Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. В. Бусаркина, Некоторые 2-свойства группы автотопизмов p-примитивной полуполевой плоскости,,
Алгебра и логика, 2000, том 39, номер 4, 452–464

https://www.mathnet.ru/al286

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
24 января 2026 г., 00:11:35

Алгебра и логика, 39, N 4 (2000), 452—464

УДК 514.146

НЕКОТОРЫЕ 2-СВОЙСТВА ГРУППЫ АВТОТОПИЗМОВ p-ПРИМИТИВНОЙ ПОЛУПОЛЕВОЙ ПЛОСКОСТИ

И. В. БУСАРКИНА

Пусть π — полуполевая плоскость порядка q^4 с ядром $K \simeq GF(p^s)$ ($q = p^r$, $p > 2$ — простое число, $s \leqslant r$). Коллинеацию β называют p-примитивной бэровской, если она фиксирует бэровскую подплоскость поточечно и ее порядок является p-примитивным делителем числа $q^2 - 1$ (т. е. $|\beta| \mid (q^2 - 1)$, но $|\beta| \nmid (p^i - 1)$, $i = 1, ..., 2r - 1$). Полуполевую плоскость порядка q^4 с ядром K, где $q = p^r$ и $p > 2$ — простое число, называют *p-примитивной полуполевой плоскостью*, если она допускает p-примитивную бэровскую коллинеацию.

В [1] найден вид регулярного множества такой плоскости:

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \right\},$$

где u, $f(v) \in GF(q^2) = F$, а $\{v\}$ — аддитивное множество матриц над k, $|\{v\}| = q^2$.

Здесь исследуются плоскости с регулярным множеством

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \middle| \, u, v, f(v) \in GF(q^2) = F \right\},$$

где $f(v) = f_0 v + f_1 v^p + ... + F_{2r-1} v^{p^{2r-1}}$ — аддитивная функция в F, τ нормализует поле. Главным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка q^4 над ядром $K \simeq GF(p^s)$ с регулярным множеством Σ, ($q = p^r$ и $p > 2$ —*

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2000

простое число). Тогда группа автотопизмов A такой плоскости содержит абелеву подгруппу

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_4 & & \\ & & B_1 & \\ & & & B_4 \end{bmatrix} \right\},$$

где A_i, $B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{-\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$. *Кроме того, если ранг плоскости больше* 4, *или, в случае ранга* 4, $f(v) \neq f_0 v$ *и* $f(v) \neq f_r v^q$, *то некоторая силовская* 2-*подгруппа* S *группы* A *имеет вид* $S = H_2 \cdot \langle g \rangle$, *где* H_2 — *силовская* 2-*подгруппа группы* H, *а* g — 2-*элемент вида*

$$g = \begin{bmatrix} \tau' A_1 & & & \\ & \tau' A_4 & & \\ & & \tau' B_1 & \\ & & & \tau' B_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь τ' *нормализует поле* F, A_i, $B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i^{\tau'} A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{-\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$.

Обозначим через A группу автотопизмов плоскости π. Группа A содержит подгруппу бэровских коллинеаций

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \middle| \; c \in F, \; c^{q+1} = 1 \right\}.$$

ЛЕММА 1. *Централизатор подгруппы* B *в группе автотопизмов имеет вид*

$$C(B) = H = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_4 & & \\ & & B_1 & \\ & & & B_4 \end{bmatrix} \right\},$$

где A_i, $B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{-\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть коллинеация α централизует бэровскую коллинеацию. Тогда

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & \\ A_3 & A_4 & & \\ & & B_1 & B_2 \\ & & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & \\ A_3 & A_4 & & \\ & & B_1 & B_2 \\ & & B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

где A_i, B_i — $n \times n$-матрицы над ядром плоскости, $|c| = q - 1$. Перемножим матрицы и сравним соответствующие элементы:

$$\begin{aligned} A_2 c &= A_2, & B_2 &= cB_2, \\ A_3 &= cA_3, & B_3 c &= B_3, \\ A_4 c &= cA_4, & B_1 c &= cB_1. \end{aligned}$$

Так как c — элемент достаточно большого порядка, получаем, что $A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0$, а A_4, $B_1 \in F$. Поскольку α — коллинеация, она должна сохранять инцидентность. Значит,

