

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ОДИНОЧНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА НА ОСНОВЕ ГОМОБАРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2011 г. А. В. Десятов, Д. Н. Ильмов, А. П. Кубышкин, С. Г. Черкасов

ФГУП “Центр Келдыша”, Москва

Поступила в редакцию 05.04.2009 г.

Методом численного моделирования исследуются теплофизические и гидродинамические процессы, протекающие в сферическом паровом пузырьке и окружающей его жидкости при повышении внешнего давления. Исследование проведено на основе математической модели, относящейся к классу моделей гомобарического пузырька (однородность давления в пузырьке при неоднородности температуры и плотности). В результате численного моделирования получены данные по основным характеристикам процесса сжатия паровых пузырьков в воде с различными начальными условиями.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время активно обсуждаются перспективы сонохимии. Возможным механизмом, объясняющим воздействие ультразвука на жидкую среду, считается достижение высоких температур и давлений при схлопывании кавитационных пузырьков [1]. Прямое экспериментальное определение температуры в кавитационных пузырьках чрезвычайно затруднительно. Расчетные же оценки, не учитывающие тепло- и массообменные процессы в системе “пузырек–окружающая жидкость”, действительно приводят к большим значениям температуры (до нескольких тысяч градусов).

В данной работе излагаются результаты численного моделирования процессов, протекающих при сжатии одиночного сферического парового пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Сжатие первоначально равновесного пузырька инициируется скачкообразным повышением давления в жидкости. При этом используется математическая модель, направленная на максимально полный и точный учет теплообмена между пузырьком и жидкостью, а также фазовых переходов на границе пузырька. Данная модель является модификацией гомобарической модели [2, 3], а также развитием однородной модели, использованной в работах [4, 5]. Как и однородная модель, новая модель учитывает вязкость и поверхностное натяжение жидкости, зависимости теплофизических свойств жидкости и пара от температуры, а также достаточно аккуратно рассматривает фазовый переход, благодаря чему обеспечивается точное выполнение баланса энергии системы, за исключением учета кинетической энергии пара. Для расчета полей температуры в жидкости используется уравнение энергии, учитывающее кондуктивный и конвективный перенос тепла и вязкую диссипацию. В отличие от однородной модели, приближение гомобаричности хотя и подразумевает однородность

давления внутри пузырька, но предполагает неоднородность температуры и плотности пара в пузырьке. Приближение оправдано в широком классе задач, когда скорости газа (пара) гораздо меньше звуковых [6], и позволяет существенно упростить описание рассматриваемых процессов по сравнению с полной постановкой задачи, поскольку не требуется решения уравнения движения для пара. В одномерных задачах приближение гомобаричности позволяет проводить дальнейшие математические преобразования. Например, для расчета скорости можно использовать явную формулу, которая получается интегрированием уравнения энергии в дивергентной форме. Этот подход использовался в работах [7–9]. При исследовании одномерного теплопереноса через заполненный газом плоский слой [10, 11] применяется другой способ решения задачи. Он состоит в преобразовании исходной системы уравнений для четырех неизвестных (скорость, плотность, температура, давление) в систему для двух неизвестных путем исключения скорости и температуры (либо плотности). В данной работе этот подход применяется для описания процессов в паровом пузырьке.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается процесс сжатия сферического парового пузырька при внезапном повышении давления в окружающей жидкости. Примем следующие основные допущения. В начальный момент времени жидкость и пар в пузырьке находятся в динамическом и тепловом равновесии. Жидкость будем считать несжимаемой, вязкой, теплопроводной и учитывать поверхностное натяжение. Пар в пузырьке – невязкий, теплопроводный и подчиняется уравнению состояния идеального газа. На границе раздела фаз давление пара связано с температурой жидкости кривой

насыщения. Удельные теплоемкости жидкости и пара будем считать постоянными, а коэффициенты поверхностного натяжения и вязкости жидкости, а также коэффициенты теплопроводности жидкости и пара – зависящими от температуры.

Для описания процессов в жидкости и на поверхности раздела фаз будем использовать те же соотношения, что и в однородной модели [4, 5]:

$$\rho \left(R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 \right) = p_R - p_\infty - \tau_R - \Omega + 2jU, \quad (1)$$

$$p_R = p|_{r=R}, \quad \tau_R = 2\mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad \Omega = 12UR^2 \int_R^\infty \mu r^{-4} dr, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = U - \frac{j}{\rho}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} \left((R + \eta)^2 \theta \right) \right)_\eta + \\ & + \rho c \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left(UR^2 - (R + \eta)^2 \frac{dR}{dt} \right) \theta \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \eta} \left((R + \eta)^2 \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{12\mu U^2 R^4}{(R + \eta)^4}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\theta|_{r=0} = 0, \quad \theta|_{\eta=\infty} = 0, \quad \theta|_{\eta=0} = \theta_S(t) = T_S - T_0, \quad (5)$$

$$p_R = p_V + \tau_R - \frac{2\sigma}{R} - jU, \quad (6)$$

$$q_S - q_{VS} = j\psi + \frac{j2\sigma}{\rho R} - \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2} jU^2, \quad (7)$$

