = - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i^2}{2} \Phi_i^\alpha u_i^\alpha, \quad \Phi_i^\alpha = \frac{r_i'^\alpha}{r_i'^3} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 a_j^3 \Lambda^{\alpha\beta} \frac{r_j'^\beta}{r_j'^3}$$

$$r = |r|, \quad r = r_1 - r_2, \quad \Lambda^{\alpha\beta} = \frac{3r^\alpha r^\beta}{r^5} - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{r^3}, \quad \delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\alpha = \beta) \\ 0, & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \tag{1.4}$$

Кинетическая энергия идеальной жидкости плотности  $\rho$ , обтекающей систему пузырей, является функцией Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости, и с точностью до членов порядка  $(a/r)^3$  она равна

$$T = 1/3 \pi \rho (a_1^3 u_1^2 + a_2^3 u_2^2 - 3 a_1^3 a_2^3 u_1^\alpha \Lambda^{\alpha\beta} u_2^\beta) \tag{1.5}$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [2], для обобщенных внешних сил можно получить следующее выражение:

$$Q_i^\alpha = - \frac{4\pi}{3} \rho a_i^3 g^\alpha - 12 \pi \rho a_i \left( u_i^\alpha - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 a_j^3 u_j^\beta \Lambda^{\beta\alpha} \right) \tag{1.6}$$

Таким образом, можно написать уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = Q_i \quad (1.7)$$

для системы пузырей в жидкости малой вязкости с точностью до членов порядка  $(a/r)^3$  включительно

$$\begin{aligned} \frac{du_1^\alpha}{dt} &= -\frac{3}{2} a_2^3 u_2^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_2^\gamma - 2 \left( g^\alpha + \frac{3}{2} a_2^3 g^\beta \Lambda^{\beta\alpha} \right) - \frac{18\nu}{a_1^2} \left( u_1^\alpha + \frac{1}{2} a_2^3 u_2^\beta \Lambda^{\beta\alpha} \right) \\ \frac{du_2^\alpha}{dt} &= \frac{3}{2} a_1^3 u_1^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_1^\gamma - 2 \left( g^\alpha + \frac{3}{2} a_1^3 g^\beta \Lambda^{\beta\alpha} \right) - \frac{18\nu}{a_2^2} \left( u_2^\alpha + \frac{1}{2} a_1^3 u_1^\beta \Lambda^{\beta\alpha} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Правая часть уравнений (1.8) содержит ускорения от короткодействующих сил гидродинамического взаимодействия пузырей  $F$ , убывающих как  $r^{-2}$ , а также дальнедействующие силы, убывающие как  $r^{-3}$ .

Считая  $u_1, u_2$  величинами порядка  $u_0 = ga^2/9\nu$  скорости стационарного подъема пузыря среднего радиуса  $a$ , легко оценить порядок величины ускорений от сил  $F$  и  $Q$ :

$$F \sim \left( \frac{ga^2}{9\nu} \right)^2 \frac{a^3}{r^2}, \quad Q \sim \frac{ga^3}{r^3} \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что если рассматривать задачу о столкновении пузырей в области

$$r/a \ll (a\sqrt{ga}/9\nu)^2 = R/9 \quad (1.10)$$

то можно пренебречь наличием сил  $Q$  по сравнению с  $F$  и тогда уравнения (1.8) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1^\alpha}{dt} &= -\frac{3}{2} a_2^3 u_2^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_2^\gamma - 2g^\alpha - \frac{18\nu}{a_1^2} u_1^\alpha \\ \frac{du_2^\alpha}{dt} &= \frac{3}{2} a_1^3 u_1^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_1^\gamma - 2g^\alpha - \frac{18\nu}{a_2^2} u_2^\alpha \end{aligned} \quad (1.11)$$

Эти уравнения пригодны и для  $r/a \gtrsim R/9$ , так как в этой области ускорения от сил  $Q$  пренебрежимо малы по сравнению с  $g$ .

Как показано в предыдущей работе [2], уравнения Лагранжа применимы для описания движения пузырей в системе, если ускорение каждого пузыря мало меняет его скорость за время порядка  $a/u_0$ . Если обозначить через  $b$  прицельный параметр, т. е. расстояние наибольшего сближения между траекториями двух пузырей в отсутствие их взаимодействия, то максимальное значение ускорения, обусловленного парным взаимодействием, оказывается величиной порядка  $a^3 u_0^2 / b^4$ . За время порядка  $a/u_0$  изменение скорости пузыря удовлетворяет неравенству  $u_0 (a/b)^4 \ll u_0$ , если  $(a/b)^4 \ll 1$ .