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_4^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_4 \end{bmatrix} \in \Sigma$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} A_1^{-1} u B_1 = x \in F, \\ A_4^{-1} u^q B_4 = x^q \in F, \\ A_1^{-1} \tau v B_4 = \tau y \in \tau F, \\ A_4^{-1} f(v) B_1 = f(y) \in F. \end{cases}$$

Поэтому A_1, $B_4 \in F$, и кроме того, $A_1^{-q} B_1^q = A_4^{-1} B_4$. Из последних двух равенств следует, что $y = \tau^{-1} A_1^{-1} \tau v B_4$, $A_4^{-1} f(v) B_1 = f(\tau^{-1} A_1^{-1} \tau v B_4)$. Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при различных степенях v, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Централизатор H в группе автотопизмов равен H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B \in H$, то $C(H) \subseteq C(B) = H$. Поскольку H — абелева, справедливо $C(H) = H$. Лемма доказана.

Дальнейшее изучение группы автотопизмов построим прежде всего на изучении инволюций. Целью исследования будет определение силовской 2-подгруппы. Начнем с изучения строения инволюций из H:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Вместе с единичной коллинеацией они образуют элементарную абелеву группу порядка 8. Обозначим ее K. Далее нам потребуется следующая

ЛЕММА 3. *Пусть F — поле и K — его некоторое подполе. Тогда $N_{GL(V)}(F^{\#}) \simeq F^{\#} \leftthreetimes T_0$, где V — аддитивная группа поля над K, $T_0 = C_T(K)$, $T = \mathrm{Aut}(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим аддитивную группу V поля F как векторное пространство над K. Выберем ненулевые элементы v_1, $v_2 \in V$, для которых $v_2 \notin Kv_1$. Тогда $Kv_1 \cap Kv_2 = 0$ (в противном случае $\exists k_1, k_2 \in K$ такие, что $k_1 v_1 = k_2 v_2$, и $v_2 = k_2^{-1} k_1 v_1 \in Kv_1$, следовательно, $v_2 = 0$). Затем выберем $v_3 \notin Kv_1 \oplus Kv_2$ и так далее. Тогда $V = Kv_1 \oplus \ldots \oplus Kv_m$ — пространство над K с базисом $v_1, \ldots, v_m$. Пусть теперь $T_0 = C_T(K)$, $T = \mathrm{Aut}(F)$. Рассмотрим естественное вложение F и

T_0 в $GL(V)$, а именно, $\widetilde{f} : v \to fv$ и $\widetilde{t} : v \to v^t$. Тогда $\forall t \in T_0$, $\forall v_1, v_2 \in V$ выполняется $(v_1 + v_2)^t = v_1^t + v_2^t$, а, кроме того, $(\alpha v)^t = \alpha v^t (\forall \alpha \in K)$.

Покажем, что $N_{GL(V)}(F^\#) \supseteq T_0$. Пусть $t \in T_0$, $f \in F^\#$. Тогда $t^{-1}ft : v \to v^{t^{-1}ft} = (fv^{t^{-1}})^t = f^t v$, значит, $t^{-1}ft = f^t$ и $N_{GL(V)}(F^\#) \supseteq T_0$. Поэтому $N_{GL(V)}(F^\#) \supseteq F^\# \cdot T_0$. Рассмотрим $F^\# \cap N_0$. Пусть $g \in F^\# \cap T_0$, тогда $\forall v \in V$, $gv = v^g$. Положим $v = 1$, тогда $g = 1$. Значит, $F^\# \cap T_0 = 1$, $F^\# \lhd F^\# \cdot T_0$ и $F^\# \cdot T_0 = F^\# \leftthreetimes T_0$. Отсюда $N_{GL(V)}(F^\#) \supseteq F^\# \leftthreetimes T_0$. В силу сопряженности больших полей (см. [2]) получаем утверждение леммы.

Рассмотрим связь ранга плоскости и действия матрицы τ из множества Σ как автоморфизма поля F. Ранг плоскости π равен ее размерности над левым ядром. Поскольку ядро плоскости должно быть изоморфно подгруппе всех скалярных матриц из поля F, а соотношение

$$\begin{bmatrix} A & \\ & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \tau y \\ f(y) & x^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & A \end{bmatrix}$$

верно для всех матриц $A \in F$ таких, что $A^\tau = A$, то τ централизует только скалярные матрицы в F.