$$\psi = \psi_* + (T_S - T_*) (c_p - c) - \frac{(p_V - p_*)}{\rho}. \quad (8)$$

Здесь t, r – время и радиальная координата; R – радиус пузырька; U – скорость жидкости на границе пузырька; u, ρ, p – скорость, плотность и давление в жидкости; p_R и τ_R – давление и напряжение трения в жидкости на границе пузырька; p_∞ – давление на бесконечном удалении от пузырька; j – масса пара, конденсирующегося в единицу времени на единице площади поверхности пузырька; μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности жидкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения. Уравнение энергии для жидкости (4) и граничные условия (5) записаны для пространственной координаты $\eta = r - R(t)$, связанной с поверхностью пузырька. Прирост температуры $\theta = T - T_0$; T – температура жидкости; T_0 – начальная температура жидкости, равная температуре на бесконечном удалении от пузырька; T_S – температура поверхности раздела фаз; c – удельная теплоемкость жидкости. В формулах (6), (7) для скачков давления и теплового потока на межфазной границе p_V – давление пара, q_S – удельный тепловой поток от поверхности пузырька в жидкость, q_{VS} – удельный тепловой поток от пара к поверхности пузырька. Теплота фазового перехода

ψ определена выражением (8), где ψ_*, p_* – теплота фазового перехода и давление насыщенного пара при некоторой фиксированной температуре T_* , c_p – теплоемкость пара при постоянном давлении.

Рассмотрим теперь процессы внутри пузырька. В предположении гомобаричности задача описывается следующими основными уравнениями:

$$p_V = \rho_V R_V T_V, \quad (9)$$

$$r^2 \frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_V w r^2) = 0, \quad (10)$$

$$r^2 c_p \rho_V \left(\frac{\partial T_V}{\partial t} + w \frac{\partial T_V}{\partial r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_V) + r^2 \frac{dp_V}{dt}, \quad (11)$$

$$q_V = -\lambda_V \frac{\partial T_V}{\partial r}. \quad (12)$$

Здесь $p_V(t), \rho_V(r, t), T_V(r, t)$ – давление, плотность и температура пара; R_V – газовая постоянная пара; w – скорость пара; q_V, λ_V – удельный тепловой поток и коэффициент теплопроводности пара.

Смысл дальнейших преобразований состоит в том, чтобы, используя условие гомобаричности и уравнения (9), (10), исключить из уравнения (11) скорость. Затем, используя (9), исключить из полученного уравнения температуру и получить уравнение, в которое будут входить только плотность и давление.

Сначала преобразуем уравнение энергии (11), используя уравнение неразрывности (10) и уравнение состояния (9). Имеем

$$\begin{aligned} r^2 c_p \rho_V \left(\frac{\partial T_V}{\partial t} + w \frac{\partial T_V}{\partial r} \right) &= r^2 \frac{\partial (c_p \rho_V T_V)}{\partial t} + \\ + \frac{\partial (r^2 w c_p \rho_V T_V)}{\partial r} &= r^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dp_V}{dt} + \frac{\partial (r^2 w c_p \rho_V T_V)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\gamma = c_p / c_V$ – показатель адиабаты для пара, c_V – удельная теплоемкость пара при постоянном объеме. Подставляя (13) в (11), получаем

$$\frac{\partial (r^2 w c_p \rho_V T_V)}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_V) - \frac{1}{\gamma - 1} r^2 \frac{dp_V}{dt}. \quad (14)$$

Проинтегрируем (14) по радиусу от 0 до r :

$$r^2 w c_p \rho_V T_V = -r^2 q_V - \frac{1}{3(\gamma - 1)} r^3 \frac{dp_V}{dt}. \quad (15)$$

Поделив (15) на T_V и дифференцируя результат по радиусу, получаем

$$c_p \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_V w) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 q_V}{T_V} \right) - \frac{1}{3(\gamma - 1)} \frac{dp_V}{dt} \frac{\partial r^3}{\partial r T_V}. \quad (16)$$

Выражая левую часть (16) с помощью (10), преобразуем (16) к виду

$$r^2 \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 q_V}{T_V} \right) + \frac{1}{3c_p(\gamma - 1)} \frac{dp_V}{dt} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^3}{T_V} \right). \quad (17)$$

Отметим, что в уравнении (17) скорость уже отсутствует. Далее запишем

$$q_V = -\lambda_V \frac{\partial T_V}{\partial r} = -\lambda_V \frac{\partial p_V}{\partial r \rho_V R_V} = \frac{\lambda_V p_V}{\rho_V^2 R_V} \frac{\partial \rho_V}{\partial r}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{T_V} = \frac{\rho_V R_V}{p_V}.$$

Подставляя теперь (18) в (17), получаем искомое уравнение для плотности

$$r^2 \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \lambda_V}{\rho_V} \frac{\partial \rho_V}{\partial r} \right) + \frac{1}{3\gamma p_V} \frac{dp_V}{dt} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_V r^3). \quad (19)$$

