В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов,
Докл. АН СССР, 1961, том 139, номер 3, 548–551

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 139, № 3

МАТЕМАТИКА

В. И. МАЦАЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 III 1961)

В настоящей заметке мы придерживаемся терминологии и обозначений из [1]. В частности, под $\mathfrak{S}_\infty$ понимается банахово пространство всех вполне непрерывных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с обычной нормой $|A|_\infty = \sup\limits_{f\in\mathfrak{H}} (|Af|/|f|)$; под $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — банахово пространство всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых $(|A|_p)^p = \Sigma s_n^p(A) = \mathrm{Sp}\,((A^*A)^{p/2}) < \infty$, где $s_n(A)$ — последовательность занумерованных в порядке убывания с учетом кратностей собственных чисел оператора $(A^*A)^{1/2}$, а под $\mathfrak{S}_\omega$ — банахово пространство операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых $|A|_\omega = \Sigma (2n-1)^{-1} s_n(A) < \infty$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_\omega$ при любом p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Множество $\hat{\mathfrak{S}}_\omega$ всех самосопряженных операторов из $\mathfrak{S}_\omega$ является вещественным подпространством пространства $\mathfrak{S}_\omega$. В пространстве $\hat{\mathfrak{S}}_\omega$ введем новую норму $|H|_{\omega, K^*}$, топологически эквивалентную исходной, полагая $|H|_{\omega, K^*} = |H^+|_\omega + |H^-|_\omega$, где H^+ и H^- — взаимно ортогональные неотрицательные операторы, разность которых равна H.

М. С. Бродский [2] показал, что всякий вольтерров оператор A (т. е. всякий вполне непрерывный оператор A с единственной точкой спектра $\lambda = 0$) допускает сходящееся по норме $\mathfrak{S}_\infty$ представление *

$$A = 2i \int\limits_{\mathfrak{P}} PX\,dP \tag{1}$$

через свою мнимую эрмитову компоненту X и максимальную собственную цепочку $\mathfrak{P}$. Обратно, если для некоторого $X = X^* \in \mathfrak{S}_\infty$ интеграл (1) сходится по норме $\mathfrak{S}_\infty$, то A является единственным вольтерровым оператором, обладающим собственной цепочкой $\mathfrak{P}$ и мнимой компонентой X. Вещественную компоненту интеграла (1) мы будем обозначать через $\mathfrak{G}(\mathfrak{P}, X)$. Необходимым условием для сходимости интеграла (1) является условие

$$(P - Q)\, X\, (P - Q) = 0, \tag{2}$$

где (P, Q) — произвольный разрыв цепочки $\mathfrak{P}$. Достаточность этого условия для $X \in \mathfrak{S}_1$ доказана М. С. Бродским [2], а для $X \in \mathfrak{S}_p$ $(p > 1)$ И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном (см. [1,3]).

Т е о р е м а 1. *Для всякого оператора $X \in \mathfrak{S}_\omega$ и любой цепочки $\mathfrak{P}$, удовлетворяющей условию* (2), *сходится интеграл* (1). *Кроме того, имеет место соотношение*

$$\sup |G|_\infty = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(H^+) + s_j(H^-)}{2j - 1} = \frac{2}{\pi} |H|_{\omega, K^*}, \tag{3}$$

* Здесь использовано определение и форма записи интеграла треугольного усечения, предложенная И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [1].

где supremum слева берется по всем вольтерровым операторам $A = G + iH$ *с фиксированной мнимой компонентой* $H = H^* \in \mathfrak{S}_\omega$.

На основании неравенств Фан-Цьзи (Ки-фана [4]) предварительно устанавливается

Лемма 1. *Пусть* $H = H^* \in \mathfrak{S}_\omega$; *тогда*

$$\sup \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n-1)^{-1} (H\varphi_n, \varphi_n) = |H|_{\omega, K^*}, \tag{4}$$

где верхняя грань берется по всевозможным ортонормированным системам $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *из* $\mathfrak{H}$.

Приступая к доказательству теоремы 1, заметим, что первое ее утверждение достаточно доказать для самосопряженных операторов.

