И. Г. Шевцова, Некоторые неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин с ограниченной плотностью, *Системы и средства информ.*, 2006,спецвыпуск, 286–308

УДК 519.2

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ [1]

И. Г. Шевцова

Получены неравномерные оценки первого и второго порядка скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых одинаково распределённых случайных величин с ограниченной плотностью при различных моментных условиях. Найденные оценки имеют вид суммы двух слагаемых, первое из которых является ляпуновской дробью соответствующего порядка с коэффициентом, зависящим только от максимального порядка момента исходного распределения, а второе убывает экспоненциально быстро с ростом числа слагаемых. Значения коэффициента при ляпуновской дроби значительно меньше известных.

1. Введение

Оценки точности нормальной аппроксимации находят своё приложение, например, в теории надёжности, методах Монте–Карло и многих других практических задачах. Наиболее простыми с точки зрения практического применения являются равномерные оценки, изучавшиеся многими исследователями. Однако равномерные оценки являются порой слишком грубыми, поскольку они не учитывают близость допредельной и предельной функций распределения при больших значениях аргумента (вероятности больших уклонений). Этого недостатка лишены неравномерные оценки, которые даже при умеренном числе случайных слагаемых становятся малыми с ростом аргумента.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00396).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 = 1, \tag{1}$$

$$\beta_{2+\delta} \equiv \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty \tag{2}$$

для некоторого $0 < \delta \leqslant 1$. Условие (2) при $\delta = 1$ превращается в классическое требование конечности третьего момента

$$\beta_3 \equiv \mathsf{E}|X_1|^3 < \infty. \tag{3}$$

Обозначим

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} < x\right),$$

$$\Delta_n(x) = |F_n(x) - \Phi(x)|,$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

В сделанных выше предположениях в 1966 г. А. Бикялис [1] получил при всех $0 < \delta \leqslant 1$ классическую оценку вида

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{C(\delta) L_n^{2+\delta}}{1 + |x|^{2+\delta}}, \tag{4}$$

где $C(\delta)$ зависит только от δ, а $L_n^{2+\delta}$ — дробь Ляпунова порядка $2+\delta$:

$$L_n^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Как показали позже Л. Падитц [8, 9] и В. Тысиак [11], функция $C(\delta)$ монотонно возрастает по $\delta \in (0, 1]$, поэтому наибольший интерес представляет её значение в единице, для которого в 1981 г. Р. Михель [7] получил оценку

$$C(1) \leqslant 30.54.$$

В 1989 г. Падитц [10] описал аналитическую структуру функции $C(\delta)$, не указав, однако, её конкретных числовых значений.

В данной работе мы рассматриваем «гладкий» случай, когда слагаемые имеют хотя бы одну ограниченную версию плотности $p(x)$:

$$A \equiv \sup_x p(x) < \infty. \tag{5}$$

Заметим, что при приведённых выше условиях (1) на моменты случайной величины X_1 константа A не может быть сколь угодно близкой к нулю, более того, для любой абсолютно непрерывной случайной величины X с $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{D}X = 1$ и ограниченной плотностью $p_X(x)$ выполнено соотношение

$$\sup_x p_X(x) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}} \geqslant 0.288\,675.$$

Действительно, в работе Ю.В. Прохорова [6] отмечено, что среди всех случайных величин Y с нулевым средним и

$$\sup_x p_Y(x) = A < \infty$$

($p_Y(x)$ — плотность случайной величины Y) наименьшей дисперсией обладает случайная величина Y_0, равномерно распределённая на $[-1/(2A),\ 1/(2A)]$, для которой $\mathsf{D}Y_0 = 1/(12A^2)$. Тогда, если мы предположим, что

$$\sup_x p_X(x) < \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

то неизбежно

$$\mathsf{D}X \geqslant \mathsf{D}Y_0 = \frac{1}{12\bigl(\sup_x p_X(x)\bigr)^2} > 1,$$

что противоречит условию $\mathsf{D}X = 1$. Другими словами, в сделанных выше предположениях всегда $12A^2 \geqslant 1$.

Построенные в данной работе оценки являются не совсем неравномерными в классическом смысле этого слова. По сути, это равномерные оценки, но для другой величины: их левая часть имеет вид не

$$\sup_x (1 + |x|^{2+\delta})\Delta_n(x),$$

а

$$\sup_x |x|^k \Delta_n(x),$$

$k = 1$ (для любого $0 < \delta \leqslant 1$) и $k = 2$ (для $\delta = 1$). Во-вторых, они имеют неправильный порядок по аргументу, и, в-третьих, более сложную структуру правой части. Однако за счёт довольно умеренных значений коэффициента при наиболее медленно убывающем слагаемом правой части оценки (ляпуновской дроби порядка $2+\delta$) существует область умеренных значений x и больших n, в которой оценки, полученные в данной заметке, становятся предпочтительнее.