В уравнение (19) входит производная по времени от давления. Чтобы получить для нее уравнение, проинтегрируем (14) по радиусу от 0 до радиуса пузырька R :

$$c_p R^2 w_S \rho_{VS} T_{VS} = -R^2 q_{VS} - \frac{R^3}{3(\gamma - 1)} \frac{dp_V}{dt}. \quad (20)$$

Здесь ρ_{VS} , T_{VS} , w_S — плотность, температура и скорость пара на границе пузырька ($T_{VS} = T_S$). Уравнение (20) можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$\frac{dp_V}{dt} = -\frac{3(\gamma - 1)}{R} \left(q_{VS} + j c_p T_{VS} + \frac{\gamma p_V}{\gamma - 1} \frac{dR}{dt} \right), \quad (21)$$

$$\frac{dp_V}{dt} = -\frac{3(\gamma - 1)}{R} \times \left(\frac{\lambda_V p_V}{\rho_{VS}^2 R_V} \frac{\partial \rho_V}{\partial r} \Big|_{r=R} + j c_p T_{VS} + \frac{\gamma p_V}{\gamma - 1} \frac{dR}{dt} \right). \quad (22)$$

Важной особенностью уравнения для плотности (19) является тот факт, что если производная от давления по времени удовлетворяет уравнению (22), то решение уравнения (19) автоматически обеспечивает и точное выполнение интегрального баланса массы.

В рамках рассматриваемой модели удельные внутренние энергии жидкости ϵ и пара ϵ_V определяются формулами

$$\epsilon = c\theta + \epsilon_0, \quad \epsilon_V = c_V T_V + \epsilon_{V0}, \quad (23)$$

$$\epsilon_{V0} = \epsilon_0 + \psi_0 - c_p T_0 + \frac{p_{V0}}{\rho}.$$

Здесь ψ_0 , p_{V0} — теплота фазового перехода и давление пара при начальных условиях. Обозначим через K и E кинетическую и внутреннюю энергию жидкости, через E_V — внутреннюю энергию пара, через E_σ — поверхностную энергию и через A — работу, совершаемую в единицу времени внешним давлением:

$$K = \int_R^\infty \frac{1}{2} \rho u^2 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho U^2 R^3, \quad E = \int_R^\infty \rho \epsilon 4\pi r^2 dr, \quad (24)$$

$$E_V = \int_0^R \rho_V \epsilon_V 4\pi r^2 dr, \quad E_\sigma = \sigma S, \quad A = -USp_\infty.$$

Здесь $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности пузырька. Из уравнений, составляющих изложенную выше математическую модель, путем тождественных математических преобразований [12] можно получить выражение

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dE_V}{dt} + \frac{dE_\sigma}{dt} = A - \rho US\epsilon_0. \quad (25)$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи уравнение (25) является точным выражением закона сохранения энергии без учета кинетической энергии пара. Если давление p_∞ постоянно, то, интегрируя (25) по времени с учетом начальных условий, можно после некоторых преобразований представить закон сохранения энергии в виде интеграла сохранения:

$$F = \text{const} = \sigma_0 S_0 + \frac{p_{V0} V_0}{\gamma - 1} + \beta m_{V0} + p_\infty V_0. \quad (26)$$

Здесь

$$F = K + 4\pi \rho c \int_0^\infty \theta(R+x)^2 dx + \sigma S + \frac{p_V V}{\gamma - 1} + \beta m_V + p_\infty V, \quad (27)$$

$$\beta = \psi_0 - c_p T_0 + \frac{p_{V0} - p_\infty}{\rho}, \quad (28)$$

где m_V — масса пара в пузырьке, V — объем пузырька, индекс “0” соответствует начальным условиям.

Отметим, что уравнения (25), (26) имеют тот же вид, что и уравнения для модели однородного пузырька [4, 5].

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Для расчета параметров в паре уравнения (18), (19), (22) преобразуются к новой переменной $z = r/R(t)$:

$$z^2 \frac{\partial (\rho_V R^3)}{\partial t} = \frac{R}{c_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2 \lambda_V}{\rho_V} \frac{\partial \rho_V}{\partial z} \right) + R^2 \left(\frac{R}{3\gamma p_V} \frac{dp_V}{dt} + \frac{dR}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\rho_V z^3), \quad (29)$$

$$q_{VS} = \frac{\lambda_V p_V}{\rho_{VS}^2 R_V R} \frac{\partial \rho_V}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (30)$$

$$\frac{dp_V}{dt} = -\frac{3(\gamma-1)}{R} \times \left(\frac{\lambda_V p_V}{\rho_{VS}^2 R_V R} \frac{\partial \rho_V}{\partial z} \Big|_{z=1} + j c_p T_{VS} + \frac{\gamma p_V}{\gamma-1} \frac{dR}{dt} \right). \quad (31)$$

На каждом шаге по времени для вычисления новых (в следующий момент времени) значений параметров использовалась такая последовательность расчета: сначала из разностного аналога (явная схема) уравнений (1), (3) вычислялись новые значения U и R , далее использовался следующий итерационный цикл для вычисления новых значений p_V , ρ_V , θ , j , q_S .

