В. В. Ишханов, О положительности главных миноров неособой $M$-матрицы,
*Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1981, том 111, 88

https://www.mathnet.ru/znsl1786

В.В.Ишханов

# О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ГЛАВНЫХ МИНОРОВ НЕОСОБЕННОЙ $M$ - МАТРИЦЫ.

Пусть $A$ - квадратная матрица порядка $n$, $a_{ij}$ - ее элементы, причем $a_{ii} \geqslant 0$ и $a_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$. В настоящей заметке дается элементарное доказательство известного факта (см. [I] ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\det A > 0$ и все главные миноры неотрицательны, то они положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через $\Delta_{i_1 \ldots i_t}$ главный минор, получаемый вычеркиванием строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_t$. По определению

$$\det A = \sum (-1)^{\mathcal{J}(j_1, \ldots, j_n)} a_{1j_1} \ldots a_{nj_n}, \tag{I}$$

где $(j_1, \ldots, j_n)$ - произвольная перестановка элементов $(1, \ldots, n)$ и $\mathcal{J}(j_1, \ldots, j_n)$ ее знак.

Доказательство проведем индукцией по $n$. При $n = 1$ утверждение тривиально. Нам достаточно показать, что $\Delta_k > 0$, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть $(i_1 \ldots i_t)$ - произвольный набор попарно различных натуральных чисел, не превосходящих $n$ и не равных $k$ Зафиксируем в сумме (I) члены, в которые входит произведение элементов $a_{ki_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{t-1} i_t} a_{i_t k}$. Сумма этих членов равна $(-1)^{\mathcal{J}_1} \Delta_{k i_1, \ldots, i_t} a_{k i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_t k}$, где $\mathcal{J}_1$ - знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 \ldots k \ldots i_1 \ldots i_{t-1} \ldots i_t \ldots n \\ 1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots i_t \ldots k \ldots n \end{pmatrix}$.

Знак этой подстановки равен $(-1)^t$. Суммируя по всевозможным наборам $(i_1, \ldots, i_t)$, получаем

$$\det A = \Delta_k a_{kk} + \sum_{i_1 \ldots i_t} (-1)^t (-1)^{t+1} |a_{ki_1} \ldots a_{i_t k}| \Delta_{k i_1, \ldots, i_t}.$$

т.е. $\det A = \Delta_k a_{kk} - c$, где $c \geqslant 0$, следовательно, $\Delta_k > 0$, $a_{kk} > 0$, что завершает доказательство предложения.

В заключение отметим, что данная задача была предложена автору В.П.Ильиным.

## Литература.

I. O s t r o w s k i A. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. - Comment.Math.Helv., 1937, vol.10, p.69-96.