A. P. Kiselev, Excitation of modulated waves in inhomogenious media, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 111–122

А.П.Киселев

ВОЗБУЖДЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Статья посвящена асимптотической теории возбуждения модулированных по фазе и амплитуде колебаний неподвижными точечными источниками. С помощью техники пограничного слоя рассматривается скалярное волновое уравнение и две задачи теории упругости. Среды предполагаются стационарными и недиспергирующими. Результатом является построение лучевых разложений. Рассматриваются высшие приближения.

В § I исследуется задача в трехмерном пространстве

$$\ell u \equiv \left(\Delta_{\vec{x}} - \frac{1}{c^2(\vec{x})}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = \delta(\vec{x})\Phi(t;\rho), \ \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{0.I}$$

$$\rho \to \infty,$$

$$\Phi(t,\rho) = \mathcal{A}(t)\mathcal{F}(\rho\varphi(t)), \tag{0.2}$$

$\mathcal{A} \not\equiv 0$, $\mathcal{F}, \varphi \not\equiv const$. Скорость $c(\vec{x}) > 0$ гладкая (бесконечно дифференцируемая), функции $\mathcal{A}$, φ и $\mathcal{F}$ – тоже *), $\mathcal{A}|_{t<0} \equiv 0$. Единственное решение задачи (0.I) выделяется условием $u|_{t<0} \equiv 0$.

Классические модулированные колебания (например, [I], [2], [3]) получаются, если выбрать высокочастотное заполнение $\mathcal{F}$ квазигармоническим

$$\mathcal{F}(\rho\varphi(t)) = e^{i\rho\varphi(t)}. \tag{0.3}$$

Элементарные (причем пригодные как вблизи источника, так и в лучевой области) формулы для $u(\vec{x},t;\rho)$ легко получить, свернув (0.2) с построенным Адамаром [4] разложением функции Грина. Однако, техника Адамара не перенесена еще в теорию упругости.

Мы строим (при некоторых ограничениях на $\mathcal{F}$ и φ) разложение для u вблизи источника и сшиваем его с лучевым. Эти построения в скалярной задаче обобщают прием, описанный в [5] для стационарного высокочастотного случая. Стационарным прототипом рассмотрений в § 2, посвященного теории упругости, является работы [6], [7].

Ограничения, которые пришлось наложить на функции (0.2) для

*) От гладкости $\mathcal{F}$,по-видимому, можно отказаться.

построения схемы сшивания высших приближений таковы: при всех t

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \neq 0, \tag{0.3}$$

нули $\mathcal{F}(s)$ изолированы, а также существуют гладкие функции $\overset{+}{C}_m(t)>0, \bar{C}_m(t)>0$ такие, что

$$\bar{C}_m(s)\rho^m \left|\mathcal{F}(\rho\varphi(s))\right| \leqslant \left|\frac{d^m}{ds^m}\mathcal{F}(\rho\varphi(s))\right| \leqslant \overset{+}{C}_m(s)\rho^m\left|\mathcal{F}(\rho\varphi(s))\right| \tag{0.4}$$

для всех целых m. Производные отрицательного порядка суть интегралы : $(\partial/\partial t)^{-1} h(t) = \int_0^t h(t')dt'$.

§ I. Скалярные волны

I. Лучевое решение. Для построения асимптотики решения задачи о стационарном точечном источнике требуются пространственно-временные лучевые решения (о них см., например, [3]) специального вида, являющиеся естественным обобщением нестационарных сферических волн.

Выпустим из источника $\vec{x}=0$ центральное поле лучей. Будем рассматривать $\vec{x}$ только в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, для которой 0 – единственная особенность лучевого семейства. Пусть $\tau(\vec{x})$ соответствующий эйконал $(\tau(\vec{x}) = \int_0^{(\vec{x})} c^{-1}(\vec{x}')d\sigma(\vec{x}')$ вдоль луча; $d\sigma$ – элемент его длины, следовательно, ([4], [5]) $(\nabla\tau)^2 = c^{-2}$).