1. Задается новое значение давления внутри пузырька p_V . После этого новые значения плотности ρ_{VS} и температуры T_S на поверхности раздела фаз определяются по кривой насыщения [13] и уравнению состояния.

2. Вычисляется новое распределение плотности в паре из разностного аналога уравнения (29).

3. Из разностного аналога уравнения (4) вычисляется новое распределение температуры в жидкости.

Уравнения (4), (29) аппроксимировались неявными разностными схемами на неравномерных сетках со сгущением около границы пузырька.

4. Из разностных аналогов уравнений (30), (31) определяются новые значения теплового потока q_{VS} и массового потока на конденсацию j_1 .

5. По новому распределению θ определяется новое значение теплового потока в жидкость q_S . Далее из уравнения (7) вычисляется массовый поток на конденсацию j_2 . Если полученные значения j_1 и j_2 не совпадают с достаточной точностью, задается новое значение давления в пузырьке p_V и итерационный цикл повторяется.

После достижения сходимости итерационного цикла по распределению плотности и давлению в паре через уравнение состояния определяется новое распределение температуры. Далее следует переход к новому шагу по времени.

Отметим, что использованный вычислительный алгоритм в целом не обладает свойством консервативности, поэтому интегральный баланс энергии не выполнялся точно, однако в расчетах даже при наибольшем достигнутом сжатии дисбаланс не превышал нескольких процентов.

Для апробации модели и методики расчета проводились сравнения с данными экспериментов [14] и расчетов [2], которые показали удовлетворительные результаты.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Целью численного моделирования являлась иллюстрация общих закономерностей процесса сжа-

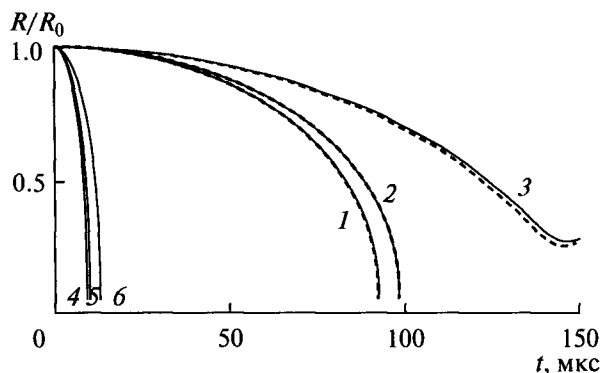


Рис. 1. Изменение радиуса пузырьков во времени для случаев 1–6 (1–6) – сплошные кривые; расчеты по однородной модели для случаев 1–3 – пунктир.

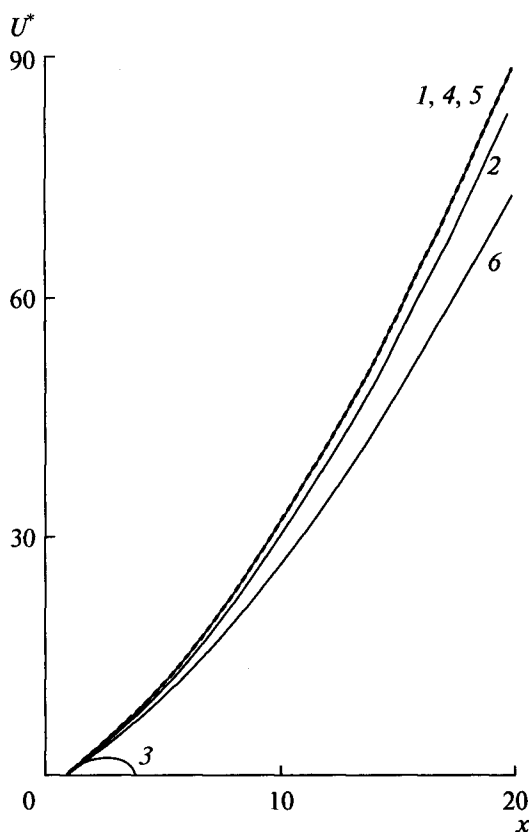


Рис. 2. Безразмерная скорость границы пузырьков для случаев 1–6 (1–6) – сплошные кривые; безразмерная скорость по формуле Рэля (33) – пунктир.

тия пузырьков на основе представленной модели, а также сравнение с результатами, полученными на основе однородной модели [4, 5].

Рассматривалось сжатие паровых пузырьков в воде: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 4200 \text{ Дж/(кг К)}$, $\gamma = 1.28$, $R_V = 461.7 \text{ Дж/(кг К)}$, $T_* = 273.15 \text{ К}$, $\psi_* = 2.501 \times 10^6 \text{ Дж/кг}$, $p_{V*} = 610.8 \text{ Па}$. Коэффициенты теплопроводности пара и воды, вязкости и поверхностного натяжения воды интерполировались по данным

