Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. I. Bizhanova, Solution in a weighted Hцlder space of an initial-boundary value problem for a second-order parabolic equation with a time derivative in the conjugation condition, *Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 1, 64–94

https://www.mathnet.ru/eng/aa424

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
May 15, 2025, 19:40:29

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

© 1994 г.

РЕШЕНИЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГЁЛЬДЕРА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Г. И. Бижанова

Изучается начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения, не вкладывающаяся в общую теорию параболических начально-краевых задач и относящаяся к числу условно-корректных. Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи в весовом гёльдеровском пространстве функций с весом в виде степенной функции от t. Для доказательства теоремы построены тепловые потенциалы в явном виде, являющиеся решением модельной задачи сопряжения в пространстве R^n, установлены оценки потенциала в весовых гёльдеровских нормах.

§1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, $n \geqslant 2$, с границей S, $\Gamma \subset \Omega$ — замкнутая поверхность, разделяющая Ω на две области Ω_1 и Ω_2 так, что $\partial\Omega_1 = S \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = \Gamma$, и $\Gamma \cap S = \varnothing$. Положим $Q_T^{(m)} = \Omega_m \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Пусть

$$L_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{A}_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где $\mathcal{A}_m$ — эллиптический оператор второго порядка,

$$\mathcal{A}_m = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + a^{(m)}(x,t),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0\xi^2, \qquad \forall (x,t) \in \bar{Q}_T^{(m)}, \ \xi \in R^n,$$

$$a_0 = \text{const} > 0, \qquad a_{ij}^{(m)}(x,t) = a_{ji}^{(m)}(x,t),$$

причем

$$a_{ij}^{(1)}(x,t) \neq a_{ij}^{(2)}(x,t), \qquad \forall (x,t) \in \Gamma_T, \ i,j = 1, \dots, n.$$

Ключевые слова: параболическое уравнение второго порядка, условно-корректная задача, весовое пространство Гёльдера.

Рассмотрим задачу сопряжения

$$L_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u_m(x,t)=f_m(x,t)\quad \text{в}\quad Q_T^{(m)},\qquad m=1,2, \tag{1.1}$$

$$u_m|_{t=0}=u_{0m}(x)\quad \text{в}\quad \Omega_m \tag{1.2}$$

$$B_1\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)w\Big|_{\Gamma_T}\equiv\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+b(x,t)\nabla u_1-c(x,t)\nabla u_2\right.$$
$$\left.+b_0(x,t)u_1+c_0(x,t)u_2\right)\Big|_{\Gamma_T}=\psi(x,t), \tag{1.3}$$

$$B_2w|_{\Gamma_T}\equiv(u_1-u_2)|_{\Gamma_T}=\varphi(x,t), \tag{1.4}$$

$$B_0u_1|_{S_T}\equiv u_1|_{S_T}=p(x,t), \tag{1.5}$$

где $w(x,t)=(u_1,u_2)$, $b(x,t)=(b_1(x,t),\dots,b_n(x,t))$, $c(x,t)=(c_1(x,t),\dots,c_n(x,t))$, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$.

Будем предполагать, что

$$b(x,t)n(x)\geqslant\delta_0>0,\ \ c(x,t)n(x)\geqslant\delta_0>0\quad \text{на}\ \Gamma_T, \tag{1.6}$$

где $n(x)$ — нормаль к поверхности Γ в точке x, направленная внутрь области Ω_2.

Задача (1.1)–(1.5) с производной по времени в условии сопряжения возникает при изучении тепловых процессов в разнородных средах [1–5], в частности, при линеаризации двухфазной задачи Стефана. Она не вкладывается в класс начально-краевых задач для параболических уравнений и систем, для которых построена общая теория [6–10]. Эта задача относится к числу условно-корректных, для ее однозначной разрешимости требуется выполнение условия (1.6). Такому же классу задач принадлежит начально-краевая задача для параболического уравнения с производной по времени в граничном условии [3,4, 11-15 и др.], которая, как показал С. И. Темирбулатов [16], перестает быть корректной в смысле Адамара, если не выполнено определенное условие вида (1.6).

Задачу (1.1)–(1.5) впервые получил и исследовал в пространстве Гёльдера Б. В. Базалий [2] при линеаризации двухфазной задачи Стефана. В работах [2,4] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев установили разрешимость в пространстве $C_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}$ модельных задач для уравнения теплопроводности вида (1.1)–(1.5). Е. В. Радкевич [5] в связи с изучением ряда двухфазных задач со свободной границей для параболических уравнений выделил и рассмотрел задачи с производной по времени в условии сопряжения.

В настоящей статье будет доказана однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.5) в весовом гёльдеровском пространстве $C_s^{l,l/2}(Q_T)$ с весом в виде степенной функции от t. Изучение задач в этом пространстве позволяет за счет уменьшения числа s понизить гладкость заданных функций и уменьшить порядок согласования начальных и краевых условий при $t=0$.

Пространство $C_s^{l,l/2}(Q_T)$ впервые было введено В. С. Белоносовым и Т. И. Зеленяком [17]. В весовом пространстве Гёльдера общие начально-краевые задачи для параболических уравнений и систем были изучены В. С. Белоносовым и Т. И. Зеленяком [17], В. А. Солонниковым [18], В. С. Белоносовым [19], В. А. Солонниковым и А. Г. Хачатряном [20], Е. Д. Домановой [21], Г. И. Бижановой и В. А. Солонниковым [11], Г. И. Бижановой [22].

Приведем определение весового гёльдеровского пространства $C_s^{l,l/2}(Q_T)$, следуя работам [17–20].

Пусть l — нецелое положительное число, $s \leqslant l$. Через $C_s^{l,l/2}(Q_T)$ обозначим пространство функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{s,Q_T}^{(l)} = \sup_{t\leqslant T} t^{\frac{l-s}{2}}[u]_{Q_t'}^{(l)} + \sum_{s<2j_0+|j|<l} \sup_{t\leqslant T} t^{\frac{2j_0+|j|-s}{2}}|D_t^{j_0}D_x^j u|_\Omega + \begin{cases} |u|_{Q_T}^{(s)}, & s\geqslant 0 \\ 0, & s<0 \end{cases}, \tag{1.7}$$

где $Q_t' = \Omega\times(\frac{t}{2},t)$,

$$[u]_{Q_t'}^{(l)} = \sum_{2j_0+|j|=[l]} [D_t^{j_0}D_x^j u]_{x,Q_t'}^{(l-[l])} + \sum_{0<l-2j_0-|j|<2} [D_t^{j_0}D_x^j u]_{t,Q_t'}^{\left(\frac{l-2j_0-|j|}{2}\right)},$$

$$[v]_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t),(z,t)\in\bar{Q}_T\\ |x-z|\leqslant\rho_0}} |v(x,t)-v(z,t)|\cdot|x-z|^{-\alpha},$$

$$[v]_{t,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t),(x,t_1)\in Q_T\\ |t-t_1|\leqslant\rho_0}} |v(x,t)-v(x,t_1)||t-t_1|^{-\alpha},$$

$|u|_{Q_T}^{(s)}$ — норма пространства Гёльдера $C_{x\ t}^{s,s/2}(\bar{Q}_T)$ [6].

При $s=l$ пространство $C_s^{l,l/2}(Q_T)$ является пространством Гёльдера $C_{x\ t}^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$.

Определим пространство $\overset{\circ}{C}{}_s^{l,l/2}(Q_T)$. При $s\geqslant 0$ $\overset{\circ}{C}{}_s^{l,l/2}(Q_T)$ есть подпространство пространства функций из $C_s^{l,l/2}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $D_t^k u|_{t=0}$, $2k\leqslant s$, при $s<0$ полагается $\overset{\circ}{C}{}_s^{l,l/2}(Q_T)\equiv C_s^{l,l/2}(Q_T)$.

Имеет место лемма об эквивалентности норм [18].

Лемма 1.1. *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}_s^{l,l/2}(Q_T)$ *норма* (1.7) *эквивалентна норме*

$$\|u\|_{s,Q_T}^{(l)} = \sup_{t\leqslant T} t^{\frac{l-s}{2}}[u]_{Q_t'}^{(l)} + \sup_{t\leqslant T} t^{-\frac{s}{2}}|u|_\Omega.$$

Определим условия согласования для задачи (1.1)–(1.5). Пусть $u_m(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Обозначим

$$u_m^{(j)}(x) = D_t^j u_m(x,t)|_{t=0},$$

тогда

$$\begin{aligned} u_m^{(0)}(x) &= u_{0m}(x), \\ u_m^{(j+1)}(x) &= D_t^j \mathcal{A}_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_m(x,t) + D_t^j f_m(x,t)|_{t=0} \\ &= \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}_m^{(i)}\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_m^{(j-i)}(x) + f_m^{(j)}(x), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Будем говорить, что выполнены условия согласования порядка $m \geqslant 0$, если

$$u_1^{(j)}(x)|_S = p^{(j)}(x), \qquad j = 0, 1, \dots, m, \tag{1.9}$$

$$(u_1^{(j)}(x) - u_2^{(j)}(x))|_\Gamma = \varphi^{(j)}(x), \qquad j = 0, 1, \dots, m, \tag{1.10}$$

в случае $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{j} C_j^i \mathcal{A}_1^{(i)}\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1^{(j-i)}(x) + f_1^{(j)}(x)|_\Gamma \\ &\quad = \psi^{(j)}(x) - \sum_{i=0}^{j} C_j^i \left[b^{(i)}(x)\nabla u_1^{(j-i)}(x) - c^{(i)}(x)\nabla u_2^{(j-i)}(x)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + b_0^{(i)}(x) u_1^{(j-i)}(x) + c_0^{(i)}(x) u_2^{(j-i)}(x)\right]\Big|_\Gamma, \\ &\qquad\qquad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть l — нецелое положительное число, $l < s \leqslant 2 + l$, поверхности $S, \Gamma \in C^{2+l}$, коэффициенты операторов $\mathcal{A}_m$, $m = 1, 2$, принадлежат $C_{x\ t}^{l,l/2}(\bar{Q}_T^{(m)})$, оператора B_1 – $C_x^{1+l,}{}_t^{1+l/2}(\Gamma_T)$ и выполнены условия* (1.6).

Тогда при любых функциях $f_m(x,t) \in C_{s-2}^{l,l/2}(Q_T^{(m)})$, $u_{0m}(x) \in C^s(\Omega_m)$ и $u_{01}(x)|_\Gamma \in C^\beta(\Gamma)$, где $\beta = \min(1 + s, 2 + l)$, $p(x,t) \in C_s^{2+l,1+l/2}(S_T)$, $\varphi(x,t) \in C_s^{2+l,1+l/2}(\Gamma_T)$, $\psi(x,t) \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, удовлетворяющих условиям согласования порядка $[s/2]$ (1.9), (1.10) *и при $s \geqslant 2$* (1.11), *задача* (1.1)-(1.5) *имеет единственное решение $u_m(x,t) \in C_s^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(m)})$, $\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, для которого при всех $t \leqslant T$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{2} |u_m|_{s,Q_t^{(m)}}^{(2+l)} + \left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{s-1,\Gamma_t}^{(1+l)} &\leqslant c_1 \Bigg(\sum_{m=1}^{2} (|f_m|_{s-2,Q_t^{(m)}}^{(l)} + |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)}) + |u_{01}|_\Gamma^{(\beta)} \\ &\quad + |\varphi|_{s,\Gamma_t}^{(2+l)} + |\psi|_{s-1,\Gamma_t}^{(1+l)} + |p|_{s,S_t}^{(2+l)} \Bigg). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Из теоремы 1.1 при $s = 2 + l$ вытекает теорема о разрешимости задачи (1.1)-(1.5) в пространстве Гёльдера $C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\bar{Q}_T)$.