При не слишком малых $r \equiv |\vec{x}|$ ищем u в виде

$$u(\vec{x},t;\rho) \sim \sum_{j\geqslant 0} \frac{f^{(-j)}(\rho\theta)}{\rho^j}\, u^{(j)}(\vec{x},t), \tag{I.I}$$

где θ – функция только от разности, $\theta = \theta(t-\tau(\vec{x}))$, $\frac{d\theta(s)}{ds}$ не обращается в нуль, функции $f^{(-j)}$ определены рекуррентным соотношением

$$\frac{f^{(-j)}(\rho s)}{\rho} = \int_0^s f^{(1-j)}(\rho s)\,ds. \tag{I.2}$$

Функции θ и $f^{(0)}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми, $\frac{d\theta(s)}{ds}$ не имеет нулей, а нули $f^{(0)}$ изолированы.

Для квазигармонического заполнения $f^{(0)}(s)=e^{is}$ (I.I)-разложение по обратным степеням большого параметра ρ .

Ряд (I.I) можно считать асимптотическим по определению (подходящее определение дано в [8]), однако нам удобнее иметь дело со степенной шкалой. Потребуем поэтому, чтобы нашлись такие гладкие функции C_m^+ , C_m^- , $C_m^+ > C_m^- > 0$, что

$$C_m^-(s)\rho^{-m}\left|f^{(0)}(\rho\theta(s))\right| \leq \left|f^{(-m)}(\rho\theta(s))\right| \leq C_m^+\rho^{-m}\left|f^{(0)}(\rho(\theta(s))\right|, \tag{I.3}$$

$m=0,1,2,\ldots$. Для построения собственно лучевых формул эти условия не требуются (см., например, [9]), однако трудно представить себе процедуру сшивания высших приближений без какого-либо аналога (I.3).

Подставим (I.I) в (0.I), $\vec{x}\in\Omega/0$,

$$\ell u \sim \rho f^{(+1)}\mathcal{L}U^{(0)} + \sum_{m\geq 0}\rho^{-m}\cdot\left(\mathcal{L}U^{(m+1)} + \ell U^{(m)}\right)\cdot f^{(-m)}, \tag{I.4}$$

$$\mathcal{L} = -\theta'\cdot\left\{2\langle\nabla\tau,\nabla\rangle - \frac{2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\tau\right\},$$

$$\langle\vec{f},\vec{g}\rangle \equiv f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3;\quad \rho f^{(1)}(\rho s) = \frac{d}{ds}f^{(0)}(\rho s);\quad \theta'(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}. \tag{I.5}$$

Если u - асимптотическое решение (0.I), то коэффициенты при $f^{(n)}$ необходимо аннулируются, и

$$\mathcal{L}U^{(0)}=0;\quad \mathcal{L}U^{(-j)} = -\ell U^{(1-j)};\quad j\geq 1. \tag{I.6}$$

Введем лучевые координаты $(\tau,\vec{\eta})$, где $\vec{\eta}=\vec{\eta}(\vec{x})$ - единичный вектор, параметризующий приходящий в $\vec{x}$ луч (например, касательный к нему в источнике). Пусть η_1,η_2 - координаты $\vec{\eta}$, выбранные так, что геометрическое расхождение $\mathcal{J}(\vec{x}) = c^{-1}(\vec{x})\mathcal{D}(x_1,x_2,x_3)/\mathcal{D}(\tau,\eta_1,\eta_2)$ имеет при $\tau\equiv|\vec{x}|\to 0$ асимптотику

$$\mathcal{J} = \tau^2\cdot(1+O(\tau)),\quad \tau\to 0. \tag{I.7}$$

Преобразуем оператор $\mathcal{L}$, пользуясь известным [4], [5] тождеством $\Delta\tau = (c\mathcal{J})^{-1}d/d\tau\,(c\mathcal{J})$ и независимостью $c,\mathcal{J},\tau$ от t :

$$\mathcal{L}v = \theta'\cdot\left\{-\frac{2}{c^2}\frac{\partial v}{\partial(t+\tau)} - \frac{v}{c\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{c}{\mathcal{J}}\right)\right\} = -\frac{2\theta'}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial(t+\tau)}\left(\sqrt{\frac{c}{\mathcal{J}}}\,v\right).$$

8 113

Отсюда

$$u^{(0)}=\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\,\Psi^{(0)}(\vec{\eta},t-\tau), \tag{I.8}$$

$$u^{(j)}=\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\left\{\Psi^{(j)}(\vec{\eta},t-\tau)+\int\limits_0^{t+\tau}\frac{c^2}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\,\ell(u^{(j-1)})\,d(t+\tau),\right. \tag{I.9}$$

интегрирование ведется вдоль пространственно-временного луча. Мы предполагаем, что $\Psi^{(j)}\in C^{\infty}_{1}(S^2\times\mathbb{R}^1_+)$ (S^2 – единичная сфера).