С помощью леммы 3 доказывается следующая

ЛЕММА 4. *Пусть π — полуполевая плоскость ранга $2n$ порядка q над ядром $GF(p^s)$ с регулярным множеством Σ, ($q = p^r$, $p > 2$ — простое, $s \leqslant r$). Тогда поле F из регулярного множества Σ может быть представлено матрицами размерности $n \times n$ над ядром плоскости, $|F| = q^2$, $2r = sn$. Матрица τ централизует только скалярные матрицы в F и $u^\tau = u^{p^s}$ $(\forall u \in F)$.*

ЛЕММА 5. *Централизатор K в группе автотопизмов разрешим и имеет следующее строение*

$$C(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \tau' A_1 & & & \\ & \tau' A_4 & & \\ & & \tau' B_1 & \\ & & & \tau' B_4 \end{bmatrix} \right\},$$

где τ' нормализует поле F, $A_i, B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i^{\tau'} A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{-\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть коллинеация

$$\begin{bmatrix} C & \\ & D \end{bmatrix}$$

централизует K. Тогда

$$\begin{bmatrix} C & \\ & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \\ & D \end{bmatrix},$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} CK_1 = K_1C, \\ DK_2 = K_2D, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$K_1, K_2 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Очевидно, что если

$$K_1, K_2 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

то система (1) справедлива для любых C и D. Если же

$$K_1, K_2 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

то из (1) следует, что

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \\ & C_4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & \\ & D_4 \end{bmatrix},$$

где C_i, D_i, $i = 1, 4$, — матрицы размера $n \times n$ над ядром плоскости.

Проверим условие сохранения инцидентности для такой коллинеации. Выполняется

$$C = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & \\ & C_4^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & \\ & D_4 \end{bmatrix} \in \Sigma,$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{bmatrix} C_1^{-1}uD_1 & C_1^{-1}\tau vD_4 \\ C_4^{-1}f(v)D_1 & C_4^{-1}u^qD_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' & \tau v' \\ f(v') & u'^q \end{bmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц, получаем, что $C_1^{-1}FD_1 = F$ и $C_4^{-1}FD_4 = F$. Значит, $C_i, D_i \in \tau' F$, $i = 1, 4$, где τ' нормализует поле. Заменим C_i и D_i на $\tau' C_i'$ и $\tau' D_i'$ соответственно. Тогда $(C_1'^{-1}D_1')^q = C_4'^{-1}D_4'$ и $C_4'^{-1}f^{\tau'}(v)D_1' = f(C_1'^{-\tau}v^{\tau'}D_4')$. Приравнивая в последнем утверждении коэффициенты при одинаковых степенях v, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 6. *Имеет место $C(K) = H \cdot \langle g \rangle$, где g — некоторый элемент из $C(K) \setminus H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент из $C(K)$:

$$g = \begin{bmatrix} \tau A_1 & & & \\ & \tau A_4 & & \\ & & \tau B_1 & \\ & & & \tau B_4 \end{bmatrix}.$$

Пусть элемент g является порождающим в соответствующей максимальной циклической подгруппе группы $C(K)$. Поскольку для любого другого элемента

$$g_1 = \begin{bmatrix} \tau' A_1 & & & \\ & \tau' A_4 & & \\ & & \tau' B_1 & \\ & & & \tau' B_4 \end{bmatrix}$$

имеем равенство $\tau' = \tau^l$, выполняется включение $g^{-l}g_1 \in H$. Значит, $g_1 = g^l h$, где $h \in H$. Лемма доказана.

Исследуем строение нормализатора K в группе автотопизмов. Пусть

$$N(K) = \left\{ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \right\},$$

где A, B — $n \times n$-матрицы над ядром плоскости. Тогда

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} K = K \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix},$$

где

$$K = \begin{bmatrix} C & \\ & D \end{bmatrix},$$

$$C, D \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Значит, для любой C существует C' такая, что $AC = C'A$. Рассмотрим два случая:

1) $C = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, тогда из $AC = \pm A = C'A$ следует, что $C = C'$, и равенство выполняется для любых A.

2) $C = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, тогда C' может быть равно $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. Значит,

$$AC = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_3 & -A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_3 & -A_4 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $A_2 = A_3 = 0$ или $A_1 = A_4 = 0$. Аналогичное можно показать и для B:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix} \text{ или } B = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим условие сохранения инцидентности.