Теорема 1.2. *Пусть l — нецелое положительное число, поверхности S, Γ, коэффициенты операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$ подчиняются условиям теоремы* 1.1.

Тогда при любых функциях $f_m(x,t) \in C_{x\,t}^{l,l/2}(\bar{Q}_T^{(m)})$, $u_{0m}(x) \in C^{2+l}(\bar{\Omega}_m)$, $p(x,t) \in C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(S_T)$, $\varphi(x,t) \in C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\Gamma_T)$, $\psi(x,t) \in C_x^{1+l,}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, удовлетворяющих условиям согласования (1.9)–(1.11) *порядка* $1+[l/2]$, *задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное решение $u_m(x,t) \in C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\bar{Q}_T^{(m)})$, $\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \in C_x^{1+l,}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, для которого при всех $t \leqslant T$ справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|_{Q_t^{(m)}}^{(2+l)} + \left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{\Gamma_t}^{(1+l)} \leqslant c_2\biggl(\sum_{m=1}^{2}(|f_m|_{Q_t^{(m)}}^{(l)} + |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(2+l)})$$
$$+|\varphi|_{\Gamma_t}^{(2+l)} + |\psi|_{\Gamma_t}^{(1+l)} + |p|_{S_t}^{(2+l)}\biggr).$$

В задаче (1.1)–(1.5) вместо краевого условия (1.5) можно рассмотреть условие

$$d(x,t)\nabla u_1 + d_0(x,t)u_1\big|_{S_T} = p(x,t), \tag{1.13}$$

где $d(x,t) = (d_1(x,t),\dots,d_n(x,t))$, либо условие с производной по времени

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial t} + d(x,t)\nabla u_1 + d_0(x,t)u_1|_{S_T} = p(x,t), \\ d(x,t)n(x) \leqslant -\delta_0 < 0, \end{gathered} \tag{1.14}$$

где $n(x)$ — нормаль к поверхности S в точке x, направленная внутрь Ω_1.

Если $p(x,t) \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(S_T)$, кроме того, в случае условия (1.14) $u_{01}(x)|_S \in C^{\beta}(S)$, где $\beta = \min(1+s, 2+l)$, и на границе S вместо (1.9) выполнены соответствующие условия согласования порядка $[s-1/2]$, то каждая из задач (1.1)–(1.4), (1.13) и (1.1)–(1.4), (1.14) будет однозначно разрешима в $C_s^{2+l,1+l/2}(Q_T)$, причем в задаче с производной по времени в граничном условии $\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{S_T} \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(S_T)$. Это вытекает из однозначной разрешимости краевых задач с граничными условиями (1.13) либо (1.14) [11, 17–20].

Замечание. В теореме 1.1 требования на коэффициенты операторов $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{B}_1$ можно ослабить, положив, что $a_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$, $a^{(m)} \in C_{s-2}^{l,l/2}(Q_T^{(m)})$, b_i, c_i, b_0, $c_0 \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, $i,j = 1,\dots,n$, $m = 1,2$, но тогда возникает ограничение на индекс $s : s_0 \leqslant s \leqslant 2+l$, где $s_0 = \max(2,l)$, т.е. потребуется непрерывность коэффициентов операторов $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_1$.

Работа построена следующим образом. В §2 изучаются модельные задачи в пространстве R^n с нулевыми начальными данными, выводятся формулы для их решений в виде тепловых потенциалов в явном виде. В §3 получены оценки для построенного потенциала в весовых гёльдеровских нормах. В §4 приводится доказательство теоремы 1.1 с помощью регуляризатора.

§2. Модельные задачи сопряжения

Пусть D_1 и D_2 — полупространства $x_n < 0$ и $x_n > 0$ в R^n, $R = \{x : |x'| < \infty, x_n = 0\}$, $D_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $R_T = R \times (0,T)$, $D_T = R^n \times (0,T)$.

Рассмотрим следующую задачу сопряжения для уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - a_m^2 \Delta u_m = 0, \quad (x,t) \in D_T^{(m)}, \qquad m = 1,2, \tag{2.1}$$

$$u_m|_{t=0} = 0, \quad x \in D_m, \tag{2.2}$$

$$u_1 - u_2|_{R_T} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} + b\nabla u_1 - c\nabla u_2|_{R_T} = \Phi(x',t), \tag{2.3}$$

где все коэффициенты постоянные, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $a_1^2 \neq a_2^2$,

$$b_n > 0, \qquad c_n > 0. \tag{2.4}$$

К задаче (2.1)–(2.3) применим преобразования Фурье по $x' = (x_1, \ldots x_{n-1})$ и Лапласа по t

$$\tilde{u}_m(\zeta, x_n, p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt \int\limits_{R^{n-1}} e^{-ix'\zeta} u_m(x,t)\,dx'.$$

В области изображений Фурье и Лапласа решение задачи имеет вид

$$\tilde{u}_m = \widetilde{K}_m(\zeta, x_n, p)\tilde{\Phi}(\zeta, p),$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{K}_m(\zeta, x_n, p) = \int\limits_0^\infty e^{-pu - \varkappa u - \sqrt{p + a_m^2\zeta^2}\frac{|x_n|}{a_m}}\,du, \\ \varkappa = \frac{b_n}{a_1}\sqrt{p + a_1^2\zeta^2} + \frac{c_n}{a_2}\sqrt{p + a_2^2\zeta^2} + id'\zeta, \\ d' = b' - c' = (b_1 - c_1, \ldots, b_{n-1} - c_{n-1}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

В [23] было найдено обратное преобразование функций

$$\tilde{k}_m(\zeta, x_n, p) = e^{-\varkappa u - \sqrt{p + a_m^2\zeta^2}\frac{|x_n|}{a_m}}$$

при условии (2.4)

$$
\begin{aligned}
k_m(x'-d'u,x_n,u,t) &= (-1)^{1+m}2a_m^2 D_{x_n} k_m^0(x'-d'u,x_n,u,t),\\
k_1^0(x'-d'u,x_n,u,t) &= \int\limits_0^t \frac{1}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau_1)}}\frac{c_n u}{2a_2\sqrt{\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{(b_n u - x_n)^2}{4a_1^2(t-\tau_1)}} e^{-\frac{c_n^2 u^2}{4a_2^2\tau_1}}\\
&\quad\times \frac{e^{-\frac{(x'-d'u)^2}{4(a_1^2(t-\tau_1)+a_2^2\tau_1)}}}{\left(2\sqrt{\pi(a_1^2(t-\tau_1)+a_2^2\tau_1)}\right)^{n-1}}\,d\tau_1,\\
k_2^0(x'-d'u,x_n,u,t) &= \int\limits_0^t \frac{b_n u}{2a_1\sqrt{\pi\tau_1^3}}\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi\tau_1}} e^{-\frac{b_n^2 u^2}{4a_1^2\tau_1}} e^{-\frac{(c_n u + x_n)^2}{4a_2^2(t-\tau_1)}}\\
&\quad\times \frac{e^{-\frac{(x'-d'u)^2}{4(a_1^2\tau_1+a_2^2(t-\tau_1))}}}{\left(2\sqrt{\pi(a_1^2\tau_1+a_2^2(t-\tau_1))}\right)^{n-1}}\,d\tau_1.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Отсюда и из (2.5) будет следовать

$$
\begin{aligned}
K_m(x,t) &= (-1)^{1+m}2a_m^2 D_{x_n} K_m^0(x,t),\\
K_m^0(x,t) &= \int\limits_0^t k_m^0(x'-d'u,x_n,u,t-u)\,du.
\end{aligned}
$$

Итак, решение задачи (2.1)–(2.3) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
u_m(x,t) &= (-1)^{1+m}2a_m^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} \Phi(y',\tau) D_{x_n} K_m^0(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy'\\
&\equiv (-1)^{1+m}2a_m^2(\Phi * D_{x_n}K_m^0).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев в работе [4] получили формулу вида (2.6) для $n=2,3$ и $b'=c'=0$.

Рассмотрим теперь задачу для параболических уравнений с постоянными коэффициентами

$$
\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1^2\Delta u_1 = 0, \quad (x,t)\in D_T^{(1)}, \tag{2.8}
$$

$$
\frac{\partial u_2}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\partial x_j} = 0, \quad (x,t)\in D_T^{(2)} \tag{2.9}
$$

с условиями (2.2), (2.3).

Пользуясь интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(x-\eta)^2-B(\eta-y)^2}\,d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A+B}}e^{-\frac{AB(x-y)^2}{A+B}}, \qquad A,B>0, \tag{2.10}$$

а также учитывая свойство конормальной производной теплового потенциала простого слоя, можем записать решение задачи (2.8), (2.9), (2.2), (2.3) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= 2a_1^2(\Phi * D_{x_n}G_1),\\ u_2(x,t) &= -2(\Phi * \sum_{k=1}^{n} a_{kn}D_{x_k}G_2), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$G_m(x,t) = \int_0^t g_m(x'-d'u,x_n,u,t-u)\,du, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &g_1(x'-d'u,x_n,u,t)\\ &= -2\int_0^t d\tau_1 \int_{R^{n-1}} \frac{e^{-\frac{(x'-b'u-\eta')^2+(b_nu-x_n)^2}{4a_1^2(t-\tau_1)}}}{\left(2a_1\sqrt{\pi(t-\tau_1)}\right)^n\left(2\sqrt{\pi\tau_1}\right)^n\sqrt{\det A}}\\ &\qquad\times\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu n}\frac{\partial}{\partial\eta_\nu}e^{-\frac{1}{4\tau_1}\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{ij}(\eta_i+c_iu)(\eta_j+c_ju)}\Big|_{\eta_n=0}\,d\eta',\\ &g_2(x'-d'u,x_n,u,t)\\ &= 2a_1^2\int_0^t d\tau_1 \int_{R^{n-1}} \frac{e^{-\frac{1}{4(t-\tau_1)}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x_i-\eta_i+c_iu)(x_j-\eta_j+c_ju)}}{\left(2a_1\sqrt{\pi\tau_1}\right)^n\left(2\sqrt{\pi(t-\tau_1)}\right)^n\sqrt{\det A}}\\ &\qquad\times\frac{\partial}{\partial\eta_n}e^{-\frac{(\eta-bu)^2}{4a_1^2\tau_1}}\Big|_{\eta_n=0}\,d\eta', \end{aligned} \tag{2.13}$$

где A — матрица, составленная из коэффициентов a_{ij}, a^{ij} — элементы обратной матрицы A^{-1}.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции (2.7) и (2.11) удовлетворяют уравнениям (2.1) и (2.8), (2.9) соответственно и условиям (2.2), (2.3).

Докажем лемму.

