Г. В. Смирнов, Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями, *Докл. АН СССР*, 1988, том 302, номер 3, 541–544

УДК 517.9

Г.В. СМИРНОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 13 III 1987)

В настоящей работе изучаются экстремальные задачи при наличии ограничений в виде дифференциальных включений

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_1]$$

и фазовых ограничений

$$x(t) \in X(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $F\colon [t_0, t_1] \times R^n \to 2^{R^n}$, $X\colon [t_0, t_1] \to 2^{R^n}$ – многозначные отображения. В основе доказательств основных результатов, приводимых ниже, лежит метод построения вариаций, развитых в работах [1, 2, 3, 6]. Аналогичные задачи без фазовых ограничений рассмотрены в [4, 5].

1. Будем обозначать через S_n замкнутый единичный шар (с центром в нуле) в пространстве R^n. Через $d(x, A)$ будем обозначать расстояние от точки $x \in R^n$ до множества $A \subset R^n$. Пространство непрерывных (абсолютно непрерывных, суммируемых) функций $f\colon [t_0, t_1] \to R^n$ будем обозначать $C([t_0, t_1], R^n)$ ($AC([t_0, t_1], R^n)$, $L_1([t_0, t_1], R^n)$).

К а с а т е л ь н ы м к о н у с о м к м н о ж е с т в у $A \subset R^n$ в точке $x \in A$ будем называть множество

$$T(A, x) = \{v \in R^n \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d(x + \lambda v, A) = 0\}.$$

Если $K \subset R^n$ – конус, то через K^* обозначается его сопряженный.

Пусть $C \subset R^n$. Множество решений дифференциального включения с правой частью F, удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) \in C$, обозначим

$$\mathcal{R}(F, C) = \{x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n) \mid \dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ x(t_0) \in C\}.$$

Множество непрерывных функций, удовлетворяющих фазовым ограничениям, обозначим

$$\mathcal{X} = \{x(\cdot) \in C([t_0, t_1], R^n) \mid x(t) \in X(t),\ t \in [t_0, t_1]\}.$$

Множество достижимости дифференциального включения с правой частью F из множества C в момент времени t_1 при наличии фазовых ограничений обозначим

$$\mathcal{A}(F, C) = \{x(t_1) \mid x(\cdot) \in \mathcal{R}(F, C) \cap \mathcal{X}\}.$$

Пусть $K(t) \subset R^n$ – выпуклый конус при всех $t \in [t_0, t_1]$. Напомним определение, сформулированное в [8]. Векторная мера μ на отрезке $[t_0, t_1]$ называется $K(t)$-з н а ч н о й, если

$$\frac{d\mu}{d\theta}(t) \in K(t), \ \theta\text{-почти всюду на } [t_0, t_1],$$

где θ – любая положительная мера на отрезке $[t_0, t_1]$, относительно которой мера μ абсолютно непрерывна, а $\dfrac{d\mu}{d\theta}(t)$ – производная Радона–Никодима. Через $|\mu|$ будет обозначать сумму полных вариаций компонент меры μ, т.е. $|\mu| = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$.

2. Пусть заданы $\rho > 0$, $a(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], R)$, $\Lambda: R^n \to R^m$ – линейный оператор, замкнутый выпуклый конус $K(t) \subset R^n \times R^n$, измеримо зависящий от $t \in [t_0, t_1]$, выпуклый конус $Q(t) \subset R^n$ с непустой внутренностью, полунепрерывно снизу зависящий от $t \in [t_0, t_1]$ и выпуклый замкнутый конус $K \subset R^n$. Положим

$$F_1(t, x, x^0) = \{(v, v^0) \in R^n \times R \mid v^0 \geqslant a(t) d((x, v), K(t))\},$$

$$\tilde{K} = K \times \{0\} \subset R^n \times R,$$

$$\mathcal{Q} = \{(x(\cdot), x^0(\cdot)) \in C([t_0, t_1], R^n \times R) \mid \times$$

$$\times\ x(t) + x^0(t_1)\rho S_n \subset \operatorname{int} Q(t), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Теорема 1. *Рассмотрим дифференциальное включение с правой частью* $F_1: [t_0, t_1] \times R^{n+1} \to 2^{R^{n+1}}$.

I. *Если* $\mathcal{R}(F, \tilde{K}) \cap \mathcal{Q} = \phi$, *то существует регулярная борелевская векторная мера* μ *и функция* $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n)$ *такие, что:*

1) $\left(\dot{p}(t), p(t) + \int\limits_{t_0}^{t} d\mu\right) \in -K^*(t)$,

2) *мера* μ *является* $-Q^*(t)$-значной,

3) $p(t_0) \in -K^*$, $p(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} d\mu$,

4) $|\mu|([t_0, t_1]) > 0$.