Таким образом, уравнения (1.11) применимы для описания далеких парных столкновений пузырей, если  $(a/b)^4 \ll 1$ .

**2. О движении двух пузырей в идеальной жидкости.** Уравнения (1.11) могут быть заменены более простыми, если рассматривать задачу о столкновении пузырей при условии, что эффективная длительность столкновения  $\tau_0 = b/u_0$  — начальная скорость относительного движения (пузырей) пренебрежимо мала по сравнению с  $\tau = a^2/18\nu$  (временем релаксации скорости пузыря под действием силы вязкости и силы

Архимеда). Тогда изменение скоростей пузырей при взаимном расстоянии  $r \sim b$  будет определяться главным образом теми же силами, что и при движении пузырей в идеальной жидкости в отсутствие внешних сил. Прочие силы за время  $\tau_0$  не успевают существенно изменить скорости сталкивающихся пузырей.

Таким образом, в области  $r \sim b$  изменение скоростей пузырей описывается уравнениями

$$\frac{du_1^\alpha}{dt} = -\frac{3}{2} a_2^3 u_2^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_2^\gamma, \quad \frac{du_2^\alpha}{dt} = \frac{3}{2} a_1^3 u_1^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_1^\gamma \quad (2.1)$$

являющимися уравнениями Лагранжа для двух сфер, движущихся в идеальной жидкости в отсутствие внешних сил, с функцией Лагранжа, определяемой выражением (1.5).

Из инвариантности функции Лагранжа относительно параллельного сдвига  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} = \text{const}$  следует закон сохранения суммарного импульса

$$P^\alpha = m_1 u_1^\alpha + m_2 u_2^\alpha - \frac{3}{2} (a_1^3 + a_2^3) m_1 m_2 (u_1^\beta + u_2^\beta) \Lambda^{\beta\alpha} \\ m_1 = a_1^3 / (a_1^3 + a_2^3), \quad m_2 = a_2^3 / (a_1^3 + a_2^3) \quad (2.2)$$

Введем вектор относительной скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \quad (2.3)$$

Уравнение, описывающее изменение  $\mathbf{u}$ , легко получить из (2.1)

$$\frac{du^\alpha}{dt} = -\frac{3}{2} (a_2^3 u_2^\beta u_2^\gamma + a_1^3 u_1^\beta u_1^\gamma) \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} \quad (2.4)$$

Если (2.2) и (2.3) разрешить относительно  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , пренебрегая членами порядка  $(a/r)^3$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{P} + m_2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{P} - m_1 \mathbf{u} \quad (2.5)$$

и подставить (2.5) в правую часть уравнения (2.4), то получится уравнение для относительного движения пузырей

$$\frac{du^\alpha}{dt} = -\frac{3}{2} (a_1^3 + a_2^3) (P^\beta P^\gamma + m_1 m_2 u^\beta u^\gamma) \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} \quad (2.6)$$

Это уравнение решается методом последовательных приближений. За нулевое приближение выбирается движение пузырей без их взаимодействия

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{u}_- t \quad (2.7)$$

$\mathbf{b}$  — вектор перпендикулярный скорости  $\mathbf{u}_-$  относительного движения до столкновения длина вектора  $b$  равна прицельному расстоянию. Вектор  $b$  лежит в плоскости, проходящей через центр второго пузыря и траекторию относительного движения первого пузыря в отсутствие их взаимодействия.