1. Если $A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0$, то мы получим те же матрицы, что и в $C(K)$.

2. Если $A_2 = A_3 = B_1 = B_4 = 0$, то из условия

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_4^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & B_2 \\ B_3 & \end{bmatrix} \in \Sigma$$

следует включение

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1}\tau v B_3 & A_1^{-1} u B_2 \\ A_4^{-1} u^q B_3 & A_4^{-1} f(v) B_2 \end{bmatrix} \in \Sigma,$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} f(\tau^{-1}A_1^{-1}uB_2) = A_4^{-1}u^qB_3 \in F, \\ (A_1^{-1}\tau vB_3)^q = A_4^{-1}f(v)B_2 \in F. \end{cases}$$

Отсюда A_4, B_2, $B_3 \in \tau'F$, где τ' нормализует поле. Из того, что $\tau^{-1}A_1^{-1}uB_2 \in F$, получаем $A_1 \in \tau'\tau^{-1}F$. Однако из $A_1^{-1}\tau vB_3 \in F$ следует $A_1 \in \tau\tau'F$. Значит, $\tau\tau' = \tau'\tau^{-1}$. Это возможно только в том случае, если $\tau^2 = 1$, т. е. $u^\tau = u^q$ или $u^\tau = u$ (тогда в силу леммы 4 плоскость π имеет ранг 4 или 2). Заменим A_1 на $\tau\tau'A_1'$, A_4 на $\tau'A_4'$, а B_i на $\tau'B_i'$:

$$\begin{cases} f(A_1'^{-q}u^{\tau'}B_2') = A_4'^{-1}u^{q\tau'}B_3', \\ (A_1'^{-1}v^{\tau'}B_3')^q = A_4'^{-1}f^{\tau'}(v)B_2'. \end{cases}$$

Поэтому $f(v) = f_rv^q$, где $f_r \in F$. И тогда

$$\begin{cases} f_rA_1'^{-1}B_2'^q = A_4'^{-1}B_3', \\ (A_1'^{-1}B_3')^q = A_4'^{-1}f_r^{\tau'}B_2'. \end{cases}$$

3. Если $A_1 = A_4 = B_2 = B_3 = 0$, то из условия

$$\begin{bmatrix} & A_3^{-1} \\ A_2^{-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_4 \end{bmatrix} \in \Sigma$$

следует включение

$$\begin{bmatrix} A_3^{-1}f(v)B_1 & A_3^{-1}u^qB_4 \\ A_2^{-1}uB_1 & A_2^{-1}\tau vB_4 \end{bmatrix} \in \Sigma,$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} f(\tau^{-1}A_3^{-1}u^qB_4) = A_2^{-1}uB_1 \in F, \\ (A_3^{-1}f(v)B_1)^q = A_2^{-1}\tau vB_4 \in F. \end{cases}$$

Отсюда A_3, B_1, $A_2 \in \tau'F$, где τ нормализует поле. Тогда из $\tau^{-1}A_3^{-1}u^qB_4 \in$ $\in F$ получаем $B_4 \in \tau'\tau F$. С другой стороны, из $A_2^{-1}\tau vB_4 \in F$ следует $B_4 \in$ $\in \tau^{-1}\tau'F$. Это возможно только в том случае, если $\tau^2 = 1$, т. е. $u^\tau = u^q$ или $u^\tau = u$ (тогда в силу леммы 4 плоскость π имеет ранг 4 или 2). Заменим B_4 на $\tau'\tau B_4'$, B_1 на $\tau'B_1'$, а A_i на $\tau'A_i'$:

$$\begin{cases} f(A_3'^{-q}u^{\tau'}B_4') = A_2'^{-1}u^{\tau'}B_1', \\ (A_3'^{-1}f^{\tau'}(v)B_1')^q = A_2'^{-1}v^{q\tau'}B_4'. \end{cases}$$

Поэтому $f(v) = f_0 v$, где $f_0 \in F$. И тогда

$$\begin{cases} f_0 A_3'^{-q} B_4' = A_2'^{-1} B_1', \\ (A_3'^{-1} f_0^{\tau'} B_1')^q = A_2'^{-1} B_4'. \end{cases}$$

4. Если $A_1 = A_4 = B_1 = B_4 = 0$, то из условия

$$\begin{bmatrix} & A_3^{-1} \\ A_2^{-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \tau v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & B_2 \\ B_3 & \end{bmatrix} \in \Sigma$$