Не ограничивая общности, мы предположим, что цепочка $\mathfrak{P}$ непрерывна. Допустим вначале, что $H = H^*$ — конечномерный оператор. При $X = H$ интеграл (1) сходится к некоторому вольтеррову оператору $A = G + iH$, который принадлежит $\mathfrak{S}_2$. Пользуясь интегралом (1), построим вольтерров оператор $B = K + iL$ с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$ и вещественной компонентой $K = (\cdot, \varphi)\varphi$, где φ — заданный орт из $\mathfrak{H}$. Вполне непрерывный оператор AB имеет непрерывную собственную цепочку $\mathfrak{P}$ и, следовательно, также вольтерров. Так как $A, B \in \mathfrak{S}_2$, то $AB \in \mathfrak{S}_1$ и, по теореме В. Б. Лидского [4], $\mathrm{Sp}\,(AB) = 0$. Беря вещественные компоненты от обеих частей этого равенства, получим $\mathrm{Sp}\,(GK - HL) = 0$, или

$$\mathrm{Sp}\,(GK) = \mathrm{Sp}\,(HL). \tag{5}$$

В силу теоремы М. С. Лившица (см., например, [3]) оператор B унитарно эквивалентен несущественному расширению оператора I интегрирования в $\mathcal{L}^2(0, 1)$: $If = 2\int_0^x f(t)\,dt$. Отсюда следует, что отличные от нуля собственные числа оператора L равны $2/\pi(2j-1)$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$

Теперь можно переписать (5) в виде

$$(G\varphi, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2i-1)^{-1} (H\varphi_j, \varphi_j), \tag{6}$$

где $\{\varphi_j\}$ — собственные векторы оператора L. Применяя лемму 1 и беря слева в (5) верхнюю грань по φ, получаем

$$|G|_\infty \leqslant \frac{2}{\pi} |H|_{\omega, K^*}. \tag{7}$$

Пусть теперь $H \in \mathfrak{S}_\omega$. Возьмем последовательность конечномерных операторов $H_n = H_n^*$ такую, что $|H_n - H|_\omega \to 0$. В силу (7) имеем $|\mathcal{G}(\mathfrak{P}, H_n) - \mathcal{G}(\mathfrak{P}, H_m)| \to 0$; следовательно, операторы $\mathcal{G}(H_n) + iH_n$ сходятся к некоторому вольтеррову оператору $A = G + iH$, который имеет собственную цепочку $\mathfrak{P}$ и, по упомянутой выше теореме М. С. Бродского, допускает представление в виде сходящегося по норме $\mathfrak{S}_\infty$ интеграла (1).

Перейдя в неравенстве $|\mathcal{G}(H_n)| \leqslant \frac{2}{\pi} |H_n|_{\omega, K^*}$ к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (7). Так как A есть единственный оператор с мнимой компонентой H и собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, то это неравенство можно считать установленным для любого вольтеррова оператора $A = G + iH$ при $H \in \mathfrak{S}_\omega$. Точно так же можно доказать для A справедливость соотношения (6).

Остается проверить, что при любом $\varepsilon > 0$ существует вольтерров оператор $A = G + iH$ с заданной мнимой компонентой H ($\in \mathfrak{S}_\omega$), такой, что

$G| > \frac{2}{\pi} |H|_{\omega, K^*} - \varepsilon$. По лемме 1 существует ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$, для которого выполнено (4). Возьмем оператор $B = K + iL$, унитарно эквивалентный оператору интегрирования и такой, что $L\varphi_n = (2/\pi(2n-1))\varphi_n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$). Пусть $\mathfrak{P}$ — его собственная цепочка. Положив $G = \mathcal{S}(\mathfrak{P}, H)$ и пользуясь (6), получаем

$$|G| \geqslant (G\varphi, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (2j-1)^{-1} (H\varphi_j, \varphi_j) > \frac{2}{\pi} (|H|_{\omega, K^*} - \varepsilon).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Равенство (3) заставило автора предположить, что принадлежность оператора X ($\in \mathfrak{S}_\infty$) классу $\mathfrak{S}_\omega$ является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы интеграл (1) сходился для любой непрерывной цепочки $\mathfrak{P}$. Справедливость этого предположения была доказана И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном, которые сообщили автору также следующее предложение.

Пусть $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *— некоторая ортонормированная система. Тогда найдется непрерывная цепочка* $\mathfrak{P}$ *такая, что для любого вполне непрерывного самосопряженного оператора*

$$X = \sum_j \lambda_j (\cdot, \varphi_j)\varphi_j \quad \left((2j-1)\lambda_j > 0;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_j}{2j-1} = \infty\right)$$

интеграл (1) *расходится* (*даже в смысле слабой сходимости*). *Обратно, для любой непрерывной цепочки* $\mathfrak{P}$ *можно составить ортонормированную систему* $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *так, чтобы интеграл* (1) *расходился для любого оператора* X *только что указанного типа.*

Возможность расходимости интеграла (1) для некоторых $X \in \mathfrak{S}_\infty$ при специальном выборе цепочки $\mathfrak{P}$ была обнаружена М. С. Бродским ([2]).