Лемма 2.1. *Для функций* k_m^0, g_m *имеют место оценки*

$$|D_t^kD_x^\beta k_m^0(x'-d'u,x_n,u,t)| \leqslant c_1 t^{-\frac{n+2k+|\beta|}{2}}e^{-\delta_1^2\frac{x^2+u^2}{t}}, \tag{2.14}$$

$$|D_t^kD_x^\beta g_m(x'-d'u,x_n,u,t)| \leqslant c_2 t^{-\frac{n+2k+|\beta|}{2}}e^{-\delta_2^2\frac{x^2+u^2}{t}}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Установим, для определенности, оценку (2.15) для g_1, остальные оценки выводятся аналогично. Так как потенциал $(\Phi{*}G_1)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то достаточно рассмотреть производную $D_t^k D_{x'}^{\beta-\nu} D_{x_n}^{\nu} g_1$, $\nu = 0, 1$. Обозначив подинтегральное выражение в формуле (2.13) через $\mu_1(x' - b'u - \eta', b_n u - x_n, \eta' + c'u, c_n u, t - \tau_1, \tau_1)$, представим функцию g_1 в виде

$$g_1 \equiv -2\int_0^t d\tau_1 \int_{R^{n-1}} \mu_1\, d\eta' = -2\int_0^{t/2} d\tau_1 \int_{R^{n-1}} [\mu_1(\cdot, t-\tau_1, \tau_1) + \mu_1(\cdot, \tau_1, t-\tau_1)]\, d\eta'.$$

Методом математической индукции легко доказать соотношение

$$\begin{aligned} D_t^k g_1 &= -2k \int_{R^{n-1}} D_t^{k-1} \mu_1(\cdot, t/2, t/2)\, d\eta' \\ &\quad -2\int_0^{t/2} d\tau_1 \int_{R^{n-1}} [D_t^k \mu_1(\cdot, t-\tau_1, \tau_1) + D_t^k \mu_1(\cdot, \tau_1, t-\tau_1)]\, d\eta', \qquad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

В интеграле с ядром $D_t^k \mu_1(\cdot, \tau_1, t-\tau_1)$ совершим замену переменных $\eta' = x' - \bar{\eta}'$, тогда получим выражение

$$\begin{aligned} &D_t^k D_{x'}^{\beta-\nu} D_{x_n}^{\nu} g_1 \\ &= -2k \int_{R^{n-1}} D_t^{k-1} D_{x'}^{\beta-\nu} D_{x_m}^{\nu} \mu_1(\cdot, t/2, t/2)\, d\eta' \\ &\quad -2\int_0^{t/2} d\tau_1 \int_{R^{n-1}} \big[D_t^k D_{x'}^{\beta-\nu} D_{x_n}^{\nu} \\ &\qquad\qquad \times \mu_1(x' - b'u - \eta', b_n u - x_n, \eta' + c'u, c_n u, t-\tau_1, \tau_1) \\ &\qquad\quad + D_t^k D_{x'}^{\beta-\nu} D_{x_n}^{\nu} \\ &\qquad\qquad \times \mu_1(\eta' - b'u, b_n u - x_n, x' - \eta' + c'u, c_n u, \tau_1, t-\tau_1)\big]\, d\eta'. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Оценим второй интеграл, для определенности, при $\nu = 1$, учитывая, что

$$-2\sum_{k=1}^{n} a_{kn} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \exp\left[-\frac{1}{4\tau_1} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\eta_i + c_i u)(\eta_j + c_j u)\right]\Bigg|_{\eta_n = 0} = \frac{c_n u}{\tau_1} e^{-\cdots}\Bigg|_{\eta_n=0},$$

и пользуясь неравенством $x^k e^{-x^2/2} \leqslant c_k$,

$$\begin{aligned} &|D_t^k D_{x'}^{\beta-1} D_{x_n} \mu_1(\cdot, t-\tau_1, \tau_1)| \\ &\leqslant c_3 (t-\tau_1)^{-\frac{n+2k+|\beta|}{2}} \frac{c_n u}{\tau_1^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left[-\frac{(x' - b'u - \eta')^2 + (b_n u - x_n)^2}{4a_1^2 (t-\tau_1)} - \delta_3^2 \frac{(\eta' + c'u)^2 + c_n^2 u^2}{4\tau_1}\right]. \end{aligned}$$

Затем, привлекая формулу (2.10), получим

$$\int_0^{t/2} d\tau_1 \int_{R^{n-1}} |D_t^k D_{x'}^{\beta-1} D_{x_n} \mu_1(\cdot, t-\tau_1, \tau_1)|\, d\eta'$$
$$\leqslant c_4 \int_0^{t/2} \frac{c_n u}{\tau_1^{3/2}(t-\tau_1)^{\frac{2k+|\beta|+1}{2}}} (\tau_1 + a_1^2\delta_3^2(t-\tau_1))^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(b_n u - x_n)^2}{4a_1^2(t-\tau_1)}}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\delta_3^2(x'-(b'-c')u)^2}{4(\tau_1 + a_1^2\delta_3^2(t-\tau_1))} - \frac{\delta_3^2 c_n^2 u^2}{4\tau_1}\right] d\tau_1$$
$$\leqslant c_6 t^{-\frac{n+2k+|\beta|}{2}} e^{-\delta_4^2 \frac{x^2+u^2}{t}}$$

Точно так же оцениваются остальные слагаемые в (2.16).

Следствие. *Для функций $K_m^0(x,t)$ и $G_m(x,t)$ имеют место оценки*

$$|D_t^k D_x^\beta K_m^0|, |D_t^k D_x^\beta G_m| \leqslant c_7(T)(x^2+t^2)^{-\frac{n+2k+|\beta|-1}{2}} e^{-\delta_5^2 \frac{x^2+t^2}{t}},$$

где константа c_7 экспоненциально зависит от T.

Доказательство. Оценка выводится с помощью неравенств (2.14), (2.15), действительно,

$$|D_t^k D_x^\beta G_m| \leqslant c_2 \int_0^t u^{-\frac{n+2k+|\beta|}{2}} e^{-\delta_2^2 \frac{x^2+(t-u)^2}{u}}\, du$$
$$\leqslant c_8 t (x^2+t^2)^{-\frac{n+2k+|\beta|-2}{2}} e^{2\delta_2^2 t} \int_0^t \frac{1}{u^2} e^{-\delta_5^2 \frac{x^2+t^2}{u}}\, du$$
$$\leqslant c_7(T)(x^2+t^2)^{-\frac{n+2k+|\beta|-1}{2}} e^{-\delta_5^2 \frac{x^2+t^2}{t}}.$$

Если $n+2k+|\beta| \geqslant 4$, то

$$|D_t^k D_x^\beta G_m| \leqslant c_9(T)(x^2+t^2)^{-\frac{n+2k+|\beta|-2}{2}} e^{-\delta_6^2 \frac{x^2+t^2}{t}}.$$

Изучим неоднородную модельную задачу для параболических уравнений с нулевыми начальными данными

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_m}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} = q_m, \quad (x,t) \in D_T^{(m)}, \qquad m=1,2, \\ u_1 - u_2|_{R_T} = \varphi(x',t), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} + b\nabla u_1 - c\nabla u_2|_{R_T} = \psi(x',t), \end{gathered} \tag{2.17}$$

где все коэффициенты постоянные, причем

$$\begin{gathered} a_{ij}^{(1)} \neq a_{ij}^{(2)}, \quad a_{ij}^{(m)} = a_{ji}^{(m)} \quad i,j=1,\ldots,n, \ m=1,2, \\ b_n > 0, \qquad c_n > 0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Теорема 2.1. *Пусть* l *— нецелое положительное число,* $l < s \leqslant 2 + l$ *и выполнено условие* (2.18).

Тогда задача (2.17) *имеет единственное решение* $u_m(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(D_T^{(m)})$, $\frac{\partial u_1}{\partial t} \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(R_T)$ *при любых функциях* $q_m \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l,l/2}(D_T^{(m)})$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(R_T)$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(R_T)$.

При всех $t \leqslant T$ *для решения справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|_{s,D_t^{(m)}}^{(2+l)} + \left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{s-1,R_t}^{(1+l)} \leqslant c_{10}\left(\sum_{m=1}^{2} |q_m|_{s-2,D_t^{(m)}}^{(l)} + |\varphi|_{s,R_t}^{(2+l)} + |\psi|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\right). \qquad (2.19)$$

Доказательство. Сведем задачу (2.17) к задаче (2.8), (2.9), (2.2), (2.3). Для этого построим две функции $\omega_m(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(D_T^{(m)})$ [17–20] как решения полупространственных задач

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_i \partial x_j} = q_1, \qquad (x,t) \in D_T^{(1)}, \qquad \omega_1|_{R_T} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_i \partial x_j} = q_2, \qquad (x,t) \in D_T^{(2)}, \qquad \omega_2|_{R_T} = \varphi.$$

Эти решения подчиняются оценкам

$$|\omega_1|_{s,D_T^{(1)}}^{(2+l)} \leqslant c_{11}|q_1|_{s-2,D_T^{(1)}}^{(l)}, \qquad |\omega_2|_{s,D_T^{(2)}}^{(2+l)} \leqslant c_{12}(|q_2|_{s-2,D_T^{(2)}}^{(l)} + |\varphi|_{s,R_T}^{(2+l)}).$$

В задаче (2.17) произведем замену

$$u_m = v_m + \omega_m, \qquad m = 1, 2, \qquad (2.20)$$

в результате получим задачу относительно новых неизвестных функций v_1, v_2

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_m}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad (x,t) \in D_T^{(m)}, \\ v_1 - v_2|_{R_T} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} + b\nabla v_1 - c\nabla v_2|_{R_T} = \Phi(x',t), \end{gathered} \qquad (2.21)$$

где

$$\Phi = \psi - (b\nabla\omega_1 - c\nabla\omega_2)|_{R_T} \in \overset{0}{C}{}_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(R_T),$$

$$|\Phi|_{s-1,R_T}^{(1+l)} \leqslant |\varphi|_{s-1,R_T}^{(1+l)} + c_{13}\sum_{m=1}^{2} |\omega_m|_{s,D_T^{(m)}}^{(2+l)}.$$

Затем с помощью нескольких неособенных преобразований координат $\{x\}$ сведем задачу (2.21) к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w_1}{\partial t} - a_1^2 \Delta w_1 = 0, \qquad (z,t) \in D_T^{(1)}, \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_i \partial z_j} = 0, \qquad (z,t) \in D_T^{(2)}, \\
w_1 - w_2|_{R_T} = 0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \bar{b}\nabla w_1 - \bar{c}\nabla w_2|_{R_T} = \bar{\Phi}(z',t),
\end{gathered} \tag{2.22}$$

где через $w_m(z,t)$, $\bar{\Phi}(z',t)$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ обозначены функции $v_m(x,t)$, $\Phi(x',t)$ и векторы b, c после перехода от координат $\{x\}$ к координатам $\{z\}$. Коэффициенты $\bar{b}_n$, $\bar{c}_n$ подчиняются неравенствам (2.18).

Установим оценку для функции w_1

$$|w_1|^{(2+l)}_{s,D_t^{(1)}} \leqslant c_{14} |\bar{\Phi}|^{(1+l)}_{s-1,R_t}, \tag{2.23}$$

так как функцию w_2 можно рассматривать как решение первой граничной задачи для параболического уравнения, которое удовлетворяет оценке [17–20]

$$|w_2|^{(2+l)}_{s,D_T^{(1)}} \leqslant c_{15} |w_1|^{(2+l)}_{s,R_T} \leqslant c_{16} |\bar{\Phi}|^{(1+l)}_{s-1,R_T}. \tag{2.24}$$

Из второго условия сопряжения на R_T задачи (2.22) на основании оценок (2.23), (2.24) будет следовать неравенство

$$\left| \frac{\partial w_1}{\partial t} \right|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \leqslant c_{17} |\bar{\Phi}|^{(1+l)}_{s-1,R_t}.$$

Но тогда в силу замены (2.20) для функций $u_m(x,t)$ и производной $\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{R_T} = \frac{\partial v_1}{\partial t}|_{R_T}$ будут справедливы утверждения теоремы 2.1 и оценка (2.19).