В первом приближении для относительной скорости после столкновения  $u_+$  получим следующие выражение:

$$u_+^\alpha = u_-^\alpha - \frac{3}{2} (a_1^3 + a_2^3) \int_{-\infty}^{+\infty} P^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} P^\gamma dt \quad (2.8)$$

Последний член уравнения (2.6) является полной производной по времени

$$u^\beta \frac{\partial \Lambda^{\alpha\gamma}}{\partial r^\alpha} u^\gamma = u^\beta \frac{\partial \Lambda^{\alpha\beta}}{\partial r^\gamma} u^\gamma = \frac{d}{dt} u^\beta \Lambda^{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

и поэтому интеграл, взятый по времени в бесконечных пределах от выражения (2.9), равен нулю. Интеграл (2.8) удобно вычислить в следующей системе координат (фиг. 1): ось  $z$  направлена вдоль скорости  $\mathbf{u}_-$ , ось  $x$  в плоскости векторов  $\mathbf{u}_-$  и  $\mathbf{P}$  пер-

пендикулярно  $u_-$  ось  $y$  перпендикулярно осям  $x$  и  $z$ . В этой системе координат полный импульс  $P$  имеет компоненты

$$P_x = P \sin \alpha, \quad P_z = P \cos \alpha \quad (2.10)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $u_-$  и  $P$ .

Векторы, лежащие в плоскости  $z = 0$ , определяются соответствующими комплексными числами  $x + iy$ . Тогда вектор  $b$  примет вид

$$b = b e^{i\varphi} = x + iy \quad (2.11)$$

Во введенной системе координат интеграл (2.8) преобразуется к такому выражению:

$$u_+ = u_- - \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{u_-} P^2 \sin^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} dz \quad (2.12)$$

Из электростатики известно, что потенциал плоского поля равномерно заряженной бесконечной нити с линейной плотностью заряда единица равен  $-2 \ln b = -2 \operatorname{Re} \operatorname{Ln} b$  — действительной части аналитической функции. Интеграл (2.12) является напряженностью поля с таким потенциалом.

Воспользуемся тем, что для произвольной аналитической функции  $f(b)$  от аргумента  $b = x + iy$  в силу условий Коши — Римана

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \operatorname{Re} f(b) = \overline{\frac{\partial}{\partial x} f(b)} = \frac{\overline{df}}{db} \quad (2.13)$$

Тогда при помощи формулы (2.13) легко получить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} dz = -2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \operatorname{Re} \operatorname{Ln} b = -2 \frac{d}{db} \operatorname{Ln} b, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} dz = -2 \frac{d^2}{db^2} \operatorname{Ln} b$$

Итак вектор скорости относительного движения равен

$$u_+ = u_- + 6 \frac{P^2}{u_-} \sin^2 \alpha \frac{a_1^3 + a_2^3}{b^3} e^{3i\varphi} \quad (2.14)$$

Вектор скорости относительного движения  $u_+$ , как видно из (2.14) с точностью до членов порядка  $(a/b)^3$  включительно, сохраняет свою длину  $|u_+| = |u_-|$  и определяется углом  $\theta$  между векторами  $u_+$  и  $u_-$  и азимутальным углом  $\psi$  в плоскости  $z = 0$ . Углы  $\theta, \psi$  можно выразить через параметры столкновения

$$\theta = 6(P/u_-)^2 \sin^2 \alpha (a_1^3 + a_2^3) / b^3, \quad \psi = 3\varphi \quad (2.15)$$

Азимутальный угол утраивается в результате действия нецентральных сил при столкновении. В интервале углов  $\psi, \psi + d\psi$  после рассеяния попадают частицы с первоначальным углом в интервале

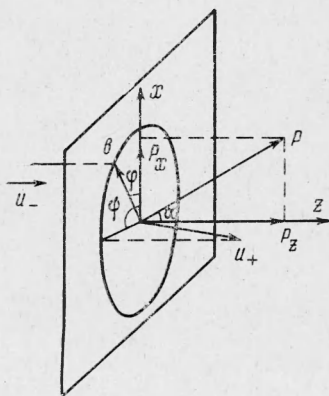
$$1/3 \psi, 1/3 \psi + 1/3 d\psi$$

а также

$$\psi 1/3 \pm 2/3 \pi, 1/3 \psi \pm 2/3 \pi + 1/3 d\psi$$

Проинтегрированное по азимутальному углу  $\varphi$  дифференциальное сечение рассеяния можно записать в виде

$$d\sigma = 2\pi (4/3)^{1/3} (a_1^3 + a_2^3)^{2/3} \frac{P^2 \sin^2 \alpha}{u_-^2} \frac{d\theta}{\theta^{5/3}} = \\ = 2\pi \left( \frac{4}{3} \right)^{1/3} (a_1^3 + a_2^3)^{2/3} \frac{[u_1 \times u_2]^2}{u_-^4} \frac{d\theta}{\theta^{5/3}} \quad (2.16)$$