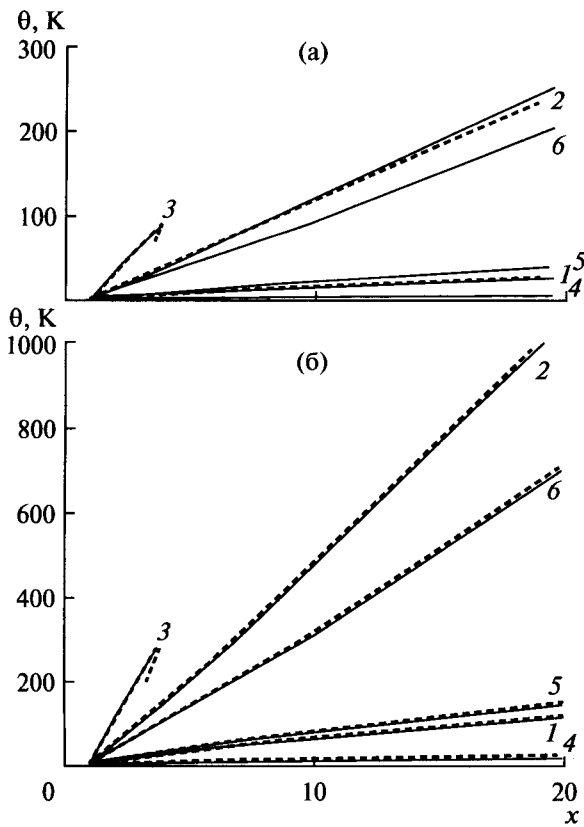


Рис. 3. Прирост температуры пара на поверхности (а) и в центре (б) пузырьков для случаев 1–6 (1–6) – сплошные кривые; пунктир (а) – температуры, рассчитанные по однородной модели для случаев 1–3; пунктир (б) – температура изотермического ядра (34).

[13]. Давление p_∞ во всех расчетах задавалось равным 10^5 Па.

Основные параметры расчетных сеток были следующие: наименьший пространственный шаг около межфазной границы в паре – $\Delta z \approx 1/9600$, в жидкости – $\Delta \eta = R_0/32000$. В расчетах использовался переменный шаг по времени, уменьшающийся обратно пропорционально скорости жидкости на границе раздела фаз. Первоначальный временной шаг

$\Delta t = 10^{-6}$ с для пузырьков с начальным радиусом $R_0 = 10^{-3}$ м и $\Delta t = 10^{-7}$ с для пузырьков с $R_0 = 10^{-4}$ м. Предварительные расчеты показали, что принятое разрешение временной и пространственной сеток достаточно и дальнейшее его увеличение не оказывает влияния на решение.

На рис. 1 показано изменение радиуса пузырьков во времени. Здесь и далее случаи 1–3 относятся к пузырькам с начальным радиусом $R_0 = 10^{-3}$ м и начальными температурами $T_0 = 20, 50$ и 80°C соответственно, а случаи 4–6 – к пузырькам с меньшим начальным радиусом $R_0 = 10^{-4}$ м и такими же начальными температурами. Как видно из рисунка, гомобарическая и однородная модели дают практически одинаковые результаты по динамике изменения размера пузырька во времени. Для последующего анализа вместо времени удобно использовать параметр $x = R_0/R$, который будем называть текущей степенью сжатия пузырька. В случае 3 сжатие пузырька при $x \approx 3.5$ сменяется расширением, тогда как в остальных расчетах наблюдалось только монотонное сжатие. Отметим, что на основе упрощенной модели [15] в зависимости от интенсивности тепло- и массообмена между жидкостью и паром была показана возможность режима конечного сжатия и режима коллапса. В первом режиме сжатие пузырька сначала происходит с ускорением, затем с замедлением, а при некотором размере сжатие прекращается и пузырек начинает расширяться. В режиме коллапса скорость сжатия монотонно увеличивается с уменьшением размера пузырька. Исходя из наблюдаемых результатов, случай 3 соответствует конечному сжатию, а остальные варианты – режиму коллапса.

Введем безразмерную скорость границы пузырька в виде

$$U^* = -\frac{dR}{dt} \sqrt{\frac{3\rho}{2(p_\infty - p_{V0})}} \tag{32}$$

На рис. 2 полученные в расчетах значения скорости U^* сопоставляются со скоростью, рассчитанной по формуле Рэлея:

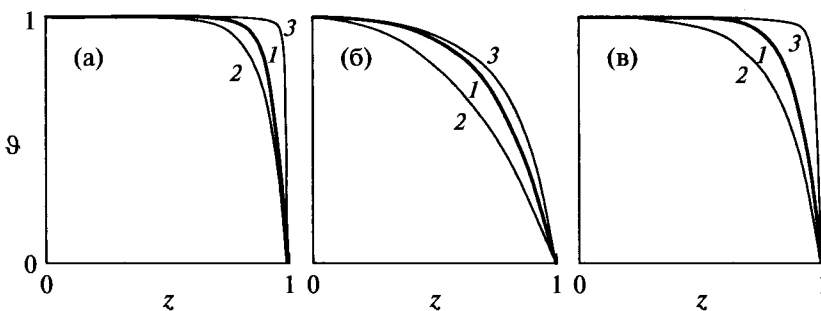


Рис. 4. Профили безразмерной температуры в паре при различных степенях сжатия для случаев 1 (а), 4 (б), 5 (в); $\theta = (T_V - T_S)/(T_{VC} - T_S)$, где T_{VC} – температура в центре пузырька: 1 – $x = 1.01$, 2 – 1.1, 3 – 10.