Из асимптотики $\tau(\vec{x})\sim c^{-1}(0)r+o(r^2)$, $r\to 0$ и (I.7) нетрудно найти, что при $r\to 0$, $u^{(j)}(\vec{x},t)=O(r^{-1-j})$. Следовательно, ряд заведомо имеет асимптотический характер при

$$r\equiv|\vec{x}|>C_-(t)\rho^{-1+\varepsilon},\quad C_-(t)>0,\ 1>\varepsilon>0. \tag{I.10}$$

Условие (I.10) гарантирует, как нетрудно проверить, и асимптотическое выполнение уравнения (0.I).

2. <u>Решение вблизи источника</u>. Разложим переменный коэффициент уравнения в ряд Тейлора

$$\frac{1}{c^2(\vec{x})}\sim\gamma^2+C_1(\vec{x})+C_2(\vec{x})+\ldots,\quad \gamma\equiv\frac{1}{c(0)}>0. \tag{I.11}$$

C_m однородны степени m. Будем искать асимптотику поля около источника в виде

$$u(\vec{x},t;\rho)\sim V^{(0)}(\vec{x},t;\rho)+V^{(1)}(\vec{x},t;\rho)+\ldots \tag{I.12}$$

где

$$\left(\Delta-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V^{(0)}=\delta(\vec{x})\Phi(t,\rho), \tag{I.13}$$

$$\left(\Delta-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V^{(j)}=\sum_{s=1}^{s=j}C_s(\vec{x})\frac{\partial^2}{\partial t^2}V^{(j-s)};\quad j\geq 1, \tag{I.14}$$

$$V^{(0)}\Big|_{t<0}=V^{(j)}\Big|_{t<0}\equiv 0,\qquad V^{(0)}\not\equiv 0. \tag{I.15}$$

В стационарном случае $\Phi(t,\rho)=e^{-i\rho t}$ уравнения (I.13)-(I.14) получаются с необходимостью путем перехода к переменным $\vec{X}=\rho\vec{x}$ и предположения, что $\rho V^{(0)}, V^{(1)}, \rho^{-1}V^{(2)},\ldots$ зависят от ρ только через $\vec{X}$ (см. [5]).

Преобразование Фурье $t\to\omega$

$$\hat{V}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\omega t}V(t)\,dt \tag{I.16}$$

переводит задачи (I.13)–(I.15) в

$$(\Delta+\omega^2\gamma^2)\hat{V}^{(0)}(\vec{x},\omega;\rho)=\delta(\vec{x})\hat{\Phi}(\omega;\rho), \tag{I.17}$$

$$(\Delta+\omega^2\gamma^2)\hat{V}^{(j)}(\vec{x},\omega;\rho)=-\omega^2\sum_{s=1}^{s=j}C_j(\vec{x})V^{(j-s)}(\vec{x},\omega;\rho), \tag{I.18}$$

$\hat{V}^{(m)}(\vec{x},\omega;\rho)\to 0$ при $r\to\infty$, если $\mathrm{Im}\,\omega>0,\ m=0,1,\ldots$ (I.19)

Очевидно, $\hat{V}^{(0)}(\vec{x},\omega;\rho)=-(4\pi r)^{-1}e^{i\gamma\omega r}\hat{\Phi}(\omega;\rho)$ откуда

$$\begin{aligned}V^{(0)}(\vec{x},t;\rho)&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4\pi r}\int e^{i\omega\gamma r-i\omega t}\hat{\Phi}(\omega;\rho)\,d\omega=\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\iint e^{i\omega(t'-t-\gamma r)}\hat{\Phi}(t';\rho)\,d\omega\,dt'=\\&=\frac{\Phi(t-\gamma r)}{-4\pi r}=-\frac{\mathcal{A}(t-\gamma r)\,\mathcal{F}(\rho\varphi(t-\gamma r))}{4\pi r}.\end{aligned} \tag{I.20}$$