Итак, рассмотрим функцию $w_1(z,t)$. Она может быть представлена в виде (2.11) $w_1(z,t) = 2a_1^2(\bar{\Phi} * D_{z_n} G_1)$. Согласно лемме 1.1 об эквивалентности норм для доказательства (2.23) нужно оценить модуль $|w_1|_{D_t^{(1)}}$ и вывести неравенства

$$[D_t^k D_z^\beta (\bar{\Phi} * D_{z_n} G_1)]^{(\alpha)}_{r-2,D_t^{(1)}} \leqslant c_{18} |\bar{\Phi}|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \tag{2.25}$$

при $2k + |\beta| = 2 + l'$, где $l' = [l]$, $\alpha = l - l'$, $r = s - l'$, и

$$[D_t^k D_z^\beta (\bar{\Phi} * D_{z_n} G_1)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{r-1,t,D_t^{(1)}} \leqslant c_{19} |\bar{\Phi}|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \tag{2.26}$$

при $2k + |\beta| = 1 + l'$, где обозначено

$$[v]^{(a)}_{b,Q_T} \equiv [v]^{(a)}_{b,x,Q_T} + [v]^{(\frac{a}{2})}_{b,t,Q_T} = \sup_{t \leqslant T} t^{\frac{a-b}{2}} [v]^{(a)}_{x,Q'_t} + \sup_{t \leqslant T} t^{\frac{a-b}{2}} [v]^{(\frac{a}{2})}_{t,Q'_t}, \qquad b \leqslant a, \ a \in (0,1).$$

Оценим модуль функции $w_1(z,t)$

$$
\begin{aligned}
|w_1(z,t)| &\leqslant c_{20}|\bar\Phi|^{(1+l)}_{s-1,R_t}\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-1}{2}}\,d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\frac{1}{t-\tau-u}e^{-\delta_0^2\frac{u^2}{t-\tau-u}}\,du\\
&\leqslant c_{21}|\bar\Phi|^{(1+l)}_{s-1,R_t}t^{s/2}.
\end{aligned}
$$

Так как потенциал $(\bar\Phi * D_{z_n}G_1)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то при выводе неравенств (2.25), (2.26) достаточно рассмотреть случаи $D_z^\beta = D_{z'}^\beta$ и $D_z^\beta = D_{z'}^{\beta-1}D_{z_n}$ (при $|\beta| \geqslant 1$). Учитывая, что плотность $\bar\Phi(z',t)$ имеет производные $D_t^{j_0}D_{z'}^j\bar\Phi(z',t)$, $2j_0+|j| \leqslant 1+[l]$, мы увидим, что доказательство неравенств (2.25), (2.26) сводится к выводу шести оценок потенциалов, которые установим в следующем параграфе и тем самым завершим доказательство теоремы 2.1.

§3. Оценки тепловых потенциалов в весовых гёльдеровских нормах

Пусть функция $\varphi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{r-2}(R_T)$, функция $\varphi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{r-1}(R_T)$. Введем обозначения

$$
M = [\varphi]^{(\alpha)}_{r-2,R_t},\qquad M_1 = |\varphi|^{(\alpha)}_{r-2,R_t},\qquad N = [\psi]^{(1+\alpha)}_{r-1,R_t},\qquad N_1 = |\psi|^{(1+\alpha)}_{r-1,R_t},
$$
$$
\gamma = \frac12(2+\alpha-r),\qquad D_i = D_{x_i}.
$$

Установим оценки тепловых потенциалов, порожденных ядром $G_1(x,t)$, которое определяется формулой (2.12).

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha < r \leqslant 2+\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда справедливы оценки*

$$[(\varphi * D_x^2G_1)]^{(\alpha)}_{r-2,x,D_t^{(1)}} \leqslant c_1(T)M_1, \tag{3.1}$$
$$[(\varphi * D_x^2G_1)]^{(\alpha/2)}_{r-2,t,D_t^{(1)}} \leqslant c_2(T)M_1, \tag{3.2}$$
$$[(\psi * D_tD_xG_1)]^{(\alpha)}_{r-2,x,D_t^{(1)}} \leqslant c_3(T)N_1, \tag{3.3}$$
$$[(\psi * D_tD_xG_1)]^{(\alpha/2)}_{r-2,t,D_t^{(1)}} \leqslant c_4(T)N_1, \tag{3.4}$$
$$[(\varphi * D_xG_1)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{r-1,t,D_t^{(1)}} \leqslant c_5(T)M_1, \tag{3.5}$$
$$[(\psi * D_tG_1)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{r-1,t,D_t^{(1)}} \leqslant c_6(T)N_1. \tag{3.6}$$

При выводе неравенств (3.1), (3.3) возникнут интегралы, оценки которых установим в следующей лемме.

Лемма 3.2. *Пусть* $\alpha < r \leqslant 2+\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $n+m-3>0$, *тогда справедливы неравенства*

$$I_{1,m} \equiv \int\limits_0^t \frac{t^\gamma}{(t-\tau)^\gamma}\,d\tau \int\limits_0^\tau \frac{1}{(\tau-u)^{\frac{n+m}{2}}} e^{-\delta_1^2 \frac{\rho^2+u^2}{\tau-u}}\,du \leqslant c_7(T)\rho^{-n-m+3}, \tag{3.7}$$

$$I_2 \equiv \int\limits_0^t \frac{t^\gamma}{(t-u)^{\gamma+1/2}} e^{-\delta_2^2 \frac{u^2}{t-u}}\,du \leqslant c_8(T). \tag{3.8}$$

Доказательство. В интеграле $I_{1,m}$ представим t в виде $t-\tau+\tau-u+u$, применим неравенство

$$x^k e^{-x^2} \leqslant c_k e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{3.9}$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_{1,m} \leqslant & \int\limits_0^t \tau^{-\frac{n+m}{2}}\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\delta_1^2 \frac{\rho^2+u^2}{2\tau}}\,du \\ &+ c_9(T)t^{\frac{\alpha-r}{2}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\,d\tau \int\limits_{\frac{\delta_1^2\rho^2}{2\tau}}^{\infty} \rho^{-n-m+3} z^{\frac{n+m-5}{2}} e^{-z}\,dz \\ \leqslant & c_{10}(T)\Gamma\left(\frac{n+m-3}{2}\right)\rho^{-n-m+3} \quad \text{при} \quad n+m-3>0. \end{aligned}$$

В интеграле I_2, представив t в виде $t-u+u$ и применив (3.9), сразу получим неравенство (3.8).

Доказательство леммы 3.1. Установим оценку (3.1). Для этого рассматриваемый потенциал представим в виде

$$\begin{aligned} D_{ij}^2 p(x,t) &\equiv (\varphi * D_{ij}^2 G_1) \\ &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau [\varphi(y'-d'u, t-\tau) - \varphi(x', t-u)] D_{ij}^2 g_1(x'-y', x_n, u, \tau-u)\,du \\ &+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau \varphi(x', t-u) D_{ij}^2 g_1\,du. \end{aligned}$$

Составим разность

$$t^\gamma[D^2_{ij}p(x,t)-D^2_{ij}p(z,t)]=\Delta_1+\Delta_{2,ij},$$

$$\Delta_1=t^\gamma\Biggl\{\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\leqslant 2R}dy'\int_0^\tau[\varphi(y'-d'u,t-\tau)-\varphi(x',t-u)]$$
$$\times D^2_{ij}g_1(x'-y',x_n,u,\tau-u)\,du$$
$$-\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\leqslant 2R}dy'\int_0^\tau[\varphi(y'-d'u,t-\tau)-\varphi(z',t-u)]$$
$$\times D^2_{ij}g_1(z'-y',z_n,u,\tau-u)\,du$$
$$+\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\geqslant 2R}dy'\int_0^\tau[\varphi(y'-d'u,t-\tau)-\varphi(x',t-u)]$$
$$\times(D^2_{x_ix_j}g_1-D^2_{z_iz_j}g_1)\,du\Biggr\},$$

$$\Delta_{2,ij}=t^\gamma\Biggl\{\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\leqslant 2R}dy'\int_0^\tau[\varphi(x',t-u)-\varphi(z',t-u)]D^2_{z_iz_j}g_1\,du$$
$$+\int_0^t d\tau\int_{R^{n-1}}dy'\int_0^\tau\varphi(x',t-u)[D^2_{x_ix_j}g_1-D^2_{z_iz_j}g_1]\,du\Biggr\},$$

где $R=|x-z|$.

Оценим Δ_1 и $\Delta_{2,ij}$, пользуясь неравенствами

$$|\varphi(y'-d'u,t-\tau)-\varphi(x',t-u)|\leqslant c_{12}M\frac{|x'-y'|^\alpha+u^\alpha+(\tau-u)^{\alpha/2}}{(t-\tau)^\gamma},$$

$$|D^k_tD^\beta_xg_1(x,u,t)-D^k_tD^\beta_zg_1(z,u,t)|\leqslant c_{13}|x-z|t^{-\frac{n+2k+|\beta|+1}{2}}\int_0^1 e^{-\delta_3^2\frac{v^2+u^2}{t}}\Big|_{v=\lambda x+(1-\lambda)z}\,d\lambda.$$

Рассмотрим Δ_1

$$|\Delta_1|\leqslant c_{14}Mt^\gamma\Biggl\{\int_0^t(t-\tau)^{-\gamma}\,d\tau\biggl(\int_0^R+\int_0^{2R}\biggr)\rho^{n-2}\,d\rho\int_0^\tau(\tau-u)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}e^{-\delta_4^2\frac{\rho^2+u^2}{\tau-u}}\,du$$
$$+\int_0^t R(t-\tau)^{-\gamma}d\tau\int_R^\infty\rho^{n-2}\,d\rho\int_0^\tau(\tau-u)^{-\frac{n+3-\alpha}{2}}e^{-\delta_5^2\frac{\rho^2+u^2}{\tau-u}}\,du\Biggr\}.$$

Привлекая оценку (3.7), получим

$$|\Delta_1| \leqslant c_{15}(T)M|x-z|^{\alpha}.$$

Обратимся к $\Delta_{2,ij}$. Здесь при $i < n$, $j \leqslant n$ второй интеграл равен нулю, в первом — перейдем к поверхностному интегралу

$$\int\limits_{|y'-z'|\leqslant 2R} D^2_{z_i z_j} g_1\, dy' = \int\limits_{|y'-z'|=2R} D_{z_j} g_1 n_i\, dS_{y'} \tag{3.10}$$

и оценим его с помощью леммы 3.2

$$\begin{aligned}|\Delta_{2,ij}| &\leqslant c_{16} M R^{n-2+\alpha} \int\limits_0^t t^{\gamma}(t-\tau)^{-\gamma} d\tau \int\limits_0^{\tau} (\tau-u)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\delta_6^2 \frac{R^2+u^2}{\tau-u}}\, du \\ &\leqslant c_{17}(T) M \Gamma\Big(\frac{n-2}{2}\Big)|x-z|^{\alpha}, \quad n > 2.\end{aligned}$$

При $n = 2$ и $i = 1$, $j = 2$ интеграл (3.10) равен нулю, в случае $i = j = 1$ имеем

$$\begin{aligned}|\Delta_{2,11}| &\leqslant c_{18} M \int\limits_0^t t^{\gamma}(t-\tau)^{-\gamma} d\tau \int\limits_0^{\tau} \frac{|x_1 - z_1|^{1+\alpha}}{(\tau-u)^2} e^{-\delta_7^2 \frac{R^2+u^2}{\tau-u}}\, du \\ &\leqslant c_{19}(T) M |x-z|^{\alpha}.\end{aligned}$$

Осталось рассмотреть $\Delta_{2,nn}$. Учитывая, что потенциал $p(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, можем записать

$$\begin{aligned}&\Delta_{2,nn} \\ &= t^{\gamma}\Bigg\{ \int\limits_0^t [\varphi(z', t-u) - \varphi(x', t-u)]\, du \int\limits_{|y'-z'|\leqslant 2R} g_1(z'-y', z_n, u, t-u)\, dy' \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{n-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{\tau} [\varphi(z', t-u) - \varphi(x', t-u)]\, du \int\limits_{|y'-z'|=2R} D_{z_\nu} g_1(\cdot, \tau-u) n_\nu\, dS_{y'} \\ &\quad + \int\limits_0^t \varphi(x', t-u)\, du \int\limits_{z_n}^{x_n} \frac{1}{2a_1\sqrt{\pi(t-u)}\sqrt{|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{A}^{-1}_{n-1}|}} \\ &\qquad \times \frac{\partial}{\partial v} \exp\Bigg[-\frac{1}{4(t-u)}\Bigg(\frac{c_n u}{\sqrt{|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{A}^{-1}_{n-1}|}} + \frac{b_n u - v}{a_1}\Bigg)^2\Bigg] dv\Bigg\} \\ &= \sum_{k=1}^{3} i_k,\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}$ — матрица, составленная из коэффициентов параболического уравнения задачи (2.22), $\mathcal{A}_{n-1}^{-1}$ — минор $(n-1)$-порядка к элементу a^{nn} матрицы $\mathcal{A}^{-1} = \{a^{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, x_n, $z_n < 0$.