следует включение

$$\begin{bmatrix} A_3^{-1} u^q B_3 & A_3^{-1} f(v) B_2 \\ A_2^{-1} \tau v B_3 & A_2^{-1} u B_2 \end{bmatrix} \in \Sigma,$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} f(\tau^{-1} A_3^{-1} f(v) B_2) = A_2^{-1} \tau v B_3 \in F, \\ (A_3^{-1} u^q B_3)^q = A_2^{-1} u B_2 \in F. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы вытекает A_3, B_2, A_2, $B_3 \in \tau' F$, где τ' нормализует поле. Тогда из первого уравнения имеем $A_2^{-1} \tau v B_3 \in F$, а значит, $\tau \in F$. В этом случае мы получаем плоскость ранга 2.

Таким образом, доказана

ЛЕММА 7. *Нормализатор K в группе автотопизмов содержит следующие элементы группы автотопизмов*

$$\begin{bmatrix} \tau' A_1 & & & \\ & \tau' A_4 & & \\ & & \tau' B_1 & \\ & & & \tau' B_4 \end{bmatrix},$$

где τ' нормализует поле F, $A_i, B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i^{\tau'} A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$.

Кроме того, $N(K)$ может содержать следующие элементы:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \tau\tau' A_1 & & & \\ & \tau' A_4 & & \\ & & 0 & \tau' B_2 \\ & & \tau' B_3 & 0 \end{bmatrix},$$

если $f(v) = f_r v^q$ *(где* $f_r \in F$*), ранг плоскости* $\pi(f)$ *равен* 4 *или* 2*, а также либо* $\tau' = 1$*, либо* $u^{\tau'} = u^q$ $(\forall u \in F)$, $A_1, A_4, B_2, B_3 \in F$, $f_r A_1^{-1} B_2^q = A_4^{-1} B_3$, $(A_1^{-1} B_3)^q = A_4^{-1} B_2 f_r^{\tau'}$;

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} 0 & \tau' A_2 & & \\ \tau' A_3 & 0 & & \\ & & \tau' B_1 & \\ & & & \tau'\tau B_4 \end{bmatrix},$$

если $f(v) = f_0 v$ *(где* $f_0 \in F$*), ранг плоскости* $\pi(f)$ *равен* 4 *или* 2*, а также* $\tau' = 1$*, либо* $u^{\tau'} = u^q$ $(\forall u \in F)$, A_2, A_3, B_1, $B_4 \in F$, $f_0 A_3^{-q} B_4 = A_2^{-1} B_1$, $(A_3^{-1} f_0^{\tau'} B_1)^q = A_2^{-1} B_4$;

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} 0 & A_2 & & \\ A_3 & 0 & & \\ & & 0 & B_2 \\ & & B_3 & 0 \end{bmatrix},$$

если ранг плоскости равен 2, $A_i, B_i \in F$, $i = 2, 3$, $f(A_3^{-1} f(v) B_2) = A_2^{-1} v B_3$ $(\forall v \in F)$, $B_3^q A_2 = A_3^q B_2$.

Исследуем нормализатор H. Пусть коллинеация α нормализует H, тогда она нормализует и подгруппу инволюций K; значит, $N(H) \subseteq N(K)$. Легко доказывается следующая

ЛЕММА 8. *Нормализатор подгруппы* H *в группе автотопизмов плоскости* π *совпадает с нормализатором подгруппы* K.

ЛЕММА 9. *В подгруппе*

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_4 & & \\ & & B_1 & \\ & & & B_4 \end{bmatrix} \right\}$$

существует элемент порядка $q^2 - 1$*, где* $A_i, B_i \in F$, $i = 1, 4$, $A_4 = A_1^q B_4 B_1^{-q}$, $f_i A_4^{-1} B_1 = f_i (A_1^{-\tau} B_4)^{p^i}$, $i = 1, ..., 2r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$g = \begin{bmatrix} c^{\frac{q+1}{r}} & & & \\ & kc^{\frac{q+p^s}{r}} & & \\ & & bkc^{\frac{q+p^s}{r}} & \\ & & & bc^{\frac{p^s(q+1)}{r}} \end{bmatrix},$$

где $b \in GF(p)$, c — образующий мультипликативной группы поля F, $k \in F$, $k^{q+1} = 1$, $r = \text{НОД}(q + p^s, q + 1)$, $|\tau| = p^s$.