Не составляет труда проверить, что

$$\hat{V}^{(j)}(\vec{x},\omega;\rho)=\omega^{1-j}\sum_{m=0}^{m=j}(\omega r)^{-m}v_{jm}(\vec{\xi};\rho)\hat{\Phi}(\omega;\rho), \tag{I.21}$$

$$\vec{\xi}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\equiv\frac{\vec{x}}{r}, \tag{I.22}$$

v_{jm} гладки на единичной сфере S^2. (Детальные сведения об их структуре можно извлечь из [5]). Очевидно,

$$V^{(j)}(\vec{x},t;\rho)=\sum_{m=0}^{2j-1}r^m v_{jm}(\vec{\xi};\rho)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l+1-j}\Phi(t-\gamma r;\rho).$$

Для $\rho \to \infty$, $r\rho \to \infty$

$$V^{(j)}(\vec{x},t;\rho)=\sum_{m=0}^{2j-1} O(r^m \rho^{m+1-j})=\sum_{m=0}^{2j-1} O\left(\rho^{\frac{m}{2}+1-j}(r\sqrt{\rho})^m\right). \quad (I.23)$$

Следовательно (поскольку $\frac{m}{2}+1-j\leq 0$), при условии

$$r<C_+(t)\rho^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_+}, \quad \frac{1}{2}>\varepsilon_+>0, \quad C_+(t)>0 \quad (I.24)$$

справедлива оценка $|V^{(j)}|<C_+(t)\rho^{-\frac{\varepsilon_+}{2}(2j-1)}$ и ряд (I.II) имеет асимптотический характер. Так же легко проверить, что он является в области (I.24) при всех t асимптотическим решением (0.I).

3. <u>Сшивание</u>. Как и для стационарной задачи [5], ряды (I.3) и (I.II) пригодны в области, определенной неравенствами (I.IO), (I.24) при $\varepsilon_+ + \varepsilon_- < \frac{1}{2}$.

Для сшивания главных членов достаточно заметить, что $\tau(\vec{x})\sim \sim \gamma r_{(0)}$, $r\to 0$, и воспользоваться (I.20). Потребовав близости $V^{(0)}$ и $f^{(0)}\,\mathcal{U}^{(0)}$ в (I.IO), (I.24), получаем

$$\theta(T)=\varphi(T), \quad f^{(0)}(y)=\mathcal{F}(y). \quad (I.25)$$

Если выбрано $f^{(0)}$, то начальные данные определяются однозначно:

$$\Psi^{(0)}(\vec{\eta},T)=\frac{1}{-4\pi\sqrt{C(0)}}\,\mathcal{A}(T). \quad (I.26)$$

Рассмотрим вкратце процедуру, ведущую к определению начальных данных $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$,... дальнейших для приближений лучевого метода. Для этого нам придется распространить условие (I.3) на отрицательные индексы (т.е. воспользоваться (0.4) и (I.24)).

Из [5] следует, что при $r\to 0$ $\mathcal{U}^{(j)}\sim\sum_{m\geq -1-j} r^m \sum_{n\geq 0} \ln^n r\cdot \cdot\, \mathcal{W}_{j,m,n}(\vec{\xi},t+\tau,t-\tau)$, где $\mathcal{W}_{j,m,n}\in C^\infty(S^2\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1)$. Используя аналитические свойства эйконала τ , разложим функции $f^{(-j)}$ в асимптотические при $r\to 0$ ряды

$$f^{(-j)}(\rho\theta(t-\tau(\vec{x})))\sim\sum_{m\geq 0} f^{(m-j)}(\rho\theta(t-\gamma r))\cdot \rho^m\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\partial^n\theta(t-\gamma r)}{\partial t^n}\tau_{n+1}(\vec{x})\right)^m$$