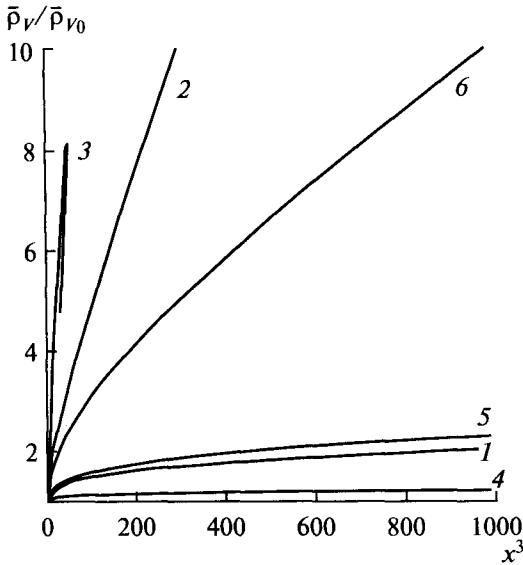


Рис. 5. Изменение среднемассовой плотности пара в пузырьках ($\bar{\rho}_v = m_v/V$) для случаев 1–6 (1–6).

$$U^* = \sqrt{x^3 - 1}. \quad (33)$$

Формула Рэлея является точным решением рассматриваемой задачи при условии постоянства давления в пузырьке и без учета поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Как видно, расхождение с формулой Рэлея растет при увеличении начального радиуса пузырька и начальной температуры. Однако при малом начальном размере и низкой температуре динамика пузырька описывается формулой Рэлея даже при большой степени сжатия.

Рис. 3 иллюстрирует динамику разогрева пара в пузырьках. Как видно, скорость разогрева пара по мере сжатия пузырька увеличивается с ростом начального радиуса и начальной температуры. При этом температура в центре пузырька растет значительно быстрее, чем на его поверхности. Например, для случая 2 при сжатии пузырька в 10 раз прирост температуры на поверхности составил 121 К, тогда как в центре — 478 К. Отметим также, что температура пара, вычисляемая в рамках однородной модели, хорошо совпадает с минимальной температурой в пузырьке (на поверхности), но заметно ниже максимальной температуры (в центре).

Рис. 3 демонстрирует интересную особенность динамики разогрева паровых пузырьков, важную с точки зрения практических приложений, в которых необходимо достижение как можно более высокой температуры пара (например, сонохимия). Наименьшая скорость роста температуры имела место в варианте 4, который среди рассмотренных вариантов в наибольшей степени соответствует режиму рэлеевского коллапса. Максимальная скорость прогрева пара имеет место в варианте 3. Однако этот вариант соответствует режиму конечного сжатия, и прогрев пузырька здесь достаточно быстро сменяется его

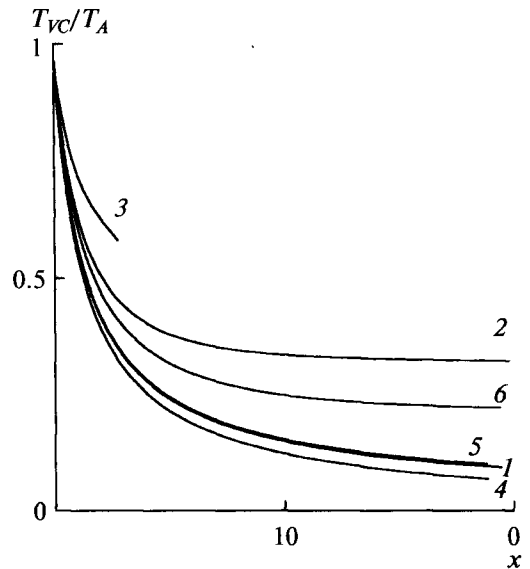


Рис. 6. Отношение температуры в центре пузырька к адиабатической температуре для случаев 1–6 (1–6).

охлаждением при переходе от сжатия пузырька к его расширению. Поэтому, с точки зрения достижения максимальной температуры пара, оптимальными являются те варианты, которые соответствуют пограничной области между режимами коллапса и конечного сжатия.

На рис. 4 показаны типичные пространственные распределения температуры в пузырьке. В самом начале процесса сжатия при любых начальных условиях в пузырьке формируются центральное изотермическое (по радиусу) ядро и сравнительно тонкий неоднородно прогретый слой между ядром и поверхностью пузырька. Далее с течением времени толщина неоднородно прогретого слоя увеличивается, а размер изотермического ядра уменьшается. Однако затем неоднородно прогретый слой начинает уменьшаться, а изотермическое ядро увеличивается.

Прогрев пара в центральном изотермическом ядре происходит за счет поршневого эффекта. Как легко убедиться, в изотермическом ядре уравнение (11) переходит в приближенное уравнение

$$T = T_0 \left(\frac{p_v}{p_{v0}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (34)$$

Это уравнение является уравнением адиабаты, связывающим температуру в ядре и давление в пузырьке. Отметим, что давление в пузырьке определено температурой на его поверхности по кривой насыщения. Таким образом, зная температуру на поверхности пузырька (например, из расчетов по однородной модели), по кривой насыщения и формуле (34) можно оценить температуру в его центре. Как видно из результатов, представленных на рис. 3, такая оценка является довольно точной.