Интеграл i_2 рассмотрен, оценим i_1 и i_3, привлекая неравенства (3.8), (3.9):

$$
\begin{aligned}
|i_1 + i_3| &\leqslant c_{20} t^{\gamma} \Biggl\{ M|x' - z'|^{\alpha} \int\limits_0^t (t-u)^{-\frac{3+\alpha-r}{2}} e^{-\delta_8^2 \frac{u^2}{t-u}}\, du \\
&\qquad + M_1 \int\limits_0^t (t-u)^{\frac{r-4}{2}}\, du \Biggl| \int\limits_{-z_n}^{-x_n} \frac{v^{1-\alpha} e^{-\delta_9^2 \frac{v^2}{t-u}}}{v^{1-\alpha}}\, dv \Biggr| \Biggr\} \\
&\leqslant c_{21}(T) M_1 |x - z|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Оценка (3.1) установлена. Докажем неравенство (3.3). Производную потенциала $q(x,t) = (\psi * G_1)$ представим в виде

$$
\begin{aligned}
D_t D_i q(x,t) &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^{\tau} [\psi(y' - d'u, t-\tau) - \psi(y' - d'u, t-u)] \\
&\qquad \times D_{\tau} D_i g_1(x' - y', x_n, u, \tau - u)\, du \\
&\quad + \int\limits_0^t du \int\limits_{R^{n-1}} \psi(y' - d'u, t-u) D_i g_1(x' - y', x_n, u, t-u)\, dy'
\end{aligned}
$$

и составим разность

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 &\equiv t^{\gamma} [D_t D_{x_i} q(x,t) - D_t D_{z_i} q(z,t)] \\
&= t^{\gamma} \Biggl\{ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'| \leqslant R} dy' \int\limits_0^{\tau} [\psi(y' - d'u, t-\tau) - \psi(y' - d'u, t-u)] \\
&\qquad \times D_{\tau} D_{x_i} g_1(x' - y', x_n, u, \tau - u)\, du \\
&\quad - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'| \leqslant R} dy' \int\limits_0^{\tau} [\psi(y' - d'u, t-\tau) - \psi(y' - d'u, t-u)] D_{\tau} D_{z_i} g_1\, du \\
&\quad + \int\limits_0^t du \int\limits_u^t d\tau \int\limits_{|y'-z'| \geqslant 2R} [\psi(y' - d'u, t-\tau) - \psi(y' - d'u, t-u)] \\
&\qquad \times [D_{\tau} D_{x_i} g_1 - D_{\tau} D_{z_i} g_1]\, dy' \\
&\quad + \int\limits_0^t du \int\limits_{|y'-z'| \leqslant 2R} \psi(y' - d'u, t-u) [D_{x_i} g_1(\cdot, t-u) - D_{z_i} g_1(\cdot, t-u)]\, dy'
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^t du \int_{|y'-z'|\geqslant 2R} \psi(y'-d'u,t-u)[D_{x_i}g_1(\cdot,t-u)-D_{z_i}g_1(\cdot,t-u)]\,dy'\Big\}.$$

Первые три члена в Δ_3 оцениваются точно так же, как Δ_1, с использованием неравенства

$$|\psi(y',t-\tau)-\psi(y',t-u)\leqslant N\frac{(\tau-u)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{\gamma}},$$

а для оценки последних — применим неравенства (3.8), (3.9) и оценку

$$|\psi(y',t-u)|\leqslant N_1(t-u)^{\frac{r-1}{2}},$$

тогда получим

$$\begin{aligned}|\Delta_3|\leqslant c_{22}\Big\{N|x-z|^{\alpha}+N_1t^{\gamma}\int_0^t(t-u)^{-\frac{3+\alpha-r}{2}}\,du\\ \times\Big[\Big(\int_0^R+\int_0^{2R}\Big)\rho^{n-2}(t-u)^{-\frac{n-1-\alpha}{2}}\\ +R\int_R^{\infty}\rho^{n-2}(t-u)^{-\frac{n-\alpha}{2}}\Big]e^{-\delta_{10}^2\frac{\rho^2+u^2}{t-u}}\,d\rho\Big\}\\ \leqslant c_3(T)N_1|x-z|^{\alpha}.\end{aligned}$$

Приведем оценки интегралов, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Пусть* $\alpha<r\leqslant 2+\alpha$, $\alpha\in(0,1)$, $t_1\in[\frac{t}{2},t]$, $\tau\in[0,t]$, $t\leqslant T$. *Тогда справедливы оценки*

$$I_3\equiv\int_0^{\tau}\frac{t^{\gamma}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-u)^{\gamma}}e^{-\frac{B^2u^2}{t-\tau}}\,du\leqslant c_{23}(T), \tag{3.11}$$

$$I_4\equiv\int_0^{t_1}\frac{t^{\gamma}}{\sqrt{t-t_1}(t_1-u)^{\gamma}}e^{-\frac{B^2u^2}{t-t_1}}\,du\leqslant c_{24}(T), \tag{3.12}$$

$$I_5\equiv\int_0^{t_1}\frac{t^{\gamma}}{\sqrt{\tau}(t_1-u)^{\gamma}}e^{-\frac{B^2u^2}{\tau}}\,du\leqslant c_{25}(T), \tag{3.13}$$

$$I_6\equiv\int_{t_1}^{t}(t-u)^{\frac{r-2}{2}}\,du\int_0^{t-u}t^{\gamma}\tau^{-1}e^{-\frac{B^2u^2}{\tau}}\,d\tau\leqslant c_{26}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \tag{3.14}$$

$$I_7\equiv\int_0^{t_1}(t_1-u)^{\frac{r-2}{2}}\,du\int_{t_1-u}^{t-u}t^{\gamma}\tau^{-1}e^{-\frac{B^2u^2}{\tau}}\,d\tau\leqslant c_{27}(T)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}} \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл I_3. Представим t в виде $t-\tau+\tau-u+u$ и применим неравенство (3.9), тогда будем иметь

$$I_3 \leqslant c_{28}\left[t^{\frac{\alpha-r}{2}}(1+\sqrt{T})\int\limits_0^\tau(\tau-u)^{-\gamma}\,du+\int\limits_0^\tau\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{B^2u^2}{t-\tau}}\,du\right]\leqslant c_{23}(T).$$

В интеграле I_4, записав $t=t-t_1+t_1-u+u$, аналогично предыдущему получим оценку (3.12). При выводе неравенства (3.13) учтем, что $t\leqslant 2t_1\leqslant 2t$. Оценим интеграл I_6, пользуясь (3.9),

$$I_6\leqslant t^\gamma\int\limits_{t_1}^t u^{(-1)}(t-u)^{\frac{r-2}{2}}\,du\int\limits_0^{t-u}\frac{u}{\tau}e^{-\frac{B^2u^2}{\tau}}\,d\tau\leqslant 2t^\gamma t_1^{-1}\int\limits_{t_1}^t(t-u)^{\frac{r-\alpha}{2}}\frac{du}{(t-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}}$$
$$\leqslant c_{26}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

И наконец, рассмотрим интеграл I_7

$$I_7\leqslant 2^\gamma t_1^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_0^{t_1}\frac{1+\sqrt{t_1-u}}{(t_1-u)^\gamma}du\int\limits_{t_1-u}^{t-u}\tau^{\frac{\alpha-1}{2}}d\tau\leqslant c_{27}(T)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

Продолжение доказательства леммы 3.1. Установим неравенства (3.2), (3.5). Для этого рассматриваемые потенциалы представим в виде

$$\begin{aligned}D_iD_j^{\nu-1}p(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^{n-1}}dy'\int\limits_0^\tau&[\varphi(y',\tau-u)-\varphi(x',t-u)]\\&\times D_iD_j^{\nu-1}g_1(x'-y'-d'u,x_n,u,t-\tau)du\\+\int\limits_0^t\varphi(x',t-u)\,du\int\limits_{R^{n-1}}dy'&\int\limits_0^{t-u}D_iD_j^{\nu-1}g_1(\cdot,\tau)\,d\tau,\quad i,j\leqslant n,\ \nu=1,2,\end{aligned}$$

и сформируем разность

$$t^\gamma(D_iD_j^{\nu-1}p(x,t)-D_iD_j^{\nu-1}p(x,t_1))=\Delta_4+\Delta_{4+\nu},$$

$$\Delta_4 = t^\gamma \Big\{ \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{R^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\varphi(y',\tau-u) - \varphi(x',t-u)] D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot, t-\tau)\, du$$
$$+ \int_0^{t_1} d\tau \int_{R^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\varphi(y',\tau-u) - \varphi(y',t_1-u)]$$
$$\times [D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot, t-\tau) - D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot, t_1-\tau)]\, du \Big\},$$

$$\Delta_{4+\nu} = t^\gamma \Big\{ \int_0^{t_1} du \int_{R^{n-1}} [\varphi(x',t-u) - \varphi(x',t_1-u)]\, dy' \int_0^{t-t_1} D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot,\tau)\, d\tau$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \varphi(x',t-u)\, du \int_{R^{n-1}} dy' \int_0^{t-u} D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot,\tau)\, d\tau$$
$$+ \int_0^{t_1} \varphi(x',t_1-u)\, du \int_{R^{n-1}} dy' \int_{t_1-u}^{t-u} D_i D_j^{\nu-1} g_1(\cdot,\tau)\, d\tau \Big\}.$$

Оценим Δ_4 с помощью неравенств (2.15) и (3.11)

$$|\Delta_4| \leqslant c_{29} M t^\gamma \Bigg[\int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{\frac{\alpha-\nu}{2}}\, d\tau \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(\tau-u)^\gamma} e^{-\delta_{11}^2 \frac{u^2}{t-\tau}}\, du$$
$$+ \int_{t_1}^{t} dt_2 \int_0^{t_1} (t_2-\tau)^{-\frac{2+\nu-\alpha}{2}}\, d\tau \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{t_2-\tau}(\tau-u)^\gamma} e^{-\delta_{12}^2 \frac{u^2}{t_2-\tau}}\, du \Bigg]$$
$$\leqslant c_{30}(T) M (t-t_1)^{\frac{2+\alpha-\nu}{2}}, \qquad \nu = 1,2.$$