где $\tau_m(\vec{x})$ однородны по $\vec{x}$ степени m . Аналогично поступим с функциями $\mathcal{W}_{j,m,n}$. В результате получим

$$u \sim \sum_S \rho^S W^{(S)}, \tag{I.27}$$

$$W^{(S)} \sim \sum_j \rho^{-j} f^{(-j)}(\rho\theta(t-\gamma r)\Phi^{(s,j)}, \; \Phi^{(s,j)} \sim \sum_m \sum_{n\geq 0} r^m \ln^n r W_{s,j,m,n}(\tag{I.28}$$

$$W_{s,j,m,n} = W_{s,j,m,n}(\vec{\xi}, t-\gamma r, t+\gamma r), W_{s,j,m,n} \in C^\infty(S^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1), \tag{I.29}$$

причем при любых S, j значок m ограничен сверху. Этот ряд является асимптотическим решением (0.I) в слое (I.IO), (I.24). Такова же структура ряда (I.II).

Имеет место следующая лемма единственности.

Пусть ряд вида (I.27)-(I.29) асимптотически удовлетворяет (0.I) в слое (I.IO), (I.24). Тогда он однозначно определяется заданием функций $W_{S,j,-1,n}$, которые не зависят от $t+\gamma r$ а в остальном произвольны.

Это утверждение (как и его доказательство) аналогично леммам единственности работы [5].

Можно проследить, начальные данные $\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \ldots$ входят в (I.27)-(I.29) таким образом, что их действительно можно последовательно определить сшиванием с (I.II).

Как и в стационарной задаче [5], оказывается, что

$$\Psi^{(1)} \equiv \Psi^{(2)} \equiv \ldots \equiv 0,$$

(это специфика трехмерного случая), и что логарифмические члены отсутствуют, $W_{s,j,m,n} \equiv 0, n \neq 0$ (это верно в любой размерности).

§ 2. Возбуждение упругих волн

Рассмотрим две задачи вида

$$\vec{\ell}(\vec{u}) = \vec{F}(\vec{x})\Phi(t;p); \quad p \to \infty, \tag{2.I}$$

$$\ell_i(\vec{u}) = -\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu(\vec{x})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda(\vec{x})\, div\, \vec{u}), \tag{2.2}$$

с векторами $\vec{F}$ сосредоточенными при $\vec{x}=0$, $supp\,\vec{F}=\{0\}$, $\Phi(t;p) = \mathcal{A}(t)\mathcal{F}(p\varphi(t))$; $\lambda+2\mu>\mu>0$; $\rho>0$; $\lambda, \mu, \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Лучевое разложение имеет вид суммы

$$\vec{u}(\vec{x},t;p) \sim \vec{u}^{a}(\vec{x},t;p) + \vec{u}^{b}(\vec{x},t;p), \tag{2.3}$$

$$\vec{u}^{c} \sim \sum_{j\geq 0} \frac{f^{c,-j}(p\theta^{c})}{p^{j}} \vec{u}^{c,-j}(\vec{x},t); \quad \theta^{c} = \theta^{c}(t-\tau^{c}(\vec{x})) \tag{2.4}$$

$$|\vec{u}^{a,0}| + |\vec{u}^{b,0}| \not\equiv 0$$

здесь $a = a(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$; $b = b(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - продольная и поперечная скорости, значок c заменяет a или b, τ^{a}, τ^{b} - эйконалы отвечающие центральным полям лучей.

Если $\vec{u}^{a,-m}$ и $\vec{u}^{b,-n}$ - первые ненулевые члены рядов (2.4), то

$$\vec{u}^{a,-m}(\vec{x},t) = \frac{\overset{(m)}{\Psi}(\vec{\eta}^{a}, t-\tau^{a}(\vec{x}))}{\sqrt{\rho(\vec{x})\, a(\vec{x})\, J^{a}(\vec{x})}} \vec{s}^{a}(\vec{x}); \quad \vec{u}^{b,-n} = \frac{1}{\sqrt{\rho b J^{b}}} H \vec{\chi}^{n}(\vec{\eta}^{b}, t-\tau^{b}), \tag{2.5}$$

где $\vec{\eta}^{a}$ и $\vec{\eta}^{b}$ введены аналогично § I, $\vec{s}^{a} = a\, \mathrm{grad}\, \tau^{a}$ (откуда $|\vec{s}^{a}| = 1$). В базисе $\vec{s}^{b}(\vec{x}), \vec{n}^{b}(\vec{x}), \vec{\gamma}^{b}(\vec{x})$ (соответственно: единичные касательная, нормаль и бинормаль к поперечному лучу в точке $\vec{x}$) элементы матрицы H таковы: $H_{1j} = H_{j1} = 0$, $j = 1,2,3$; $H_{22} = H_{23} = \cos \Xi$, $H_{32} = -H_{23} = \sin \Xi$, где $\Xi = \int_0^{\tau^{b}} T b\, d\sigma^{b}$, T - кручение поперечного луча, вдоль которого идет интегрирование.

