



Общероссийский математический портал

В. Л. Попов, О сопряжённости стабилизаторов действий редутивных групп, *Матем. заметки*, 2019, том 105, выпуск 4, 589–591

DOI: 10.4213/mzm12368

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.170.81.33

4 октября 2024 г., 08:54:40





## О сопряжённости стабилизаторов действий редуктивных групп

В. Л. Попов

Доказано, что основной результат работы [1] является частным случаем более общего утверждения, которое можно вывести с помощью короткого рассуждения из классических теорем Ричардсона и Луны.

Библиография: 7 названий.

**Ключевые слова:** редуктивная алгебраическая группа, действие, стабилизатор, сопряженность.

1. В недавнем препринте [1] получен, используя редукцию с помощью теоремы Кемпфа–Несс к теореме о главном орбитном типе для компактных групп Ли, следующий основной результат:

“Пусть  $G$  – редуктивная аффинная алгебраическая группа и пусть  $(\rho, V)$  – регулярное представление  $G$ . Пусть  $X$  – такое неприводимое  $\mathbb{C}^\times G$ -инвариантное замкнутое по Зарисскому подмножество, что  $G$  имеет замкнутую орбиту максимальной размерности среди размерностей всех орбит (это эквивалентно тому, что орбиты общего положения замкнуты). Тогда существует подмножество  $W$  в  $X$ , открытое и плотное в метрической топологии, с дополнением меры 0 и такое, что если  $x, y \in W$ , то  $(\mathbb{C}^\times G)_x$  сопряжена  $(\mathbb{C}^\times G)_y$ . Более того, если  $Gx$  – замкнутая орбита максимальной размерности и если  $x$  – гладкая точка  $X$ , то существует такая  $y \in W$ , что  $(\mathbb{C}^\times G)_x$  содержит сопряженную к  $(\mathbb{C}^\times G)_y$ .”

Ниже показано, что из классических теорем Ричардсона и Луны можно вывести с помощью короткого рассуждения более общее утверждение.

2. Мы фиксируем алгебраически замкнутое поле  $k$  характеристики 0 и свободно используем стандартные обозначения из [2], [3].

Пусть  $G$  – такая редуктивная алгебраическая группа, что  $G = CR$ , где  $C$  – диагонализируемая алгебраическая подгруппа центра  $G$ , а  $R$  – редуктивная алгебраическая подгруппа  $G$ . Мы обозначаем через  $\mathcal{X}(C)$  группу характеров  $C$  и, для заданного алгебраического  $C$ -модуля  $M$  и характера  $\alpha \in \mathcal{X}(C)$ , через  $M_\alpha$  весовое подпространство веса  $\alpha$  в  $M$ . Поскольку  $C$  диагонализируема,  $M$  является прямой суммой пространств  $M_\alpha$ ; см. [2; III.8.17].

Пусть  $X$  – неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, снабженное регулярным действием  $G$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Используя предыдущие обозначения, допустим, что существует замкнутая  $R$ -орбита размерности максимальной среди размерностей всех  $R$ -орбит в  $X$ . Тогда выполнено следующее:*

- (а) *в  $X$  существует такое плотное открытое (в топологии Зарисского) подмножество  $U$ , что если  $x, y \in U$ , то  $G_x$  сопряжена  $G_y$ ;*
- (б) *если  $R$ -орбита  $R(z)$  точки  $z \in X$  замкнута, то существует такая точка  $y \in U$ , что  $G_z$  содержит сопряженную к  $G_y$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (а) Пусть  $S$  – множество особых точек многообразия  $X$ . Мы можем (и будем) предполагать, что  $S \neq \emptyset$ , поскольку в противном случае подлежащее доказательству утверждение немедленно следует из теоремы Ричардсона [4; предложение 5.3] (см. также [5; следствие 8]). Поскольку  $S$  является замкнутым  $G$ -инвариантным подмножеством в  $X$ , мы имеем

$$k[S] = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}(C)} k[S]_{\alpha}.$$

Предположение об  $R$ -орбите влечет существование в  $X$  плотного открытого подмножества,  $R$ -орбиты точек которого замкнуты и имеют максимальную размерность [6; теорема 4]. Следовательно, существует такая замкнутая  $R$ -орбита  $\mathcal{O}$ , что  $S \cap \mathcal{O} = \emptyset$ . Отсюда вытекает существование такой функции  $f \in k[X]^R$ , что  $f|_S = 0$ ,  $f|_{\mathcal{O}} = 1$  (см. например, [2; лемма 8.19 (ii)] или [3; теорема 4.7]). Поскольку  $C$  централизует  $R$ , алгебра  $k[X]^R$  является  $C$ -инвариантной, так что мы имеем весовое разложение

$$k[X]^R = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}(C)} (k[X]^R)_{\alpha}.$$

