Р. А. Поляк, К отысканию неподвижной точки одного класса точечно-множественных отображений,
Докл. АН СССР, 1978, том 242, номер 6, 1252–1255

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 242, № 6

УДК 518.1:519.34 МАТЕМАТИКА

Р. А. ПОЛЯК

К ОТЫСКАНИЮ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ОДНОГО КЛАССА ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 23 XII 1977)

Широкий класс экстремальных и игровых задач, а также ряд равновесных моделей математической экономики (см. ([1])) сводится к отысканию неподвижной точки точечно-множественного отображения, ставящего в соответствие каждой точке выпуклого компакта множество решений задачи выпуклого программирования. В работе исследуется структура отображения в окрестности неподвижной точки и устанавливается возможность использования для отыскания неподвижной точки методов (см., например, ([2])} решения операторных уравнений в случае сильно монотонных операторов.

Поскольку такого рода методы носят локальный характер, то в работе приводится общий метод, сходящийся с любого начального приближения и совпадающий с указанными методами в заключительной фазе процесса.

1. Пусть в E^N заданы p выпуклых функций $f_j(z)$, $j\in J=\{1,\ldots,p\}$, определяющих выпуклый компакт $\Omega=\{z\colon f_j(z)\leqslant 0,\ j\in J\}$, а на $\Omega\times\Omega$ определена непрерывная по (z, Z) и вогнутая по Z функция $\Phi(z, Z)$.

Рассмотрим точечно-множественное отображение

$$\omega(z)=\operatorname{Arg}\max\{\Phi(z, Z)\,|\,Z\in\Omega\}$$

компакта Ω в себя и поставим задачу отыскания неподвижной точки этого отображения, т. е. такой точки $z^*\in\Omega$, для которой либо $z^*\in\omega(z^*)$, либо

$$z^*=\arg\max\{\Phi(z^*, Z)\,|\,Z\in\Omega\}. \tag{1}$$

Существование точки z^* обеспечивается теоремой Какутани. Для определенности будем считать, что $J(z^*)=\{j\colon f_j(z^*)=0\}=\{1,\ldots,r\}$, $r<N$. Пусть $z=(x, y)$, $Z=(X, Y)$, x, $X\in E^n=E^{N-r}$, y, $Y\in E^r$. Назовем (см. ([3])) вектор-функцию $G(z)=\Phi_Z'(z, Z)\,|_{Z=z}=(G_x(z), G_y(z))$ псевдоградиентом $\Phi(z, Z)$, а ее матрицу Якоби $\mathrm{J}(G(z))=H(z)$ назовем псевдогессианом $\Phi(z, Z)$. Предполагая, что выполняется условие (А): градиенты $f_j'(z^*)$, $j\in J(z^*)$, линейно независимы, получим, что для задачи (1), которая при фиксированном $z=z^*$ является задачей выпуклого программирования, имеет место соотношение Куна — Таккера

$$G(z^*)=\sum_{j\in J(z^*)} u_j^* f_j'(z^*),\quad u_j^*\geqslant 0,\quad j\in J(z^*). \tag{2}$$

Для вектор-функции $f(z)=(f_1(z),\ldots,f_r(z))$ рассмотрим матрицу Якоби $f_z'=(f_x', f_y')$ и будем считать ее непрерывной. В силу условия (А) для достаточно малого $\varepsilon>0$ система $f(z)=0$ в окрестности $W(z^*, \varepsilon)=\{z\colon \|z-z^*\|\leqslant\varepsilon\}$ точки z^* определяет вектор-функцию $y(x)$, для которой существует непрерывная матрица Якоби $y_x'=-(f_y')^{-1}f_x'$ и $y(x^*)=y^*$.

Назовем $\varphi(x, X)=\Phi(x, y(x);\ X, y(X))$ сужением $\Phi(z, Z)$ относительно нелинейного многообразия $\Omega_{z^*}=\{z\colon f(z)=0\}$ и пусть $g(x)=\varphi_X'(x, X)\,|_{X=x}$ — псевдоградиент сужения, а $\mathrm{J}(g(x))=h(x)$ — его псевдогессиан. Легко видеть, что дифференциальные свойства $\varphi(x, X)$ совпадают с соответствующими свойствами $\Phi(z, Z)$ и $f(z)$.