Фиг. 1

В результате столкновения пузырей вектор скорости относительного движения поворачивается на угол  $\theta$ . Компонента скорости первого пузыря

ря вдоль первоначального направления  $u_-$  уменьшается на величину

$$m_2 u_- (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m_2 u_- \theta^2 \quad (2.17)$$

Величина типа средней теряемой скорости пузыря, средней скорости изменения энергии при столкновении пузыря с другими, как известно из кинетической теории газов [3], определяется транспортным сечением столкновения

$$\sigma_t = \int (1 - \cos \theta) d\sigma \quad (2.18)$$

основной вклад в который, как видно из (2.16), вносят близкие столкновения. Предполагая, что (2.15) по порядку величины справедливо вплоть до  $\theta \sim 1$  можно получить

$$\sigma_t \sim \pi (a_1 + a_2)^2 [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 / u_-^4 \quad (2.19)$$

Представляет интерес оценка максимально возможного значения  $\sigma_t$ . Уравнения (2.1) справедливы при  $b / u_- \ll a^2 / 18 v$ , т. е. при  $u_- \gg \gg 18 v b / a^2$ ;  $[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \ll u_0^2 u_-^2$ . Поэтому

$$\sigma_t \ll \frac{1}{18} \pi (a_1 + a_2)^2 R \quad (2.20)$$

Таким образом, для близкого к изотропному распределению скоростей относительного движения транспортное сечение столкновения может существенно превышать геометрическое сечение столкновения. Но для случая столкновения пузырей с параллельными начальными скоростями, как следует из (2.19)  $\sigma_t = 0$ .

При достаточно малом прицельном параметре столкновение пузырей может сопровождаться их слиянием. Вероятность такого процесса можно выразить через «сечение слияния пузырей».

Рассмотрим траекторию относительного движения пузырей в идеальной жидкости. Из уравнений (2.6) следует, что проекции радиус-вектора  $\mathbf{r}$  на плоскость  $z = 0$  и ось  $z$  равны

$$x + iy = be^{i\varphi} - \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{u_-^2} \int_{-\infty}^{u_- t} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_{-\infty}^{z'} (P^\alpha P^\beta + m_1 m_2 u_-^\alpha u_-^\beta) \Lambda^{\alpha\beta} dz' dz$$

$$z = u_- t - \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{u_-^2} \int_{-\infty}^{u_- t} (P^\alpha P^\beta + m_1 m_2 u_-^\alpha u_-^\beta) \Lambda^{\alpha\beta} dz \quad (2.21)$$

Вычисление соответствующих интегралов при помощи (2.13) приводит к следующему результату:

$$\frac{x + iy}{b} = e^{i\varphi} + \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{b^3} \left\{ \frac{P^2}{u_-^2} \left[ 2 \left( \frac{r+z}{b} - \frac{b}{r} \right) \sin^2 \alpha e^{3i\varphi} - \right. \right.$$

$$\left. - \left( 1 + \frac{z}{r} \right) \sin 2\alpha e^{2i\varphi} - \frac{b^2 z}{r^3} \sin 2\alpha \cos \varphi e^{i\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^3}{r^3} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi) e^{i\varphi} \right] + m_1 m_2 \frac{b^3}{r^3} e^{i\varphi} \left\}$$

$$z = u_- t - \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{b^3} \left\{ \frac{P^2}{u_-^2} \left[ \left( 1 + \frac{z}{r} \right) \sin^2 \alpha \cos 2\varphi - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{b^2 z}{r^3} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi) - \frac{b^3}{r^3} \sin 2\alpha \cos \varphi \right] - m_1 m_2 \frac{b^2 z}{r^3} \left\} \quad (2.22)$$

Условие применимости уравнений (2.22)  $(a/b)^3(P/u_-)^2 \ll 1$ , выполняется с учетом того, что  $u_- \gg 18v/b/a^2$ ,  $P \sim u_0$  для далеких столкновений с прицельным параметром  $b \gg a(R/18)^{2/3}$ . Столкновения, происходящие с меньшими прицельными параметрами в интервале  $a \lesssim b \lesssim a(R/18)^{2/3}$ , приводят к рассеянию на немалые углы, а с прицельными параметрами  $b \lesssim a$  могут приводить к слиянию пузырей.