Пусть  $\pi_{\alpha}: k[X]^R \rightarrow (k[X]^R)_{\alpha}$  является естественной проекцией. Поскольку  $f|_{\mathcal{O}} \neq 0$ , существует такой характер  $\alpha \in \mathcal{X}(C)$ , что для  $f_{\alpha} := \pi_{\alpha}(f)$  мы имеем  $f_{\alpha}|_{\mathcal{O}} \neq 0$ . Из  $G = CR$  следует, что функция  $f_{\alpha}$  является полуинвариантом группы  $G$ . В силу  $G$ -инвариантности  $S$ , гомоморфизм  $\varrho: k[X] \rightarrow k[S]$ ,  $h \mapsto h|_S$ , является  $G$ -эквивариантным, поэтому  $\varrho(k[X]_{\alpha}) \subseteq k[S]_{\alpha}$ . Ввиду  $\varrho(f) = 0$ , отсюда следует, что  $\varrho(f_{\alpha}) = 0$ . Таким образом,  $f_{\alpha}$  является ненулевым полуинвариантом группы  $G$ , обращающимся в нуль на  $S$ . Значит,  $X_{f_{\alpha}} := \{x \in X \mid f_{\alpha}(x) \neq 0\}$  является  $G$ -инвариантным плотным открытым подмножеством в  $X$ , которое является гладким аффинным многообразием. Теперь по теореме Ричардсона [4; предложение 5.3] (см. также [5; следствие 8]), в  $X_{f_{\alpha}}$  существует такое плотное открытое подмножество  $U$ , что если  $x, y \in U$ , то  $G_x$  сопряжена  $G_y$ . Это доказывает (а).

(б) Пусть  $\overline{G(z)}$  – замыкание  $G$ -орбиты точки  $z$  в  $X$ . Тогда  $B := \overline{G(z)} \setminus G(z)$  является замкнутым  $G$ -инвариантным подмножеством в  $X$ . Если  $B = \emptyset$ , то существование  $y$  немедленно следует из теоремы Луны о слайсе, см. [5; замечание 4° на с. 98] (ср. [3; теорема 6.3]). Рассмотрим реперь случай  $B \neq \emptyset$ . Поскольку  $B \cap R(z) = \emptyset$ , теми же рассуждениями, что и выше в доказательстве (а), устанавливается существование такого  $G$ -полуинварианта  $f \in k[X]^R$ , что  $f|_B = 0$ ,  $f|_{R(z)} = 1$ . Из последнего равенства следует, что  $f$  не обращается в нуль нигде на  $G(z)$ . Поэтому  $X_f$  является  $G$ -инвариантным плотным открытым подмножеством в  $X$ , содержащим  $G(z)$ , и  $G(z)$  замкнута в  $X_f$ . Теперь, ввиду аффинности  $X_f$ , существование  $y$  вытекает из теоремы Луны о слайсе, как и выше. Это доказывает (б).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [1; § 6] приведен пример линейного действия полупростой группы, показывающий, что из существования точки с тривиальным стабилизатором не вытекает тривиальность стабилизаторов точек общего положения. Следует отметить, что этот феномен не является новым, аналогичные примеры известны давно (возможно, самый ранний принадлежит Ричардсону, см. [5; замечание 4° на с. 98]).

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. R. Wallach, *Principal Orbit Type Theorems for Reductive Algebraic Group Actions and the Kempf–Ness Theorem*, 2018, [arXiv:1811.07195v1](https://arxiv.org/abs/1811.07195v1).
- [2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer, New York, 1991.
- [3] V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic Geometry IV*, Encyclopaedia of Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.
- [4] R. W. Richardson, “Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero”, *Invent. Math.*, **16** (1972), 6–14.
- [5] D. Luna, “Slices étales”, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81–105.
- [6] В. Л. Попов, “Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34:3** (1970), 523–531.

**В. Л. Попов**

Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук, г. Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, г. Москва  
*E-mail*: [popovvl@mi-ras.ru](mailto:popovvl@mi-ras.ru)

Поступило

04.03.2019

Принято к публикации

04.03.2019