2. Будем в дальнейшем предполагать псевдогессиан $H(z^*)$ неположительно квазиопределенным, т. е. считать, что существует $m_0 \geqslant 0$, для которого $(H(z^*)\zeta, \zeta) \leqslant -m_0(\zeta, \zeta)$, $\forall \zeta \in E^N$. Обозначим через $m_j \geqslant 0$ наименьшее собственное значение (н.с.з.) матрицы Гессе $f_j''(z^*)$, $j \in J(z^*)$, через $\mu \geqslant 0$ — н.с.з. матрицы Грамха $y_x'(x^*)(y_x'(x^*))^{\mathrm{T}}$ и положим

$$m = (m_0 + \sum_{j \in J(z^*)} u_j^* m_j)(1+\mu).$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (A), *существует* $H(z^*)$ *и* $f_j''(z^*)$, $j \in J(z^*)$; *тогда*

$$(h(x^*)\xi, \xi) \leqslant -m(\xi, \xi) \quad \forall \xi \in E^n. \tag{3}$$

Следствие. *Псевдогессиан сужения* $h(x^*)$ *оказывается отрицательно квазиопределенным* $(m>0)$, *если отрицательно квазиопределен* $H(z^*)$, *либо одна из функций* $f_j(z)$, $j \in J_+(z^*) = \{j \in J(z^*): u_j^* > 0\}$ *сильно выпукла. В случае* $m>0$ *и при непрерывности* $h(x)$ *в* $V(x^*, \delta) = \{x: \|x-x^*\| \leqslant \delta\}$ *псевдоградиент сужения* $g(x)$ *окажется в* $V(x^*; \delta)$ *сильно монотонным оператором, т. е. имеет место*

$$(g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2) \leqslant -m\|x_1 - x_2\|^2, \quad x_1, x_2 \in V(x^*, \delta). \tag{4}$$

Решение задачи (1) получим, отыскав

$$x^* = \arg\max \{\varphi(x^*, X) \quad | X \in V(x^*, \delta)\}, \quad y^* = y(x^*),$$

для чего достаточно воспользоваться, например, методами [2, 4] для решения нелинейной системы $g(x) = 0$, либо методами (см., например, [5]) безусловной оптимизации функции $\|g(x)\|^2$, которая в силу (4) сильно выпукла в $V(x^*; \delta)$.

На основе перечисленных методов могут быть построены операторы релаксации [6], т. е. операторы R: $W(z^*, \varepsilon) \to W(z^*, \varepsilon)$, для которых $\|Rz - z^*\| \leqslant \|z - z^*\|$. Конкретности ради рассмотрим псевдоградиентный оператор $Rz = (x + \tau g(x)), y(x + \tau\, \mathrm{tg}(x))$ и оператор Ньютона $Rz = (x - (h(x))^{-1} \cdot g(x), y(x - (h(x))^{-1} g(x)))$. При определенных условиях (см. [7, 8]) существует такое $\varepsilon > 0$, что эти операторы обладают соответственно свойствами: 1^0) $\|R^k z - z^*\| \leqslant Mq^k$, $q<1$; 2^0) $\|R^k z - z^*\| \leqslant Mq^{2^k}$, $q<1$; $z \in W(z^*; \varepsilon)$, а на основе методов (см. [9], стр. 78) применительно к минимизации $\|g(x)\|^2$ можно построить операторы релаксации со свойствами 2^0) и 3^0) $\|R^k z - z^*\| \leqslant Mq_k^k$, $q_k \to 0$.

Введем оператор псевдопроектирования P: $W(z^*, \varepsilon) \to W(z^*, \varepsilon)$ по формуле $P_z = (x, y - (f_y'(x, y))^{-1} f(x, y)) = (x, P_x y) = w$. Пусть $Y(z)$, $G_0(z)$, $H_0(z)$ определяются аналогично $y_x'(x)$, $g(x)$, $h(x)$, когда вместо $(x, y(x))$ взят вектор $z = (x, y) \in W(z^*, \varepsilon)$. Модифицированный псевдоградиентный оператор определим по формуле

$$\tilde{R}z = (x + \tau G_0(w), \; P_x y + \tau Y(w) G_0(w)), \tag{5}$$

а модифицированный оператор Ньютона — по формуле

$$\tilde{R}z = (x - (H_0(w))^{-1} G_0(w), \; P_x y - Y(w)(H_0(w))^{-1} G_0(w)). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $m>0$; *тогда найдется такое* $\varepsilon>0$, *что для* $\forall z \in W(z^*; \varepsilon)$:

1) *если* $G_0(z)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L *и* $0 < \tau \leqslant mL^{-2}$, *то оператор* (5) *обладает свойством* 1^0);

2) *если* $H_0(z)$ *удовлетворяет условию Липшица, то оператор* (6) *обладает свойством* 2^0).

3. Операторы типа (5), (6) порождают локально сходящуюся к z^* последовательность приближений, поэтому для включения их в вычислительный процесс необходимо отыскать $z \in W(z^*, \varepsilon)$ и выделить Ω_{z^*}. Это осуществляется в рамках проводимого ниже общего метода, для реализации которого используются следующие оценки близости произвольного $z \in \Omega$ к z^*.