Особенно простой вид имеет траектория (2.22) для случая столкновения пузырей с параллельными начальными скоростями ( $\alpha = 0$ )

$$\begin{aligned} x + iy &= be^{i\varphi} \left( 1 + \varepsilon \frac{b^3}{r^3} \right), & z &= u_- t \left( 1 + \varepsilon \frac{b^3}{r^3} \right) \\ \varepsilon &= \frac{3}{2} \frac{a_1^3 + a_2^3}{b^3} \left( \frac{P^2}{u_-^2} + m_1 m_2 \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Как видно из (2.23), сечение слияния пузырей в случае движения со скоростями относительного движения  $u_- \gg 18v/a$  при  $\alpha = 0$  должно быть несколько меньше, чем геометрическое сечение столкновения  $\pi(a_1 + a_2)^2$ .

**3. Квазистационарная задача.** Рассматривается задача о столкновении пузырей при условии, что эффективная длительность столкновения  $\tau_0 = b/u_-$  велика по сравнению с временем релаксации скорости каждого пузыря  $\tau_i = a_i^2/18v$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда ускорение каждого пузыря

$$\frac{du_i}{dt} \sim u_i/\tau$$

можно считать пренебрежимо малой величиной по сравнению с силой вязкого трения.

Уравнение движения пузырей можно представить в виде

$$u_1^\alpha = -2\tau_1 g^\alpha - \frac{3}{2} a_2^3 \tau_1 u_2^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_2^\gamma \quad (3.1)$$

$$u_2^\alpha = -2\tau_2 g^\alpha + \frac{3}{2} a_1^3 \tau_2 u_1^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} u_1^\gamma$$

Скорость движения  $i$ -го пузыря мало отличается от  $-2\tau_i g^\alpha$ . Поэтому (3.1) можно заменить на уравнения

$$u_1^\alpha = -2\tau_1 g^\alpha - 6a_2^3 \tau_1 \tau_2^2 g^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} g^\gamma \quad (3.2)$$

$$u_2^\alpha = -2\tau_2 g^\alpha + 6a_1^3 \tau_1^2 \tau_2 g^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} g^\gamma$$

Полагая, что  $|a_1 - a_2| \ll a$ ,  $a \approx a_1$  можно получить уравнение относительного движения

$$\frac{dr^\alpha}{dt} = -2\Delta\tau g^\alpha - 12a^3 \tau^3 g^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} g^\gamma \quad (3.3)$$

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2, \quad \tau = \tau_1$$

В полярной системе координат  $r$ ,  $\theta(r = |\mathbf{r}|, \theta$  — угол между  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{r}$ ) уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = 2\Delta\tau g \cos \theta + 36a^3 \tau^3 g^2 \frac{3\cos^2 \theta - 1}{r^4} \quad (3.4)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = -2\Delta\tau g \sin \theta + 36a^3 \tau^3 g^2 \frac{\sin 2\theta}{r^4}$$

Отсюда следует уравнение траектории относительного движения

$$\frac{d\xi}{\xi d\theta} = \frac{3\cos^2 \theta - 1 - \xi^2 \cos \theta}{\sin 2\theta - \xi^2 \sin \theta} \quad (3.5)$$

$$\xi = \frac{r}{a} \left( \frac{4\Delta a}{Ra} \right)^{1/4} \quad \left( \begin{array}{l} \Delta a \ll a_1 - a_2 \\ R = ga^3/9\nu^2 \end{array} \right)$$

После интегрирования (3.5), получается семейство траекторий зависящих от параметра  $C$

$$\xi^2 \sin^2 \theta = C \pm \sqrt{C^2 - \sin^3 \theta \sin 2\theta} \quad (3.6)$$

Вид интегральных кривых в полярных координатах  $\xi, \theta$  представлен на фиг. 2. Уравнение (3.5) имеет особую точку: седло

$$\cos \theta_0 = 1 / \sqrt{5}, \quad \xi_0^4 = 2/\sqrt{5}$$

Интегральная кривая (3.6) проходит через седло, если

$$C = C_0 = (4/5)^{5/4} \approx 0.76$$

Движение вдоль траектории описывается уравнением

$$\xi \frac{d\theta}{d\zeta} = -\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{\xi^4}, \quad \zeta = \frac{2}{9} \left( \frac{4\Delta a}{Ra} \right)^{1/4} \frac{g\Delta a}{\nu} t \quad (3.7)$$