Обратимся к $\Delta_{4+\nu}$. При $i < n$, $j \leqslant n$ интегралы равны нулю. Оценим Δ_5 при $i = j = n$

$$|\Delta_5| \leqslant c_{31} \Bigg[M(t-t_1)^{\alpha/2} \int_0^{t-t_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{t_1} \frac{t^\gamma}{\sqrt{\tau}(t_1-u)^\gamma} e^{-\delta_{13}^2 \frac{u^2}{\tau}}\, du$$
$$+ M_1 \int_{t_1}^{t} (t-u)^{\frac{r-2}{2}}\, du \int_0^{t-u} t^\gamma \tau^{-1} e^{-\delta_{13}^2 \frac{u^2}{\tau}}\, d\tau$$
$$+ M_1 \int_0^{t_1} (t_1-u)^{\frac{r-2}{2}}\, du \int_{t_1-u}^{t-u} t^\gamma \tau^{-1} e^{-\delta_{13}^2 \frac{u^2}{\tau}}\, d\tau \Bigg].$$

Применив оценки интегралов (3.13)–(3.15), сразу получим

$$|\Delta_5| \leqslant c_{32}(T) M_1 (t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Рассмотрим Δ_6 при $i = j = n$. Заменим производную $D_n^2 g_1(\cdot, \tau)$ на сумму $a_1^{-2} D_\tau g_1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} D_\nu^2 g_1$ и примем во внимание, что интегралы с ядром $D_\nu^2 g_1$ равны нулю, тогда получим

$$|\Delta_6| \leqslant c_{33} t^\gamma \Bigg\{ (t-t_1)^{\alpha/2} M \int\limits_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{t-t_1}(t_1-u)^\gamma} e^{-\delta_{14}^2 \frac{u^2}{t-t_1}} \, du$$
$$+ M_1 \int\limits_{t_1}^{t} (t-u)^{\frac{r-3}{2}} e^{-\delta_{14}^2 \frac{u^2}{t-u}} \, du$$
$$+ M_1 \int\limits_0^{t_1} (t_1-u)^{\frac{r-2}{2}} \, du \int\limits_{t_1-u}^{t-u} \tau^{-3/2} e^{-\delta_{14}^2 \frac{u^2}{\tau}} \, d\tau \Bigg\}.$$

Привлекая оценку (3.12) и неравенства

$$t(t-u)^{\frac{r-3}{2}} e^{-\delta_{14}^2 \frac{u^2}{t-u}} \leqslant c_{34}(1+\sqrt{t}) t^{\frac{r-\alpha}{2}} (t-u)^{\frac{\alpha-2}{2}},$$
$$t_1 \tau^{-3/2} (t_1-u)^{\frac{r-2}{2}} e^{-\delta_{14}^2 \frac{u^2}{\tau}} \leqslant c_{35}(1+\sqrt{t_1}) \tau^{\frac{\alpha-2}{2}} (t_1-u)^{-\gamma},$$

будем иметь $|\Delta_6| \leqslant c_{36}(T)(t-t_1)^{\alpha/2}$.

Неравенства (3.2), (3.5) доказаны. Установим оценки (3.4), (3.6). Рассматриваемые потенциалы представим в виде

$$D_t D_i^{\nu-1} q(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau [\psi(y', \tau-u) - \psi(y', t-u)]$$
$$\times D_t D_i^{\nu-1} g_1(x'-y'-d'u, x_n, u, t-\tau) \, du$$
$$+ \int\limits_0^t du \int\limits_{R^{n-1}} \psi(y', t-u) D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t-u) \, dy', \qquad \nu = 1, 2.$$

Составим разность

$$\Delta_{6+\nu} \equiv t^\gamma (D_t D_i^{\nu-1} q(x,t) - D_{t_1} D_i^{\nu-1} q(x,t_1))$$
$$= t^\gamma \Bigg\{ \int\limits_{t_1}^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau [\psi(y', \tau-u) - \psi(y', t-u)] D_t D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t-\tau) \, du$$
$$+ \int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_{R^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau [\psi(y', \tau-u) - \psi(y', t_1-u)] \, du$$

$$\times \int_{t_1}^{t} D_{t_2}^2 D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t_2 - \tau)\, dt_2$$

$$+ \int_0^{t_1} du \int_{R^{n-1}} [\psi(y', t-u) - \psi(y', t_1 - u)] D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t - t_1)\, dy'$$

$$+ \int_0^{t_1} du \int_{R^{n-1}} \psi(y', t_1 - u)\, dy' \int_{t_1}^{t} D_{t_2} D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t_2 - u)\, dt_2$$

$$+ \int_{t_1}^{t} du \int_{R^{n-1}} \psi(y', t-u) D_i^{\nu-1} g_1(\cdot, t-u)\, dy' \Big\}.$$

Первых три члена сразу оцениваются с помощью неравенств (3.11), (3.12) и (3.9), в четвертом интеграле нужно воспользоваться неравенством $t \leqslant 2t_1 \leqslant 2t$ и записать t_1 в виде $t_1 - u + u$, в последнем — t представить, как $t - u + u$ и применить (3.9), в результате получатся оценки (3.4), (3.6).

Лемма 3.1 доказана.

§4. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим задачу (1.1)-(1.5). Сведем ее к задаче с нулевыми начальными данными. Для этого построим функции $\omega_m(x,t) \in C_s^{2+l, 1+l/2}(D_T), D_T = R^n \times (0,T)$, $m = 1,2$, по условиям [18]

$$\omega_m|_{t=0} = u_{0m}^*(x),$$
$$D_t^j \omega_m|_{t=0} = u_m^{(j)*}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, [s/2], \ s \geqslant 2,$$

где $u_m^{(j)}(x)$ определены формулами (1.8). Знак $*$ означает продолжения функций $u_{0m}(x)$, $f_m(x,0)$ ($s \geqslant 2$) и коэффициентов операторов $\mathcal{A}_m(x, 0, \frac{\partial}{\partial x})$ на все пространство R^n с сохранением класса, т.е.

$$|u_{0m}^*|_{R^n}^{(s)} \leqslant c_1 |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)}, \qquad |f_m^*(x,0)|_{R^n}^{(s-2)} \leqslant c_2 |f_m|_{s-2, Q_T^{(m)}}^{(l)}.$$

Функции $\omega_m(x,t)$ подчиняются оценке

$$|\omega_m|_{s, D_T}^{(2+l)} \leqslant c_3 \left(|u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)} + \begin{cases} 0, & l < s < 2, \\ |f_m|_{s-2, Q_T^{(m)}}^{(l)}, & 2 \leqslant s \leqslant 2 + l \end{cases} \right).$$

В задаче (1.1)-(1.5) произведем замену

$$u_m(x,t) = v_m(x,t) + \omega_m(x,t), \tag{4.1}$$

где v_1, v_2 — новые неизвестные функции, но сначала рассмотрим условие на Γ_T после этой замены

$$B_1(v_1,v_2)|_{\Gamma_T} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial t} + b\nabla v_1 - c\nabla v_2 + b_0 v_1 + c_0 v_2|_{\Gamma_T} = \psi_1 - \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right|_{\Gamma_T}, \tag{4.2}$$

где

$$\psi_1 \equiv \psi - (b\nabla\omega_1 - c\nabla\omega_2 + b_0\omega_1 + c_0\omega_2)|_{\Gamma_T} \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T),$$

$$|\psi_1|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+l)} \leqslant |\psi|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+l)} + c_4\sum_{m=1}^{2}|\omega_m|_{s,Q_T^{(m)}}^{(2+l)}.$$

Построим на Γ_T функцию $\psi_2 \in C_{s+1}^{3+l,\frac{3+l}{2}}(\Gamma_T)$ [11], удовлетворяющую условиям

$$\psi_2|_{t=0} = \begin{cases} u_{01}|_\Gamma, & l < s < 1+l, \\ 0, & 1+l \leqslant s \leqslant 2+l. \end{cases}$$

$$D_t^m\psi_2|_{t=0} = D_t^{m-1}\psi_1|_{t=0}, \qquad m = 1,\dots,\left[\frac{s+1}{2}\right],\ s \geqslant 1.$$

С ее помощью определим функцию

$$\psi_3(x,t) = \psi_2(x,t) + \begin{cases} 0, & l < s < 1+l, \\ u_{01}|_\Gamma, & 1+l \leqslant s \leqslant 2+l. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\psi_3 \in C_s^{2+l,1+l/2}(\Gamma_T)$ и $\frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \frac{\partial\psi_2}{\partial t} \in C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$.

Представим условие (4.2) в виде

$$B_1(v_1,v_2)|_{\Gamma_T} = \Phi_0 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}, \tag{4.3}$$

где $\Phi_0 = \psi_1 - \frac{\partial\psi_2}{\partial t}$, $\Phi_1 = \omega_1 - \psi_3$.

Очевидно по построению и в силу условия согласования (1.11) $\Phi_0 \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$, $\Phi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(\Gamma_T)$ и имеют место оценки

$$|\Phi_0|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+l)} \leqslant c_5\left(|\psi_1|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+l)} + \begin{cases} |u_{01}|_\Gamma^{(1+s)}, & l < s < 1+l, \\ 0, & 1+l < s \leqslant 2+l \end{cases}\right),$$

$$|\Phi_1|_{s,\Gamma_T}^{(2+l)} \leqslant |\omega_1|_{s,D_T}^{(2+l)} + c_6\left(|u_{01}|_\Gamma^{(\beta)} + \begin{cases} 0, & l < s < 1, \\ |\psi_1|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+l)}, & 1 \leqslant s \leqslant 2+l \end{cases}\right).$$

Для упрощения правой части условия сопряжения (4.3) построим еще две функции $\omega_m'(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(m)})$ как решения следующих начально-краевых задач [17-20]

$$L_1\omega_1' = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{(1)}, \qquad \omega_1'|_{S_T} = 0, \qquad \omega_1'|_{S_T} = -\Phi_1,$$

$$L_2\omega_2' = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{(2)}, \qquad \omega_2'|_{\Gamma_T} = -\Phi_1.$$

Для функций $\omega'_m(x,t)$ справедливы оценки

$$|\omega'_m|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}} \leqslant c_7|\Phi_1|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T}.$$

И теперь после замен (4.1) и

$$v_m(x,t) = \theta_m(x,t) + \omega'_m(x,t), \quad m = 1,2, \tag{4.4}$$

где θ_m — новые неизвестные функции, задача (1.1)-(1.5) запишется в виде

$$\begin{gathered} L_m\theta_m = q_m \quad \text{в} \quad Q_T^{(m)}, \qquad m = 1,2, \\ B_1 w|_{\Gamma_T} \equiv \frac{\partial\theta_1}{\partial t} + b\nabla\theta_1 - c\nabla\theta_2 + b_0\theta_1 + c_0\theta_2|_{\Gamma_T} = \Phi, \\ B_2 w|_{\Gamma_T} \equiv \theta_1 - \theta_2|_{\Gamma_T} = \varphi_1, \\ B_0\theta_1|_{S_T} \equiv \theta_1|_{S_T} = p_1, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $w = (\theta_1,\theta_2)$, $q_m = f_m - L_m\omega_m$, $\Phi = \Phi_0 - (b\nabla\omega'_1 - c\nabla\omega'_2 + b_0\omega'_1 + c_0\omega'_2)|_{\Gamma_T}$, $\varphi_1 = \varphi - (\omega_1 - \omega_2)|_{\Gamma_T}$, $p_1 = p - \omega_1|_{S_T}$. В силу условий согласования и по построению $q_m \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s-2}(Q_T^{(m)})$, $\Phi \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{s-1}(\Gamma_T)$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(\Gamma_T)$, $p_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(S_T)$ и имеют место оценки

$$|q_m|^{(l)}_{s-2,Q_T^{(m)}} \leqslant |f_m|^{(l)}_{s-2,Q_T^{(m)}} + c_8|\omega_m|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}},$$

$$|\Phi|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T} \leqslant |\Phi_0|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T} + c_9\sum_{m=1}^{2}|\omega'_m|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}},$$

$$|\varphi_1|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T} \leqslant |\varphi|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T} + c_{10}\sum_{m=1}^{2}|\omega_m|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}},$$

$$|p_1|^{(2+l)}_{s,S_T} \leqslant |p|^{(2+l)}_{s,S_T} + |\omega_1|^{(2+l)}_{s,D_T}.$$

Введем в рассмотрение банаховы пространства функций. Пусть $\overset{\circ}{H}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(Q_T^{(1)})$ есть пространство функций θ_1 таких, что $\theta_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(Q_T^{(1)})$, $D_t\theta_1|_{\Gamma_T} \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{s-1}(\Gamma_T)$. Определим $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_T) = \overset{\circ}{H}{}^{2+l,l+l/2}_{s}(Q_T^{(1)}) \times \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(Q_T^{(2)})$ как пространство векторов-функций $w = (\theta_1,\theta_2)$. Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_T) = \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s-2}(Q_T^{(1)}) \times \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s-2}(Q_T^{(2)}) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{s-1}(\Gamma_T)$, $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T) = \overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(\Gamma_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{s}(S_T)$ — пространства с элементами $h_1 = (q_1,q_2,\Phi)$, $h = (h_1,\varphi_1,p_1)$ соответственно. Нормы в этих пространствах определим формулами

$$|w|_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_T)} = \sum_{m=1}^{2}|\theta_m|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}} + |D_t\theta_1|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T},$$

$$|h_1|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_T)} = \sum_{m=1}^{2}|q_m|^{(l)}_{s-2,Q_T^{(m)}} + |\Phi|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T},$$

$$|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T)} = |h_1|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_T)} + |\varphi_1|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T} + |p_1|^{(2+l)}_{s,S_T}.$$

Разрешимость задачи (4.5) докажем с помощью регуляризатора [6].