Если пренебрегать тепло- и массообменом между паром в пузырьке и окружающей жидкостью,

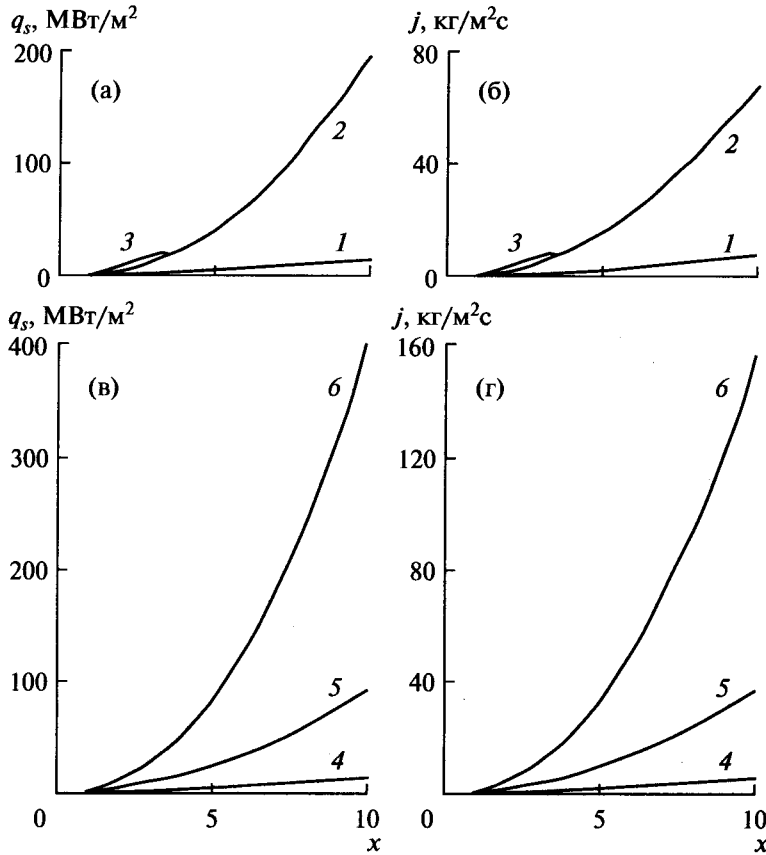


Рис. 7. Параметры тепло- и массообмена: (а) и (в) – удельный тепловой поток в жидкость (q_s), (б) и (г) – удельный массовый поток конденсирующегося пара (j) для случаев 1–6 (1–6).

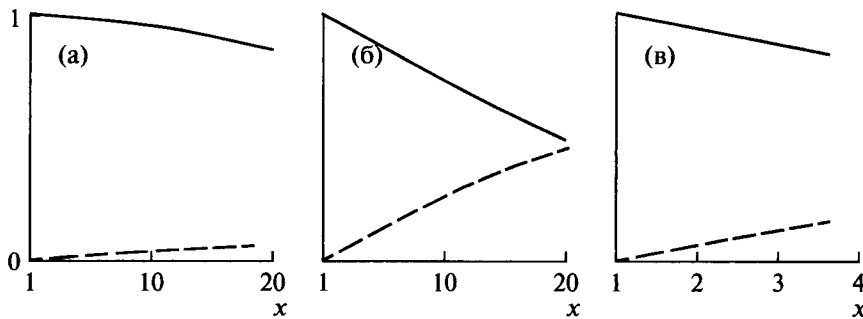


Рис. 8. Относительный вклад компонентов теплового потока. Сплошные кривые – $j\psi/q_s$, штриховые – q_{vs}/q_s для случаев 1 (а), 2 (б), 3 (в).

то температуру в пузырьке можно оценить по уравнению адиабаты

$$T_A = T_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} \quad (35)$$

В действительности, из-за конденсации на поверхности раздела фаз, пар в пузырьке сжимается в существенно меньшей степени, чем сам пузырек (рис. 5). Поэтому, а также из-за интенсивного отвода тепла в жидкость уравнение (35) существенно завышает прирост температуры в пузырьке, что видно из результатов, приведенных на рис. 6. Отметим, что

это завышение особенно велико (приблизительно на порядок) при низкой начальной температуре.

Зависимость характеристик теплообмена от степени сжатия показана на рис. 7. Отметим, что форма и расположение кривых для теплового и массового потоков сходны между собой, т.е. имеется корреляция между тепловым и массовым потоками. Это косвенно свидетельствует о том, что значительный вклад в тепловой поток, поступающий в жидкость, дает теплота конденсации. Данный вывод в целом подтверждается результатами, приведенными на рис. 8.