Можно доказать, что для каждого оператора $X = X^* \in \mathfrak{S}_\infty$ всегда найдется непрерывная цепочка $\mathfrak{P}$, для которой интеграл (1) сходится.

2. Л. А. Сахнович ([6]) показал, что если у ограниченного оператора с вещественным спектром $A = G + iH$ мнимая компонента $H \in \mathfrak{S}_2$, то у этого оператора имеется достаточно богатый запас инвариантных подпространств. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн и независимо от них автор показали, что этот факт имеет место при $H \in \mathfrak{S}_p$.

Имеет место более общее и полное предложение:

Теорема 2. *Оператор* $A = G + iH$, $H \in \mathfrak{S}_\omega$, *имеющий вещественный спектр, есть* S*-оператор в смысле* ([7]).

Поясним, что оператор A с вещественным спектром называется S-оператором, если он обладает следующими свойствами. Для каждого конечного интервала Δ вещественной оси существует инвариантное относительно оператора A подпространство $L(\Delta)$ такое, что: а) на $L(\Delta)$ оператор A определен всюду и ограничен; б) спектр индуцированной на $L(\Delta)$ части оператора A состоит из пересечения спектра оператора A с интервалом Δ и, быть может, концов интервала Δ; в) каждое инвариантное подпространство, на котором оператор A определен всюду, ограничен и имеет в качестве спектра часть сегмента Δ, входит в $L(\Delta)$; г) система инвариантных подпространств, соответствующих любому покрытию вещественной оси интервалами, полна в $\mathfrak{H}$.

По-видимому, теорема 2 допускает такое обращение: для каждого оператора $H = H^* \overline{\in} \mathfrak{S}_\omega$ найдется оператор $G = G^*$ такой, что оператор $A = G + iH$ на любом своем инвариантном подпространстве имеет спектр, совпадающий со спектром всего оператора A, который при этом является вещественным и состоит более чем из одной точки.

Теорема 2 доказывается на основании теоремы 3 из ([7]) и следующей леммы.

Л е м м а 2. *Резольвента оператора с вещественным спектром* $A = G + iH$, *где* $G = G^*$ (*и, вообще говоря, неограничен*), *а* $H = H^* \in \mathfrak{S}_\infty$, *допускает следующую оценку*:

$$\ln |R_\lambda| = \ln |(A - \lambda I)^{-1}| \leqslant C\,[1 + |\operatorname{Im}\lambda|^{-2}\, n\,(2\,|\operatorname{Im}\lambda|^{-1})],$$

где $n(t)$ *означает число* $1/s_k(H)$, *не превосходящих* t.

3. Пользуясь другими оценками резольвенты, можно доказать такую теорему:

Т е о р е м а 3. *Система собственных и присоединенных векторов оператора* $A = H(I+T)$, *где* $H = H^* \in \mathfrak{S}_\infty$, *а* $T \in \mathfrak{S}_\omega$, *полна в области его значений.*

Этой теореме легко придать форму, сходную с формой теоремы М. В. Келдыша из ([8]), а именно:

Если уравнение $y = Ay + \lambda Hy$ *имеет дискретный спектр*, $H = H^* \in \mathfrak{S}_\infty$ — *полный оператор* (*см.* ([8])), $A \in \mathfrak{S}_\omega$, *то система собственных и присоединенных векторов этого уравнения полна в* $\mathfrak{H}$.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР

Поступило
16 III 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Г о х б е р г, М. Г. К р е й н, ДАН, **137**, № 5 (1961). [2] М. С. Б р о д с к и й, Усп. матем. наук, **16**, в. 1 (1961). [3] F a n К y, Proc. Nat. Acad. Sci., **1**, 35 (1949); **2**, 36 (1950). [4] В. Б. Л и д с к и й, ДАН, **125**, № 3 (1958). [5] И. Ц. Г о х б е р г, М. Г. К р е й н, ДАН, **128**, № 2 (1959). [6] Л. А. С а х н о в и ч, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4, (11) (1959). [7] Ю. И. Л ю б и ч, В. И. М а ц а е в, ДАН, **13**, № 1(1960). [8] М. В. К е л д ы ш, ДАН, **77**, № 1 (1951).