Пусть A — линейный оператор в пространстве $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_T)$, сопоставляющий каждому элементу этого пространства $w = (\theta_1, \theta_2)$ элемент $\{L_1\theta_1, L_2\theta_2, B_1 w|_{\Gamma_T}, B_2 w|_{\Gamma_T}, B_0\theta_1|_{S_T}\} \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T)$. В условиях теоремы 1.1 оператор A является ограниченным из $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_T)$ в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T)$. Задачу (4.5) можем записать в виде

$$Aw = h, \quad \text{где } h \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T)$$

Покроем область Ω шарами $K_{k,\lambda}$ и $K_{k,2\lambda}$ с общими центрами и радиусами $\lambda/2$ и λ, а область $(0,T)$ — интервалами $\Delta_{\nu,\delta} = \{t : |t - \tau_\nu| < \delta/2\}$ и $\Delta_{\nu,2\delta}$, где $\tau_\nu \in (0,T)$, $0 < \lambda, \delta < \frac{d}{2}$, d— малое положительное число. Занумеруем шары следующим образом. При $k \in \mathfrak{M}^{(m)}$ шары $K_{k,2\lambda}$ целиком лежат внутри области Ω_m. Обозначим через ξ_k — центры шаров $K_{k,\lambda}$ и $K_{k,2\lambda}$. При $k \in \mathfrak{L}$ шары примыкают к границе $S : K_{k,\lambda} \cap S \neq \varnothing$, при $k \in \mathfrak{N}$ шары содержат часть границы Γ и $K_{k,\lambda} \cap \Omega_m \neq \varnothing$, $m = 1, 2$. Пусть точки ξ_k на S и Γ, ближайшие к центрам шаров $K_{k,\lambda}$, $k \in \mathfrak{L}, \mathfrak{N}$. Построим местную систему координат $y = (y_1, \dots, y_n)$ с началом в точке ξ_k и осью y_n, направленной по нормали $\bar{n}$ в точке ξ_k к поверхности S внутрь Ω_1 при $k \in \mathfrak{L}$, и к поверхности Γ внутрь Ω_2 при $k \in \mathfrak{N}$. Поверхности S, Γ, принадлежащие классу C^{2+l}, в окрестности точек ξ_k могут быть заданы уравнениями $y_n = \mu_k(y') \in C^{2+l}(\bar{K}_d)$, где K_d — круг радиуса d на гиперплоскости $y_n = 0$. Для всех $k \in \mathfrak{L}, \mathfrak{N}$ найдется число M такое, что $|\mu_k|^{(2+l)}_{K_d} \leqslant M$. Очевидно, $\mu_k(0) = 0$, $\nabla\mu_k(0) = 0$, $|D_{y'}\mu_k| \leqslant M|y'|$, $y' \in K_d$. Продолжим функции μ_k во все пространство R^{n-1} с сохранением класса. Затем произведем преобразование координат по формулам $z' = y'$, $z_n = y_n - \mu_k(y')$, которое переводит при $k \in \mathfrak{L}$ область $y_n > \mu_k(y')$ в область $D_k^{(2)} = \{z : |z'| < \infty, z_n > 0\}$ и при $k \in \mathfrak{N}$ области $y_n < \mu_k(y')$ и $y_n > \mu_k(y')$ — в области $D_k^{(1)} = \{z : |z'| < \infty, z_n < 0\}$ и $D_k^{(2)}$ соответственно. Пусть $D_{k,T}^{(m)} = D_k^{(m)} \times (0,T)$, R_k — гиперплоскость $z_n = 0$, $R_{k,T} = R_k \times (0,T)$, $D_{k,T} = R^n \times (0,T)$. Обозначим через $Z_k(x)$ преобразование координат $\{z\}$ в исходные $\{x\}$.

Пусть $\{\zeta_k(x)\}$ и $\{\beta_\nu(t)\}$ — гладкие функции, подчиненные покрытию областей Ω и $(0,T)$, равные единице в $K_{k,\lambda}$ и $\Delta_{\nu,\delta}$ и нулю вне $K_{k,2\lambda}$ и $\Delta_{\nu,2\delta}$ соответственно, обладающие свойствами

$$|D^\alpha\zeta_k| \leqslant c_{11,k}\lambda^{-|\alpha|}, \qquad |D^\alpha\beta_\nu| \leqslant c_{12,\nu}\delta^{-\alpha},$$
$$1 \leqslant \sum_k \zeta_k(x) \leqslant n_0, \qquad 1 \leqslant \sum_\nu \beta_\nu(t) \leqslant m_0,$$

где n_0, m_0 — определенные положительные числа. Построим также гладкие функции $\{\eta_k(x)\}$, $\{\varkappa_\nu(t)\}$ такие, что

$$|D^\alpha\eta_k| \leqslant c_{13,k}\lambda^{-|\alpha|}, \qquad |D^\alpha\varkappa_\nu| \leqslant c_{14,\nu}\delta^{-\alpha},$$
$$\sum_k \eta_k\zeta_k = 1, \qquad \sum_\nu \varkappa_\nu\beta_\nu = 1.$$

Введем обозначения

$$L_m^{(0)}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$B_1^{(0)}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)w=\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+b(x,t)\nabla\theta_1-c(x,t)\nabla\theta_2,$$

пусть $L_{m,k\nu}^{(0)}$, $B_{1,k\nu}^{(0)}$ — операторы $L_m^{(0)}$, $B_1^{(0)}$ в местной системе координат в точке (ξ_k,τ_ν)

$$L_{m,k\nu}^{(0)}\left(\xi_k,\tau_\nu,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij,k\nu}^{(m)}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j},$$

$$B_{1,k\nu}^{(0)}\left(\xi_k,\tau_\nu,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right)w=\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}b_{i,k\nu}\frac{\partial\theta_1}{\partial y_i}-\sum_{i=1}^{n}c_{i,k\nu}\frac{\partial\theta_2}{\partial y_i}.$$

Очевидно в силу условия (1.6) и способа построения координат $\{y\}$ — сдвига и вращения, коэффициенты $b_{n,k\nu}$, $c_{n,k\nu}>0$ для всех $k\in\mathfrak{N}$ и ν.

Введем в рассмотрение оператор R по формуле

$$Rh=\{R_1h,R_2h\}=\left\{\sum_{k,\nu}\eta_k\varkappa_\nu\theta_{1,k\nu},\sum_{k,\nu}\eta_k\varkappa_\nu\theta_{2,k\nu}\right\},$$

где функции $\theta_{m,k\nu}$, $m=1,2$, удовлетворяют нулевым начальным данным и определены следующим образом. Если $k\in\mathfrak{M}^{(m)}$, то функция $\theta_{m,k\nu}(x,t)$ является решением задачи Коши

$$L_m^{(0)}\left(\xi_k,\tau_\nu,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta_{m,k\nu}=q_{m,k\nu}\quad\text{в}\quad D_{k,T},\tag{4.6}$$

где $q_{m,k\nu}(x,t)=\xi_k(x)\beta_\nu(t)q_m(x,t)$.

Если $k\in\mathfrak{L}$, то $\theta_{1,k\nu}(x,t)$ есть решение первой граничной задачи в полупространстве $z_n>0$

$$\begin{aligned}L_{1,k\nu}^{(0)}\left(\xi_k,\tau_\nu,\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta'_{1,k\nu}(z,t)&=q'_{1,k\nu}(z,t)\quad\text{в}\quad D_{k,T}^{(2)},\\ \theta'_{1,k\nu}|_{R_{k,T}}&=p'_{1,k\nu}(z',t),\end{aligned}\tag{4.7}$$

где

$$q'_{1,k\nu}(z,t)=q_{1,k\nu}(x,t)\big|_{x=Z_k^{-1}(z)},$$
$$\theta'_{1,k\nu}(z,t)=\theta_{1,k\nu}(x,t)\big|_{x=Z_k^{-1}(z)},$$

$$p'_{1,k\nu}(z',t) = \zeta_k(x)\beta_\nu(t)p_1(x,t)\Big|_{\substack{x=Z_k^{-1}(z),\\ z\in R_{k,T}}}.$$

Если $k \in \mathfrak{N}$, то вектор-функцию $w_{k,\nu}(x,t) = (\theta_{1,k\nu}, \theta_{2,k\nu})$ определим как решение задачи сопряжения

$$L^{(0)}_{m,k\nu}\left(\xi_k, \tau_\nu, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\theta'_{m,k\nu}(z,t) = q'_{m,k\nu}(z,t) \quad \text{в} \quad D^{(m)}_{k,T},$$

$$B^{(0)}_{1,k\nu}\left(\xi_k, \tau_\nu, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right)w'_{k\nu}\Big|_{R_{k,T}} = \Phi'_{k\nu}(z',t)$$

$$\theta'_{1,k\nu} - \theta'_{2,k\nu}|_{R_{k,T}} = \varphi'_{1,k\nu}(z',t),$$

где штрихи у функций означают, что осуществлен переход к координатам $\{z\}$,

$$\varphi'_{1,k\nu}(z',t),\ \ \Phi'_{k\nu}(z',t) = \zeta_k(x)\beta_\nu(t)\varphi_1(x,t),\ \ \zeta_k(x)\beta_\nu(t)\Phi(x,t)\Big|_{\substack{x=Z^{-1}(z),\\ z\in R_{k,T}}}.$$

В пространствах $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)$ и $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)$ определим нормы [6]

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)} = \sup_{k,\nu}\left(\sum_{m=1}^{2}|\theta_m|^{(2+l)}_{s,d_{k\nu}} + |D_t\theta_1|^{(1+l)}_{s-1,\gamma_{k\nu}}\right),$$

$$\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)} = \sup_{k,\nu}|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(d_{k\nu})},$$

эквивалентные нормам $|w|_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)}$, $|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)}$, где $d_{k\nu} = K_{k,2\lambda} \times \Delta_{\nu,2\delta}$, $\gamma_{k\nu} = (K_{k,2\lambda} \cap \Gamma) \times \Delta_{\nu,2\delta}$.