Как видно из уравнения (3.7), взаимодействие пузырей происходит в области, размеры которой по порядку величины соответствуют  $\xi = 1$ . Длительность взаимодействия оказывается величиной порядка  $\zeta = 1$ . Однако, если  $C - C_0 \ll C_0$ , то характерное время взаимодействия существенно возрастает. В этом случае в окрестности точки  $\theta_0 = \arcs \cos^{1/5} \sqrt{5}$  уравнение траектории

$$\xi^2 = {}^{5/4} [C + \sqrt{C^2 - C_0^2 + {}^{32/25} \sqrt{5} (\theta - \theta_0)^2}]$$

Время прохождения участка траектории от  $\theta = \theta_0$  до  $\theta_0 - \Delta\theta$

$$\Delta\zeta = {}^{1/2} ({}^{5/4})^{3/8} \int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{1 + 5x^2 + x}}, \quad \eta = \frac{C_0 \Delta\theta}{\sqrt{C^2 - C_0^2}}$$

при стремлении  $C$  к  $C_0$  содержит логарифмическую расходимость.

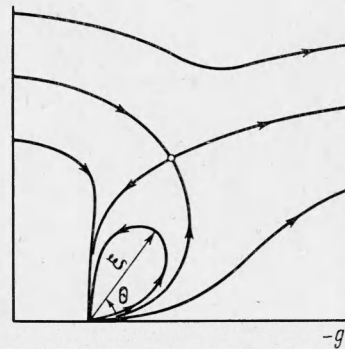
Поэтому можно считать, что пузыри могут образовывать неустойчивое связанное состояние с конечным временем жизни.

Уравнения (3.2) справедливы, если  $b / u_- \gg a^2 / 18 \nu$ , т. е.  $\Delta a / a \ll \ll 9b/Ra$  и  $r \gg a$ . Однако, если полагать, что эти уравнения пригодны для приближенного описания сближения пузырей и в случае  $r \sim a$ , тогда столкновение пузырей, в результате которого происходит непосредственное их касание, осуществляется, если прицельный параметр

$$b < b_0 = a \sqrt{C_0} (Ra / \Delta a)^{1/4} = 0.88 a (Ra / \Delta a)^{1/4}.$$

Так можно оценить наибольшее значение сечения пузырей, приводящие к их слиянию

$$\sigma_c = \pi a^2 C_0 \sqrt{Ra / \Delta a} \quad (3.8)$$



Фиг. 2



Для рассматриваемых столкновений  $b < b_0$ , поэтому из условий справедливости уравнений (3.2) следует, что

$$\Delta a/a \ll (9 / R^2 \sqrt{c_0})^{1/2} R$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении

$$\sigma_c \gg \pi a^2 (R / 3)^{1/2}$$

Расходимость сечения при  $\Delta a \rightarrow 0$  оказывается несущественной при расчете среднего числа столкновений в единицу времени, отнесенного к одному пузырю, для системы со средним числом пузырей в единице объема, равным  $N$ :

$$-\frac{dN}{Ndt} = \frac{1}{2} u_- \sigma_c N = \pi a^2 \frac{ga^2}{9\nu} NC_0 \left( \frac{R\Delta a}{a} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

при условии, что средний радиус пузырей равен  $a$  и средне-квадратичное отклонение  $\Delta a$  удовлетворяет условию

$$\Delta a/a \ll (9 / R^2 \sqrt{C_0})^{1/2} R$$

Таким образом, скорость слияния пузырей близкого радиуса не превышает

$$-\frac{dN}{Ndt} \ll 3R^{1/2} \pi a^2 \frac{ga^2}{9\nu} N \quad (3.10)$$

Эти оценки позволяют утверждать, что в случае столкновений пузырей близкого радиуса вероятность слияния является величиной того же порядка, что и вероятность столкновения пузырей радиуса порядка  $a$ , но заметно отличающихся по размерам, сближающихся со скоростью  $u_- \sim \sim ga^2 / 9\nu$ , при условии, что сечение слияния  $\sigma_c \sim \pi a^2$ .

Авторы благодарят В. Г. Левича и В. В. Толмачева за обсуждение работы и замечания.

Поступила 16 II 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Милн - Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. «Мир», 1964.
2. Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.