Скалярную функцию $\Psi_{b}^{(m)}$ и векторную $\vec{\chi}^{n}$, которую можно считать ортогональной к $\vec{s}^{b} = b\, \mathrm{grad}\, \tau^{b}$, предполагаем гладкими на $S^{2} \times \mathbb{R}^{1}$. Формулы для высших приближений см. в [9].

I. Рассмотрим задачу о тензоре Грина

$$\vec{F} = -4\pi \vec{e}_1 \delta(\vec{x}), \tag{2.6}$$

$\vec{e}_1$ - орт оси x_1. Вблизи источника, аналогично § I,

$$\vec{u} \sim \vec{V}^{0} + \vec{V}^{1} + \dots \tag{2.7}$$

причем для $\vec{V}^{0}$ получаем уравнение с постоянными коэффициентами

$$(\lambda(0)+2\mu(0))\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{V}^{0} - \mu(0)\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \vec{V}^{0} - \rho(0) \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \vec{V}^{0} = \vec{F}(\vec{x}) \Phi(t;p) \tag{2.8}$$

Преобразование Фурье дает

$$(\lambda(0)+2\mu(0))\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \hat{\vec{V}}^{0} - \mu(0)\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \hat{\vec{V}}^{0} + \rho(0)\omega^{2} \hat{\vec{V}}^{0} = \vec{F}(\vec{x}) \hat{\Phi}(\omega;p) \tag{2.9}$$

откуда

$$\vec{V}^0(\vec{x},\omega;\rho)=\frac{\hat{\Phi}(\omega;\rho)}{\rho(0)}\left\{\left(\beta^2\vec{e}_1-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\,grad\right)\frac{e^{i\beta\omega r}}{r}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\,grad\,\frac{e^{i\alpha\omega r}}{r}\right\}, \quad (2.10)$$

$$\alpha=\frac{1}{a(0)}=\sqrt{\frac{\rho(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)}}\,,\qquad \beta=\frac{1}{b(0)}=\sqrt{\frac{\rho(0)}{\mu(0)}}\,.$$

Из (2.10) нетрудно получить, что

$$\vec{V}^0(\vec{x},t;\rho)=\mathcal{P}\vec{V}^0+\vec{R},$$

где

$$\mathcal{P}\vec{V}^0=\frac{1}{\rho(0)}\left\{\beta^2\cdot(\vec{e}_1-\langle\vec{e}_1,\vec{\xi}\rangle\vec{\xi})\frac{\Phi(t-\beta r;\rho)}{r}-\alpha^2\langle\vec{e}_1,\vec{\xi}\rangle\vec{\xi}\,\frac{\Phi(t-\alpha r;\rho)}{r}\right\}$$

а $|\vec{R}|=O(r^{-2})$ при $r\rho\to\infty, r\to 0$. В области (1.10), (1.24) $|\vec{R}|=O(\mathcal{P}\vec{V}^0)$. Сшивая $\vec{U}^{a,0}f^{a,0}+\vec{U}^{b,0}f^{b,0}$ с $\vec{V}^0\sim\mathcal{P}\vec{V}^0$, находим, что

$$\theta^a(T)=\theta^b(T)=\varphi(T)\,;\quad f^{a,0}(T)=f^{b,0}(T)=\mathcal{F}(T). \quad (2.11)$$

При фиксированных функциях $f^{a,0}$ и $f^{b,0}$, $\Psi^{(0)}$ и $\vec{\chi}^0$ находятся однозначно:

$$\Psi^{(0)}(\vec{s},T)=\langle\vec{s},\vec{e}_1\rangle a^{-\frac{3}{2}}(0)\rho^{-\frac{1}{2}}(0)\mathcal{A}(T), \quad (2.12)$$

$$\vec{\chi}^0(\vec{s},T)=(\vec{e}_1-\langle\vec{s},\vec{e}_1\rangle\vec{s})b^{-\frac{3}{2}}(0)\rho^{-\frac{1}{2}}(0)\mathcal{A}(T) \quad (2.13)$$

(мы полагаем, что при $r\to 0$, $\vec{\eta}^{a,b}\to\vec{\xi}=\frac{\vec{x}}{r}$).