Согласно результатам работ [17–20] и теореме 2.1 задачи (4.6)–(4.8) однозначно разрешимы в $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_s$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(D_{k,t})$ соответственно, их решения подчиняются оценкам

$$|\theta_{m,k\nu}|^{(2+l)}_{s,D_{k,t}} \leqslant c_{15}|q_{m,k\nu}|^{(l)}_{s-2,D^{(m)}_{k,t}}, \qquad k \in \mathfrak{M}^{(m)},$$

$$|\theta'_{1,k\nu}|^{(2+l)}_{s,D^{(1)}_{k,t}} \leqslant c_{16}(|q'_{1,k\nu}|^{(l)}_{s-2,D^{(1)}_{k,t}} + |p'_{1,k\nu}|^{(1+l)}_{s-1,R_{k,t}}), \qquad k \in \mathfrak{L},$$

$$|w'_{k\nu}|_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(D_{k,t})} \leqslant c_{17}\left(\sum_{m=1}^{2}|q'_{m,k\nu}|^{(l)}_{s-2,D^{(m)}_{k,t}} + |\Phi'_{k\nu}|^{(1+l)}_{s-1,R_{k,t}} + |\varphi'_{1,k\nu}|^{(2+l)}_{s,R_{k,t}}\right), \qquad k \in \mathfrak{N}. \tag{4.9}$$

В дальнейшем нам понадобится лемма.

Лемма 4.1. *Пусть l — нецелое положительное число, $s \leqslant l$, функции $p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_s(Q_T)$, $q(x,t) \in C^{l,l/2}_{x\,t}(\bar{Q}_T)$. Тогда произведение функций $pq \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_s(Q_T)$ и для всех $t \leqslant T$ подчиняется неравенству*

$$|pq|^{(l)}_{s,Q_t} \leqslant c_{18}(T)[|p|^{(l)}_{s,Q_t}(\varepsilon|q|^{(l)}_{Q_t} + |q|_{Q_t}) + c_{19}(\varepsilon)|q|^{(l)}_{Q_t}\sup_{\tau\leqslant t}\tau^{-\frac{l-s}{2}}|p|_{\Omega}] \leqslant c_{20}(T)|p|^{(l)}_{s,Q_t}|q|^{(l)}_{Q_t}, \tag{4.10}$$

где ε — малое положительное число.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 4.2. *R является ограниченным оператором из $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)$ в $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_T)$, т.е.*

$$\{Rh\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)} \leqslant c_{21}\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)}.$$

Доказательство проводится, как в [6], с. 377, с привлечением оценок (4.9) и (4.10).

Лемма 4.3. *При любом $h \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)$ справедливо неравенство*

$$ARh = h + Th, \tag{4.11}$$

где $Th = \{T^{(1)}h, 0, 0\}$, $T^{(1)}h = \{T_1 h, T_2 h, T_3 h\}$, $T^{(1)}$ — определенный оператор в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_t)$.

Представление (4.11) устанавливается непосредственной подстановкой выражений $\theta_1 = R_1 h$, $\theta_2 = R_2 h$ в условия задачи (4.5) и несложными преобразованиями ([6], с. 378).

Лемма 4.4. *В условиях теоремы 1.1 для всех $t \leqslant T$ справедлива оценка*

$$\{T^{(1)}h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_t)} \leqslant \varepsilon_1\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)} + c_{22}(\varepsilon_1, \lambda, \delta)t^{\frac{1-\rho}{2}} \int\limits_0^1 \{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_\tau)} \tau^{\frac{\rho-2}{2}} d\tau, \tag{4.12}$$

где ε_1 — малое положительное число, $\rho = s$, если $s \leqslant 1$, и $0 < \rho < 1$, если $s > 1$.

Доказательство. Оценим $T^{(1)}h$ в норме пространства $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_t)$ с привлечением оценки (4.10) и „интерполяционных" неравенств

$$|D_t^k D_x^m u|_\Omega \leqslant \varepsilon^{l-2k-|m|}[u]_{Q_t'}^{(l)} + c\varepsilon^{-2k-|m|}|u|_\Omega,$$
$$[u]_{Q_t'}^{(s)} \leqslant \varepsilon^{l-s}[u]_{Q_t'}^{(l)} + c\varepsilon^{-s}|u|_\Omega,$$

где $2k + |m| \leqslant [l]$, $s < l$, ε — малое положительное число, затем зафиксировав числа λ, δ, ε_2, получим оценку

$$\{T^{(1)}h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}_1(Q_t)} \leqslant \varepsilon_2 \sup_{k,\nu} |w_{k\nu}|_{s,d_{k\nu}}^{(2+l)} + c_{23}(\lambda, \delta, \varepsilon_2) \sup_{k,\nu} t^{\frac{1-\rho}{2}} \int\limits_0^t |w_{k\nu}|_{s,d_{k\nu}}^{(2+l)} \tau^{\frac{\rho-2}{2}} d\tau, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1.$$

И наконец, применив оценки (4.9), будем иметь неравенство (4.12).

Из этой леммы вытекает следующая

Лемма 4.5. *В условиях теоремы* 1.1 *в пространстве* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)$ *существует ограниченный обратный оператор* $(I+T)^{-1}$ *для* $\forall t \leqslant T$, *где* I *— единичный.*

Но тогда справедливо тождество $AR(I+T)^{-1}g = g$ для $\forall g \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)$, которое означает, что существует правый обратный оператор A_r^{-1}, и задача (4.5) разрешима в $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)$, $t \leqslant T$.

Вспоминая замены (4.1), (4.4), получим $u_m(x,t) \in C_s^{2+l,1+l/2}(Q_T^{(m)})$. Из условия сопряжения (1.3) вытекает принадлежность производной $\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{\Gamma_T}$ пространству $C_{s-1}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(\Gamma_T)$. Это же заключение следует из равенства $\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{\Gamma_T} = \frac{\partial \theta_1}{\partial t}|_{\Gamma_T} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t}$.

Получим оценку решения задачи (4.5). Для этого возьмем произвольную точку $(x_0, \tau_0) \in Q_T$. В областях $K_{2\lambda} = \{x : |x - x_0| < \lambda\}$, $\Delta_{2\delta} = \{t : |t - \tau_0| < \delta\}$, где $0 < \lambda, \delta < d/2$, определим гладкие функции $\eta_\lambda(x)$, $\varkappa_\delta(t)$ такие, что они равны 1 в K_λ, Δ_δ и нулю — вне $K_{2\lambda}$, $\Delta_{2\delta}$ соответственно,

$$|D^\alpha \eta_\lambda| \leqslant c_{24,\alpha}\lambda^{-|\alpha|}, \qquad |D^\alpha \varkappa_\delta| \leqslant c_{25,\alpha}\delta^{-\alpha}.$$

Введем в рассмотрение функции $\theta_{m,\lambda\delta}(x,t) = \eta_\lambda(x)\varkappa_\delta(t)\times\theta_m(x,t)$, определенные в $K_{2\lambda}\times\Delta_{2\delta}$ и продолженные нулем вне этой области. В зависимости от расположения шара $K_{2\lambda}$ в Ω для функций $\theta_{m,\lambda\delta}(x,t)$ из задачи (1.1)–(1.5) можно получить задачу Коши, первую граничную задачу и задачу сопряжения вида (4.6)–(4.8) и, используя оценки решений этих модельных задач, вывести неравенство

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(d_{\lambda\delta})} \leqslant \varepsilon_3\{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(d_{\lambda\delta})} + c_{26}\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(d_{\lambda\delta})} + c_{27}(\lambda,\delta,\varepsilon_3)t^{\frac{1-\rho}{2}}\int\limits_0^t \{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(d_{\lambda\delta})}\tau^{\frac{\rho-2}{2}}\,d\tau, \quad (4.13)$$

где $d_{\lambda\delta} = K_\lambda\times\Delta_\delta, \rho$, как в лемме 4.4, $0<\rho<1$, $0<\varepsilon_3<1$.

Покроем область Ω конечным числом шаров $K_{\lambda,i}$, а $(0,T)$ — интервалами $\Delta_{\delta,j}$, и записав неравенство (4.13) для области $K_{\lambda,i}\times\Delta_{\delta,j}$, перейдем в нем к максимуму по i и j, в результате будем иметь

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)} \leqslant c_{28}t^{\frac{1-\rho}{2}}\int\limits_0^t \{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_\tau)}\tau^{\frac{\rho-2}{2}}\,d\tau + c_{29}\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_t)}.$$

Отсюда следует оценка решения задачи (4.5)

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathfrak{P}}(Q_t)} \leqslant c_{30}(T)\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(Q_T)}.$$

Принимая во внимание замены (4.1), (4.4), получим оценку (1.12).

Теорема 1.1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Солонникову за внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

[1] Мейрманов А. М., *Задача Стефана*, Наука, Новосибирск, 1986.

[2] Базалий Б. В., *Исследование двухфазной задачи Стефана в окрестности стационарного решения*, ДАН УССР, Сер.А (1983), № 12, 3–7.

[3] Базалий Б. В., *Задача Стефана*, ДАН УССР, Сер.А (1986), № 11, 3–7.

[4] Базалий Б. В., Дегтярев С. П., *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости*, Мат. сб. **132** (1987), № 1, 3–19.

[5] Радкевич Е. В., *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей*, Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики, Новосибирск, 1986, с. 85–111.

[6] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[7] Агранович М. С., Вишик М. И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук **19** (1964), № 3, 53–161.

[8] Солонников В. А., *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. МИАН СССР **83** (1965), 3–163.

[9] Эйдельман С. Д., *Параболические системы*, Наука, М., 1964.

[10] Житарашу Н. В., *Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами*, ДАН СССР **169** (1966), № 3, 511–514.

[11] Бижанова Г. И., Солонников В. А., *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гельдеровском пространстве функций*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 1, 109–142.

[12] Могилевский И. Ш., Григорьева Н. А., *Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности*, Геометрические вопросы теории функций и множеств, Калинин, 1985, с. 27–42.

[13] Анисютин Б. М., *Энергетические оценки решения задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии*, Динамика сплошной среды, Новосибирск, 1990, №95, с. 24–39.

[14] Солонников В. А., *Оценки решений некоторых некоэрцитивных начально-краевых задач с помощью теоремы о мультипликаторах в интегралах Фурье-Лапласа*, Функциональные и численные методы математической физики, Киев, 1986, с. 220–228.

[15] Солонников В. А., Фролова Е. В., *О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее приложении к параболическим задачам*, Алгебра и анализ **2** (1990), № 4, 213–241.

[16] Темирбулатов С. И., *Задача теплопроводности с производной по времени в граничном условии*, Дифф. уравнения (1983), № 4, 666–673.

[17] Белоносов В. С., Зеленяк Т. И., *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений*, Новосибирск, 1975.

[18] Солонников В. А., *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи*, Препринт ЛОМИ, Р-2-77, 1977, с. 3–20.

[19] Белоносов В. С., *Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения*, Мат. сб. **110** (1979), № 2, 163–188.

[20] Солонников В. А., Хачатрян А. Г., *Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах*, Тр. МИАН СССР **147** (1980), 147–155.

[21] Доманова Е. Д., *Оценки решений параболических систем в весовых гельдеровских классах при отсутствии условий согласования*, Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики, Новосибирск, 1989, с. 70–85.

[22] Бижанова Г. И., *Оценки решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах,* I,II, Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. (1992), № 5, 7-13; Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. (1993), № 1, 11–17.

[23] Бижанова Г. И., *Решение одной n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в гельдеровском пространстве функций*, Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. (1991), № 5, 21–27.

Поступило 11 июня 1993 г.

Институт теоретической и прикладной
математики Национальной Академии
наук Республики Казахстан
480021, Казахстан, Алматы
ул. Пушкина, 125