Пусть $z \in \Omega$ и $\delta > 0$, рассмотрим множество индексов $J(z; \delta) = \{j: -\delta < f_j(z) \leqslant 0\}$ и функцию $\mu^*(z, \delta) = \max\{(G_0(z), \zeta) \mid (f_j'(z), \zeta) \leqslant \delta, j \in J(z, \delta), |\zeta_i| \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, N\}$.

Лемма 1. *Имеет место*

$$\mu^*(z; \delta) \geqslant \Big(m_0 + \sum_{j \in J(z^*)} u_j^* m_j\Big) \min\{\|z - z^*\|, \|z - z^*\|^2\}, \quad z \in \Omega, \ \delta > 0. \tag{7}$$

Для $z \in \Omega$ и достаточного малого $\delta > 0$ рассмотрим функцию $\mu_-(z, \delta) = \max\{(G_0(z), \zeta) \mid (f_j'(z), \zeta) \leqslant -\delta, j \in J(z, \delta), |\zeta_i| \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, N\}$ и пусть $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ — управляющая последовательность.

Лемма 2. *Если выполнено условие* (A) *и* $\mu_-(z_k; \delta_k) \leqslant \delta_k$, *то найдется такой номер* k_0, *что для* $k \geqslant k_0$ *имеет место*

$$\mu^*(z_k, \delta_k) \leqslant \delta_k \Big(1 + \lambda \sum_{j \in J(z^*)} u_j^*\Big), \quad \lambda > 2. \tag{8}$$

Для $z \in W(z^*; \varepsilon)$ рассмотрим $\psi(z) = \max\{f_j(z) \mid j \in J\}$, вектор $u(z) = G_y(z)(f_y'(z))^{-1}$, $v(z) = \max\{-u_j(z) \mid j \in J(z^*)\}$ и $\nu(z) = \max\{\|G_0(z)\|, v(z), \psi(z)\}$. Тогда, согласно теореме Куна — Таккера, для того чтобы вектор $z \in W(z^*, \varepsilon)$ был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы $\nu(z) = 0$.

Если $G_0(z)$ и $f_j'(z)$, $j \in J(z^*)$, удовлетворяют условию Липшица, то найдется $M > 0$ такое, что для $z \in W(z^*, \varepsilon)$ имеет место

$$\nu(z) = \nu(z) - \nu(z^*) \leqslant M\|z - z^*\|. \tag{9}$$

Будем говорить, что управляющая последовательность $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ согласована с оператором $\tilde{R}$, если $\overline{\lim}\, \nu(\tilde{R}^k z)\delta_k^{-1} = 0$, $\forall z \in W(z^*, \varepsilon)$. С учетом (9), например, последовательности $\{(k+1)^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{(k+1)^{-k}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q^k\}_{k=0}$, $q < 1$, согласованы с операторами релаксации, удовлетворяющими соответственно свойствам 1°)–3°).

Рассмотрим оператор C: $\Omega \to \Omega$, а на $\Omega \times E_+^1$ определим неотрицательную и полунепрерывную снизу в точках $(z, 0)$, $z \in \Omega$, функцию $\mu(z, \delta)$ такую, что из $\mu(z, 0) = 0$ следует $z = z^*$. Для оператора C и функции $\mu(z, \delta)$ будем считать выполненным условие

$$\mu(z; \delta) - \mu(Cz, \delta) \geqslant \sigma(\delta) > 0, \quad \forall (z \in \Omega: \mu(z, \delta) \geqslant \delta). \tag{10}$$

4. Перейдем к описанию общего метода (см. также [6]), который в начальной фазе использует операторы C, а в заключительной — лишь операторы $\tilde{R}$. Выберем операторы C, $\tilde{R}$ функцию $\mu(z, \delta)$, управляющие последовательности $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_l\}_{l=0}^{\infty}$, исходное приближение $z_0 \in \Omega$ и положим $i(0) = 0$. Пусть уже найдено z_k и $i(k)$. Если $\mu(z_k, \delta_{i(k)}) > \delta_{i(k)}$, то полагаем $z_{k+1} = Cz_k$, $i(k+1) = i(k)$ и переходим к очередному шагу. В случае $\mu(z_k, \delta_{i(k)}) \leqslant \delta_{i(k)}$ отыскиваем $\mu^*(z_k, \delta_{i(k)})$ и полагаем $\varepsilon_k = (\mu^*(z_k, \delta_{i(k)}))^{1/2(1-\rho)}$, $0 < \rho < 1$, $\tilde{z}_0 = z_k$, определяем множество индексов $J(z_k, \varepsilon_k)$ и вектор-функцию $f(z) = (f_j(z))_{j \in J(z_k, \varepsilon_k)}$. Проверяем $\Delta(\tilde{z}_0) = |\det f_y'(\tilde{z}_0)| \leqslant \delta_{i(k)}$. Если это неравенство выполнено, то $z_{k+1} = Cz_k$, $i(k+1) = i(k) + 1$, иначе, т. е. при $\Delta(\tilde{z}_0) > \delta_{i(k)}$, строим $\nu(z)$. В случае $\nu(\tilde{z}_0) \leqslant \lambda_0$ полагаем $\tilde{z}_1 = \tilde{R}\tilde{z}_0$. Пусть уже найдено $\tilde{z}_l$, тогда при $\nu(\tilde{R}\tilde{z}_l) \leqslant \lambda_{i+1}$ полагаем $\tilde{z}_{l+1} = \tilde{R}\tilde{z}_l$, а при $\nu(\tilde{R}\tilde{z}_l) > \lambda_{l+1}$ пола-