Покажем, что $g \in H$. Проверим выполнение соотношений:

$$kc^{\frac{q+p^s}{r}} = c^{q\frac{q+1}{r}} bc^{\frac{p^s(q+1)}{r}} b^{-q} k^{-q} c^{-q\frac{q+p^s}{r}},$$

или, что эквивалентно,

$$k^{q+1} c^{\frac{q+p^s}{r}} = c^{\frac{1+q+p^s q+p^s-1-qp^s}{r}}, \quad k^{q+1} = 1.$$

Последнее очевидно. Проверим теперь соотношения:

$$f_i k^{-1} c^{-\frac{q+p^s}{r}} bkc^{\frac{q+p^s}{r}} = f_i \left(c^{\frac{-p^s(q+1)}{r}} bc^{\frac{p^s(q+1)}{r}} \right)^{p^i}, \quad i = 1, \ldots, 2r-1,$$

или, что эквивалентно, $f_i b = f_i b$. Последнее очевидно. Значит, $g \in H$.

Определим порядок g. Покажем вначале, что $r = 2$ или 4. Возможны два варианта:

1) $q = p^{sm}$. В этом случае $p^s - 1$ делит $q - 1$, а так как

$$\text{НОД}(q-1, q+1) = 2,$$

то $r = \text{НОД}(q + p^s, q + 1) = \text{НОД}(p^s - 1, q + 1) = 2$;

2) $q^2 = p^{sn}$, n нечетное. Тогда $q = p^{mn}$, $p^s = p^{2m}$. В этом случае аналогично первому получаем $\text{НОД}(p^m - 1, q + 1) = 2$, а

$$\text{НОД}(p^m + 1, q + 1) = \text{НОД}(p^{mn} + p^n, g + 1) = \text{НОД}(p^{2m-1}, q + 1) = 2.$$

Значит, $r = \text{НОД}(q + p^s, q + 1) = \text{НОД}(p^{2m} - 1, q + 1) = 2$ или 4.

Отсюда

$$|g| = \text{НОК}\left(\left| kc^{\frac{q+p^s}{r}} \right|, \left| c^{\frac{q+1}{r}} \right| \right).$$

Так как

$$\text{НОД}\left(\frac{q+p^s}{r}, q+1\right) = 1,$$

то $\left|kc^{\frac{q+p^s}{r}}\right|$ делится на $q+1$, и $|g| = \text{НОК}(q+1, (q-1)r) = q^2-1$. Лемма доказана.

Предположим, что $N(K) = C(K)$, т.е. или ранг плоскости больше 4, или $f(v) \neq f_0 v$ и $f(v) \neq f_r v$. Нетрудно видеть, что в этом случае $K \subseteq Z(N(K))$. Пусть S — силовская 2-подгруппа в $N(K)$. Если $S \subseteq H$, то K — характеристическая подгруппа в S. Если же $S \not\subseteq H$, то, в силу леммы 5, $S = H_2 \cdot \langle g_1 \rangle$, где H_2 — силовская 2-подгруппа в H, а g — некоторый подходящий 2-элемент из $C(K) \setminus H$. Тогда для элемента g из леммы 9 выберем 2-элемент c из F, который не принадлежит никакому собственному подполю поля F, а $s = k = 1$. Поскольку $g^{g_1} = g^{p^\alpha}$, $p^\alpha \neq q^2$, а порядок g — максимальная степень числа 2, делящая q^2-1, то $g \notin Z(S)$ и S неабелева. Значит, $K = \Omega_1(Z(S))$ — характеристическая подгруппа в S. В любом случае $N(S) \subseteq N(K)$ и S — силовская 2-подгруппа во всей группе автотопизмов A. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Д. Подуфалов, И. В. Бусаркина*, О p-примитивных полуполевых плоскостях, деп. в ВИНИТИ от 06.07.98, N 2093-В98.
2. *О. В. Кравцова*, О некоторых полуполевых плоскостях четного ранга, деп. в ВИНИТИ от 14.10.96, N 3004-В96,

Адрес автора:

БУСАРКИНА Ирина Викторовна,
РОССИЯ,
660036, г. Красноярск,
ул. Урицкого, д. 125, кв. 203.
Дом. тел.: 23-20-82.

Поступило 5 сентября 1998 г.