Для источника (2.1), (2.6), возбуждающего в нулевом приближении обе волны (продольную и поперечную), их частотные характеристики оказываются одинаковыми.

2. Рассмотрим центр расширения

$$\vec{F}=-4\pi\,grad\,\delta(\vec{x}). \quad (2.14)$$

Для нулевого приближения имеем $\hat{\vec{V}}^0(\vec{x},\omega;\rho)=\rho^{-1}(0)\hat{\Phi}(\omega;\rho)\,grad(r^{-1}e^{i\alpha\omega r})a^{-2}(0)$

$$\vec{V}^0(\vec{x},t;p)=\frac{1}{\rho(0)\,a^2(0)}\,\mathrm{grad}\,\frac{\Phi\,(t-\alpha r)}{r}\equiv \mathcal{P}\vec{V}^0+\vec{R},$$

$$\mathcal{P}\vec{V}^0=-\frac{A(t-\alpha r)\,\varphi'(t-\alpha r)\,p\,F'(p\,(\varphi(t-\alpha r))}{\rho(0)\;a^3(0)}\,\vec{\xi} \qquad (2.15)$$

а $\vec{R}=o(\mathcal{P}\vec{V}^0)$ в слое (I.IO), (I.24). Следовательно,

$$\vartheta^{a}(T)=\varphi(T),\quad f^{a;0}(T)=F'(T)\cdot p, \qquad (2.16)$$

$$\Psi^{(0)}(\vec{\xi},T)=-A(T)\,a^{-3/2}(0)\,\rho^{-1/2}(0)\;\varphi'(T). \qquad (2.17)$$

Следующее приближение $\vec{V}^1(\vec{x},t;p)$, построенное по схеме § I исследовалось (для стационарной постановки) в [6],[7]. Было найдено, что

$$\hat{\vec{V}}^1(\vec{x},\omega;p)=\hat{\vec{V}}^{a1}(\vec{x},\omega;p)+\hat{\vec{V}}^{b1}(\vec{x},\omega;p) \qquad (2.18)$$

причем $\hat{\vec{V}}^{a1}$ (а, следовательно, и $\vec{V}^{a1}(\vec{x},t;p)$) сшивается в слое (I.IO), (I.24): с продольной волной, а

$$\hat{\vec{V}}^{1b}(\vec{x},\omega;p)=e^{i\omega\beta r}\sum_{s=-4}^{s=1}\hat{\vec{W}}_s^{1b}(\vec{x},\omega)\,\hat{\Phi}'(\omega;p), \qquad (2.19)$$

$$\Phi'(t;p)=d/dt\,\Phi\,(t;p),$$

где $\vec{W}_s^{1b}$ однородны по $\vec{x}$ степени s. При условии (I.IO), (I.24) слагаемое $\hat{\vec{W}}_{-1}^{1b}$ является старшим, оно равно (см. [7])

$$\hat{\vec{W}}_{-1}^{1b}(\vec{x},\omega;p)=\frac{\vec{Q}-\langle\vec{Q},\vec{\xi}\rangle\vec{\xi}}{-i\omega r}, \qquad (2.20)$$

$$\vec{Q}=\frac{\alpha^2\beta^2}{\rho^2(0)(\alpha^2-\beta^2)}\,(2\beta^2\,\mathrm{grad}\,\mu-\mathrm{grad}\,\rho)\Big|_{\vec{x}=0}. \qquad (2.21)$$

Сшивая $\vec{u}^{\,b,1}f^{\,b,-1}$ с фурье-прообразом $\mathcal{P}\vec{V}^{1b}$ функции $e^{i\omega\beta r}\hat{\vec{W}}_{-1}^{1b}\hat{\Phi}'$,

$$\mathcal{P}\vec{V}^{1b}(\vec{x},t;p)=\left\{\vec{Q}-\langle\vec{Q},\vec{\xi}\rangle\vec{\xi}\right\}\frac{\int_0^{t-\beta r}\Phi'(T;p)\,dT}{r}$$