II. *Если* $\mathcal{R}(F, \tilde{K}) \cap \mathcal{Q} \neq \phi$, *то для всякого вектора* $(l_1^*, l_0^*) \in L^*$, *где* L^* – *конус, сопряженный к конусу*

$$L = \{(\Lambda x(t_1), x^0(t_1)) \in R^m \times R \mid (x(\cdot), x^0(\cdot)) \in \mathcal{R}(F_1, \tilde{K}) \cap \mathcal{Q}\},$$

существует регулярная борелевская векторная мера μ *и функция* $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1]$, R^n *такие, что:*

1) $\left(\dot{p}(t), p(t) + \int\limits_{t_0}^{t} d\mu\right) \in -K^*(t)$,

2) *мера* μ *является* $-Q^*(t)$-значной,

3) $p(t_0) \in -K^*$, $p(t_1) = -\Lambda^* l_1^* - \int\limits_{t_0}^{t_1} d\mu$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы об отделимости и теоремы 2 из [4].

3. Пусть D – область в $[t_0, t_1] \times R^n$. Далее будут предполагаться выполненными некоторые из следующих условий:

А) задано многозначное отображение F: $D \to 2^{R^n}$ с компактными образами, измеримое по t, удовлетворяющее условию Липшица по x с суммируемой константой $l(t)$ и неравенству $\max\{\|v\| \mid v \in F(t, x)\} \leqslant b(t)$, где $b(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], R^n)$;

Б) задано многозначное отображение X: $[t_0, t_1] \to 2^{R^n}$;

В) заданы множества $C_0, C_1 \subset R^n$;

Г) задана локально-липшицева функция φ: $R^n \to R$.

Если $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}(F, C_0) \cap \mathcal{X}$, $\hat{x}(t_1) \in C_1$, то будут предполагаться выполненными некоторые из следующих условий:

А') задан выпуклый замкнутый конус $K(t) \subset R^n \times R^n$, измеримо зависящий от $t \in [t_0, t_1]$ и удовлетворяющий включению

$$K(t) \subset T(\operatorname{grco} F(t, \cdot), (\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)));$$

Б′) задан выпуклый конус $Q(t) \subset R^n$ с непустой внутренностью, полунепрерывно снизу зависящий от $t \in [t_0, t_1]$ и такой, что если $x(t) \in \operatorname{int} Q(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $x(\cdot) \in C([t_0, t_1], R^n)$, то существует $\epsilon > 0$ такое, что $\hat{x}(t) + \lambda x(t) + \lambda \epsilon S_n \subset X(t)$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, $\lambda \in (0, \epsilon)$;

В′) заданы замкнутые выпуклые конусы $K_0, K_1 \subset R^n$, которые являются шатрами множеств C_0, C_1 в точках $\hat{x}(t_0)$, $\hat{x}(t_1)$ соответственно (определение шатра дано в [2]);

Г′) задана выпуклая положительно-однородная функция $\varphi^0 : R^n \to R$, удовлетворяющая неравенству $\limsup\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(\varphi(\hat{x}(t_1) + \lambda v) - \varphi(x(t_1))) \leqslant \varphi^0(v)$, для всех $v \in R^n$.

Условия А′) – Г′) описывают аппроксимации ограничений, заданных условиями А) – Г), вдоль траектории $\hat{x}(\cdot)$.

Следующая теорема содержит необходимые условия того, что траектория дифференциального включения приходит в граничную точку множества достижимости.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А) – В), $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}(F, C_0) \cap \mathcal{X}$, *выполнены условия* А′) – В′) *и* Λ: $R^n \to R^m$ *– линейный оператор.* Пусть $\Lambda \hat{x}(t_1) \notin$ $\notin \operatorname{int} \Lambda \mathcal{A}(F, C_0)$. *Тогда существуют* $l^* \in R^m$, $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n)$ *и регулярная борелевская векторная мера* μ *такие, что:*

1) $\left(\dot{p}(t),\ p(t) + \int\limits_{t_0}^{t} d\mu\right) \in -K^*(t)$,

2) *мера* μ *является* $-Q^*(t)$*-значной,*

3) $p(t_0) \in -K_0^*$, $p(t_1) = -\Lambda^* l^* - \int\limits_{t_0}^{t_1} d\mu$,

4) $|l^*| + |\mu|([t_0, t_1]) > 0$.