гаем $z_{k+1}=Cz_k$, $i(k+1)=i(k)+l+1$, и продолжаем процесс. Имеет место

Теорема 3. *Если оператор C и функция $\mu(z,\delta)$ удовлетворяют* (10), *а управляющая последовательность $\{\lambda_l\}_{l=0}^{\infty}$ согласована с оператором $\tilde{R}$, то для любой управляющей последовательности $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$, начиная с некоторого момента, последовательность приближений порождается лишь оператором $\tilde{R}$.*

Условие (10) в теореме 3 можно заменить требованием, чтобы последовательность $\{C^k z\}_{k=1}^{\infty}$ содержала подпоследовательность $\{C^{k_i}z\}_{i=0}^{\infty}$, для которой $\lim C^{k_i}z=z^*$. Этому требованию удовлетворяют различные операторы C, которые могут быть построены на основе методов ([3], [10–13]).

5. Приведем несколько конкретизаций задачи (1).

1^{00}. Задача выпуклого программирования $z^*=\arg\max\{\varphi(z)\,|\,z\in\Omega\}$ ($\varphi(z)$ вогнутая) сводится к (1), если положить $\Phi(z,\ Z)=(\varphi'(z),\ Z)$. В этом случае $G(z)=\varphi'(z)$, $H(z)=\varphi''(z)$. Отметим, что z^* – решение вариационного неравенства $(G(z),\ w-z)\leqslant 0$, $\forall w\in\Omega$ (см. ([10])).

2^{00}. Задача отыскания седловой точки

$$z^*=(x^*,\ y^*)=\arg\max\min\{F(x;\ y)\,|\,x\in\Omega_1,\ y\in\Omega_2\}$$

вогнуто-выпуклой функции $F(x,\ y)$ на выпуклых компактах Ω_1 и Ω_2 сведется к (1), если положить

$$\Phi(z,\ Z)=F(X,y)-F(x,\ Y);\quad \Omega=\Omega_1\times\Omega_2;\quad z=(x,y);\quad Z=(X,\ Y).$$

3^{00}. Модель Вальраса – Вальда в случае, когда ограничения учитывают эффект, связанный с уменьшением маргинальных уровней трансформации (см. ([15]), стр. 305), сводится к (1), если положить $\Phi(z,\ Z)=(c(z),\ Z)$, где компоненты вектор-функции $c(z)=(c_1(z),\ldots,\ c_N(z))$ указывают цены на выпускаемые продукты при плане производства $z=(z_1,\ldots,\ z_N)$, а $\Omega=\{z\colon\ f_j(z)\leqslant 0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ p\}$ – множество допустимых планов, причем $f_j(z)$, $j=1,\ 2,\ldots,\ p$,– выпуклые функции.

Украинский филиал Научно-исследовательского
института планирования и нормативов
при Госплане СССР
Киев

Поступила
6 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Т. Дебре*, УМН, т. 32, 3 (1977). [2] *М. М. Вайнберг*, Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., 1972. [3] *Р. А. Поляк, М. Е. Примак*, Кибернетика, № 2 (1977). [4] *Дж. Ортега, В. Рейнболдт*, Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, М., 1975. [5] *Ю. М. Данилин, В. М. Панин*, Кибернетика, № 3 (1974). [6] *Р. А. Поляк*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 18, № 1 (1978). [7] *Л. В. Канторович*, ДАН, т. 56, № 3 (1947). [8] *Л. В. Канторович*, ДАН, т. 60, № 7 (1948). [9] *Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин*, Численные методы в экстремальных задачах, М., «Наука», 1975. [10] *А. Б. Бакушинский, Б. Т. Поляк*, ДАН, т. 219, № 5 (1974). [11] *Е. Г. Гольштейн*, Экономика и матем. методы, т. 11, № 6 (1975). [12] *В. Ф. Демьянов, А. Б. Певный*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 12, № 5 (1972). [13] *В. А. Волконский, С. А. Иванков*, Сиб. матем. журн., т. 10, № 4 (1970). [14] *Р. А. Поляк, М. Е. Примак*, Кибернетика, № 4 (1977). [15] *С. Карлин*, Математические методы в теории игр, программирования и экономике, М., 1964.