и замечая, что

$$\int_0^{t-\beta r} \Phi'(T;\rho)\,dT = \frac{A(t-\beta r)}{\varphi'(t-\beta r)} \mathcal{F}(\rho\,\varphi(t-\beta r))\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

находим:

$$f^{b,-1}(T) = \mathcal{F}(T) \tag{2.22}$$

$$\theta^{b}(T) = \varphi(T), \tag{2.23}$$

тогда

$$\vec{\chi}^{1}(\vec{\xi},T) = \left(\vec{Q} - \langle \vec{Q},\vec{\xi}\rangle \vec{\xi}\right) b^{-1/2}(0)\,\varrho^{-1/2}(0)\cdot A(T). \tag{2.24}$$

Таким образом, форма импульса поперечной волны иная, чем у продольной. Поперечная волна ведет себя как интеграл от продольной. Для источника, порождающего в нулевом приближении только поперечную волну (см. [7]), картина обратная.

3. Лемма единственности, (которой мы неявно пользовались выше), обобщающая подобный результат для стационарной задачи [6], [7] такова.

Пусть

$$\vec{u} \sim \sum_s \rho^s \vec{w}^{\,s}, \quad \vec{w}^{\,s} \sim \sum_j \frac{f^{s,-j}(\rho\theta(t-\gamma r))}{\rho^j} \sum_m \sum_{n\geq 0} r^m \ln^n r\, \vec{W}^{s,-j,m,n},$$

$$\vec{W}^{s,-j,m,n} = \vec{W}^{s,-j,m,n}(\vec{\xi}, t-\gamma r, t+\gamma r) \in \vec{C}^{\infty}(S^2\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1),$$

$$\frac{f^{s,-j}(\rho\zeta)}{\rho} = \int_0^{\zeta} f^{s,-j+1}(\rho\sigma)\,d\sigma,$$

причем в каждом ряде $\vec{w}^{\,s}$ $m \leq M(s,j) < +\infty$. Если ряд $\vec{u}^{\,c}$ асимптотически удовлетворяет (2.I) в слое (I.IO), (I.24), то имеется ровно две возможности:

а) $\alpha = \gamma$, тогда функции $\langle \vec{W}^{s,j,-1,n}, \vec{\xi}\rangle$ можно задавать произвольно, но так, чтобы они не зависели от $t+\gamma r$; остальные $\vec{W}^{s,j,m,n}$ по ним определяются.

в) $\alpha = \beta$, тогда произвольны, но не зависят от $t+\gamma r$ функции $\vec{W}^{s,j,-1,n} - \langle \vec{W}^{s,j,-1,n}, \vec{\xi}\rangle \vec{\xi}$, а остальные выражаются через них.

Литература

1. Р ы т о в С.М. Модулированные колебания и волны. Труды ФИАН, 1940, т.2, № 1, с. 40-133.
2. У и з е м Дж. Линейные и нелинейные волны, М., 1977, 622 с.
3. О р л о в Ю.И. Пространственно-временная дифракция импульсов. В кн.: "Прямые и обратные задачи дифракции", М., 1979, с.5-144.
4. А д а м а р Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М.,1978, 352 с.
5. Б а б и ч В.М., К и р п и ч н и к о в а Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции, Л., 1974, 124 с.
6. К и с е л е в А.П. О высокочастотных точечных источниках в неоднородных изотропных упругих средах. - Докл. АН СССР, 1974, т.219, № 4, с.829-831.
7. К и с е л е в А.П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных упругих средах. - Вопр.дин.теории распр. сейсм.волн, 1975, т.15, с.6-27.
8. Б у р б а к и Н. Функции действительного переменного, М., 1965. с.424.
9. Б а б и ч В.М. О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн. - Изв.АН СССР, Физика Земли, 1979, № 2, с.3-13.

A.P.Kiselev. Excitation of modulated waves in inhomogenious media.

Excitation of scalar and elasic waves by point sources is treated by boundary layer technique. Higher terms of asymptotics are discussed.