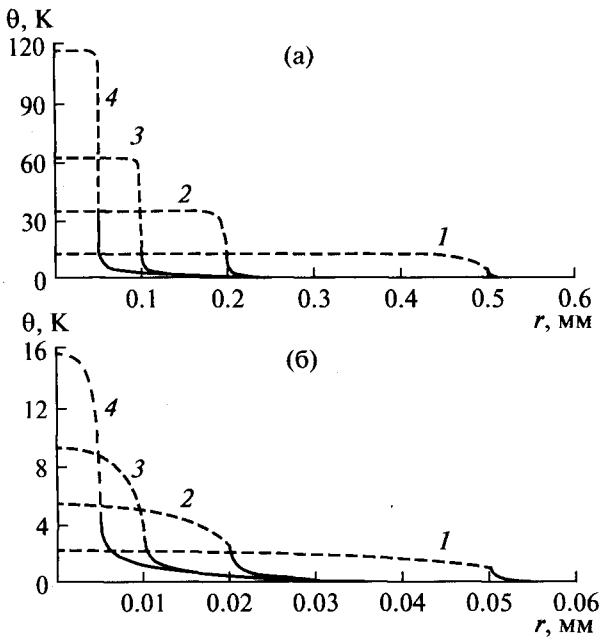


Рис. 9. Профили температуры в паре (пунктир) и жидкости (сплошные линии) для случаев 1 (а), 4 (б): 1 – $x = 2$, 2 – 5, 3 – 10, 4 – 20.

На рис. 9 приведены профили прироста температуры в паре и жидкости для случаев 1 и 4. В некоторых работах предлагается рассчитывать температурное поле в жидкости на основе метода [16], предполагающего, что толщина прогретого слоя жидкости намного меньше радиуса пузырька. Необходимо отметить, что метод [16] предложен для задач о растущих пузырьках. Как видно по результатам, приведенным на рис. 9, в случае сжимающихся пузырьков гипотеза о малости толщины прогретого слоя жидкости справедлива только на самой начальной стадии процесса. При степени сжатия около 10 эта толщина уже приблизительно равна радиусу пузырька.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель для описания нестационарных процессов, сопровождающих сжатие одиночного сферического парового пузырька при повышении давления в окружающей жидкости. Модель основана на предположении о гомобаричности, т.е. однородности давления по объему пузырька. При этом радиальные распределения температуры и плотности пара в пузырьке вычисляются в ходе решения задачи. Проведено численное моделирование эволюции паровых пузырьков в воде. Показано, что пространственная структура температурного поля в пузырьке представляет собой изотермическое (по радиусу) центральное ядро, окруженное сравнительно тонким неоднородно прогретым слоем. При этом разогрев центрального ядра происходит за счет поршневого эффекта. Сравнение с результатами, по-

лученными по модели однородного пузырька, показывает, что температура пара в однородном пузырьке близка к минимальной температуре пара (около границы) в гомобарическом пузырьке. Показано, что основным источником прогрева жидкости вокруг пузырька является тепло, выделяющееся при конденсации пара.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-08-01236-а; грант № 08-08-00203-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы звукохимии. Химические реакции в акустических полях: Уч. пос. для вузов. М.: Высшая школа, 1984. 272 с.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
4. Десятов А.В., Ильмов Д.Н., Черкасов С.Г. Математическое моделирование эволюции одиночного сферического парового пузырька при его сжатии внешним давлением // ТВТ. 2008. Т. 46. № 1. С. 92.
5. Hyunik Yang, Desyatov A.V., Cherkasov S.G., Il'mov D.N., McConnell D.B. Numerical Simulation of Compression of the Single Spherical Vapor Bubble on a Basis of the Uniform Model // Int. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 3615.
6. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
7. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Динамика паровых пузырьков // Изв. АН СССР МЖТ. 1975. № 3. С. 59.
8. Нигматулин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К. Вынужденные колебания газового пузырька в сферическом объеме сжимаемой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 111.
9. Ким Д.Ч. Стационарные уединенные волны в жидкости с теплопроводными пузырьками газа // Изв. вузов. Физика. 2006. № 6. С. 84.
10. Агафонов Д.В., Черкасов С.Г. Влияние переменности плотности на распространение тепла в газе // ТВТ. 2002. Т. 40. № 4. С. 617.
11. Черкасов С.Г., Черкасова А.С. Одномерный теплоперенос в газе с учетом эффектов, обусловленных тепловым расширением // Изв. РАН. Энергетика. 2007. № 1. С. 47.
12. Hyunik Yang, Desyatov A.V., Cherkasov S.G., McConnell D.B. On the Fulfillment of the Energy Conservation Law in Mathematical Models of Evolution of Single Spherical Bubble // Int. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 3623.
13. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
14. Флоршюц, Чао. Механизм разрушения пузырьков пара // Теплопередача. 1965. Т. 87. № 2. С. 58.
15. Десятов А.В., Ильмов Д.Н., Черкасов С.Г. Теоретическое исследование режимов сжатия сферического парового пузырька на основе упрощенной модели // ТВТ. 2007. Т. 45. № 6. С. 917.
16. Plesset M.S., Zwick S.A. The Growth of Vapor Bubbles in Superheated Liquids // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 4. P. 493.