4. Пусть выполнены условия А) – Г). Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\operatorname{minimize} \{\varphi(x(t_1)) \mid x(\cdot) \in \mathcal{R}(F, C_0) \cap \mathcal{X}, x(t_1) \in C_1\}.$$

Пусть $\hat{x}(\cdot)$ – решение этой задачи и выполнены условия А′) – Г′). Приводимая ниже теорема 3 является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Существуют* $\lambda \geqslant 0$, $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n)$ *и регулярная борелевская векторная мера* μ *такие, что:*

1) $\left(\dot{p}(t),\ p(t) + \int\limits_{t_0}^{t} d\mu\right) \in -K^*(t)$,

2) *мера* μ *является* $-Q^*(t)$*-значной,*

3) $p(t_0) \in -K_0^*$, $p(t_1) \in -\lambda \partial \varphi^0(0) - \int\limits_{t_0}^{t_1} d\mu + K_1^*$,

4) $\lambda + |p(t_1)| + |\mu|([t_0, t_1]) > 0$.

5. Пусть выполнены условия А) – В). Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\operatorname{minimize} \{t \in [t_0, t_1] \mid x(\cdot) \in \mathcal{R}(F, C_0) \cap \mathcal{X}, x(t) \in C_1\}.$$

Пусть $\hat{x}(\cdot)$ – решение этой задачи, t_1 – время быстродействия и пусть выполнены условия А′) – В′).

Т е о р е м а 4. *Для всякого вектора*

$$\zeta \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{\hat{x}(t_1-\lambda)-\hat{x}(t_1)}{|\hat{x}(t_1-\lambda)-\hat{x}(t_1)|+\lambda} + \epsilon S_n \right)$$

существуют регулярная борелевская векторная мера μ и функция $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n)$ такие, что:

1) $(\dot{p}(t), p(t) + \int_{t_0}^{t} d\mu) \in -K^*(t)$,

2) *мера μ является $-Q^*(t)$-значной,*

3) $p(t_0) \in -K_0^*$, $p(t_1) \in K_1^* - \int_{t_0}^{t_1} d\mu$, $\left\langle \xi, p(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} d\mu \right\rangle \leqslant 0$,

4) $|p(t_1)| + |\mu|([t_0, t_1]) > 0$.

Т е о р е м а 5. *Если отображения F и X не зависят от t, то существуют регулярная борелевская векторная мера μ и функция $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], R^n)$ такие, что:*

1) $\left(\dot{p}(t),\ p(t) + \int_{t_0}^{t} d\mu\right) \in -K^*(t), \left\langle p(t) + \int_{t_0}^{t} d\mu,\ \dot{\hat{x}}(t) \right\rangle \equiv \lambda \geqslant 0$,

2) *мера μ является $-Q^*(t)$-значной,*

3) $p(t_0) \in -K_0^*$, $p(t_1) \in K_1^* - \int_{t_0}^{t_1} d\mu$,

4) $|p(t_1)| + |\mu|([t_0, t_1]) > 0$.

6. Для применения теорем 2–5 необходимо уметь строить аппроксимации, удовлетворяющие условиям А$'$) – Г$'$). Построение аппроксимаций включения и функционала подробно разбирается в [4]. Примеры шатров можно найти в [2]. В [9] доказано, что конус Кларка [7], имеющий непустую внутренность, является шатром. Можно доказать, что при выполнении этого условия любой выпуклый конус, содержащийся в касательном конусе, является шатром. Условие Б$'$) выполняется, если, например, $X(t) \equiv C$, где $C \subset R^n$ – замкнутое множество, $\operatorname{int} T_C(x) \neq \phi$ для всех $x \in C$ (через $T_C(x)$ обозначен конус Кларка) и $Q(t) = T_C(\hat{x}(t))$.

7. Рассмотрим следующую экстремальную задачу на отрезке $[0, 1]$:

$$\text{minimize} \{x_2(1) | \ (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \in S_2, \quad |x_1| + x_2 \geqslant 0,\ x_2(0) \geqslant 0\}.$$

С помощью теоремы 3 легко установить, что траектория $(x_1(t), x_2(t)) \equiv (0, 0)$ не является решением этой задачи. Получить это утверждение с помощью результатов [7] не удается.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
16 IV 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских В.И.* Тр. МИАН, 1984, т. 166. 2. *Болтянский В.Г.* – УМН, 1975, т. 30, № 3. 3. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* – ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 3. 4. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* – Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, № 6. 5. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* – Там же, № 8. 6. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983. 7. *Clarke F.H.* Optimisation and nonsmooth analysis. N.Y.: Wiley (Intersci.), 1983. 8. *Rockafellar R.T.* – SIAM J. Contr., 1972, vol. 10, № 4. 9. *Watkins G.G.* – J. Opt. Theory and Appl., 1985, vol. 45, № 2.