2. Основные результаты

Пусть d — произвольное число из интервала $(0, \sqrt{2}\,)$. Введём функции

$$a(\delta, d) = \frac{d^{2-\delta}}{4}\left[\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2}\right] + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)},$$

$$b(\delta, d) = \frac{1}{2} - \max\left\{d^{\delta}, d^{\delta/2}\right\} a(\delta, d).$$

$$\widetilde{b}(\delta, d) = \frac{1}{2} - \frac{2^{1-\delta} d^{\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)},$$

$$v_1(\delta, d) = \left(1 - \frac{d^2}{2}\right)^{-1}\left(\frac{d^{2-\delta}}{2} + \frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\right),$$

$$v_2(\delta, d) = d^{\delta} v_1^2(\delta, d) + 2v_1(\delta, d),$$

$$v_3(\delta, d) = \left(1 - \frac{d^2}{2}\right)^{-1}\left(\frac{d^{2-\delta}}{2} + 2^{1-\delta}\right) + \\ + d^{2-\delta}\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)^{-2}\left(1 + \frac{2^{1-\delta} d^{\delta}}{1+\delta}\right)^2.$$

Можно убедиться, что

$$a(\delta, d) = -\frac{1}{d^{2+\delta}}\left[\frac{d^2}{2} + \ln\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)\right] + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}.$$

Заметим также, что функции $b(\delta, d)$ и $\widetilde{b}(\delta, d)$ монотонно убывают по d при каждом $\delta \in (0, 1]$. Функция $b(\delta, d)$ обращается в нуль в некоторой точке $\bar{d}(\delta)$, для всех $0 < \delta \leqslant 1$, лежащей внутри интервала $(0, \sqrt{2}\,)$. Функция $\widetilde{b}(\delta, d)$ может принимать нулевые значения на интервале $(0, \sqrt{2}\,)$ лишь при δ, близких к нулю ($\delta < \delta_0 \in (0.42,\ 0.43)$). Кроме того, как вытекает из цепочки неравенств

$$b(\delta, d) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{2^{1-\delta}\max\left\{d^{\delta}, d^{\delta/2}\right\}}{(1+\delta)(2+\delta)} \leqslant \widetilde{b}(\delta, d),$$

нуль функции $\widetilde{b}(\delta, d)$ лежит всегда правее нуля $\bar{d}(\delta)$ функции $b(\delta, d)$. Этим обстоятельством мы будем пользоваться ниже.

Несложно видеть, что

$$\lim_{d\to 0+}\widetilde{b}(\delta,d)=\frac{1}{2},\quad \lim_{d\to 0+}v_1(\delta,d)=\frac{2^{1-\delta}}{1+\delta},$$

$$\lim_{d\to 0+}v_2(\delta,d)=\frac{2^{2-\delta}}{1+\delta},\quad \lim_{d\to 0+}v_3(\delta,d)=2^{1-\delta}.$$

Пусть

$$K_1(\delta,d)=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{2\pi}\left[\frac{a(\delta,d)}{[b(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}+\frac{(1+\delta)a(\delta,d)}{2[b(\delta,d)]^{(3+\delta)/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{v_1(\delta,d)}{[\widetilde{b}(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}\right],\qquad(6)$$

$$K_2(d)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{2a(1,d)}{[b(1,d)]^{1/2}}+\frac{a(1,d)}{[b(1,d)]^{3/2}}+\frac{2v_1(1,d)}{[\widetilde{b}(1,d)]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{3a(1,d)}{4[b(1,d)]^{5/2}}+\frac{a(1,d)}{2[b(1,d)]^{3/2}}+\frac{v_2(1,d)}{2[\widetilde{b}(1,d)]^{3/2}}+\frac{v_3(1,d)}{[\widetilde{b}(1,d)]^{1/2}}\right].\qquad(7)$$

Учитывая приведённые выше соотношения, легко видеть, что функции $K_1(\delta,d)$ на интервале $(0,\bar{d}(\delta))$ и $K_2(d)$ на интервале $(0,\ \bar{d}(1))$ монотонно и непрерывно возрастают, причём

$$\lim_{d\to 0+}K_1(\delta,d)=\frac{2^{(3-\delta)/2}\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{\pi(1+\delta)}\equiv L(\delta),\qquad(8)$$

$$\lim_{d\to 0+}K_2(d)=\frac{13}{3\sqrt{2\pi}},\qquad(9)$$

$$\lim_{d\to\bar{d}(\delta)-}K_1(\delta,d)=+\infty,\quad \lim_{d\to\bar{d}(1)-}K_2(d)=+\infty,$$

поэтому для любого $0<\varepsilon<+\infty$ существует единственный корень $d_1(\delta,\varepsilon)$ уравнения

$$K_1(\delta,d)=L(\delta)+\varepsilon,\qquad(10)$$

лежащий в интервале $(0,\bar{d}(\delta))$, и единственный корень $d_2(\varepsilon)$ уравнения

$$K_2(d)=\frac{13}{3\sqrt{2\pi}}+\varepsilon,\qquad(11)$$

лежащий в интервале $(0,\bar{d}(1))$. При этом $d_1(\delta,\varepsilon)$ и $d_2(\varepsilon)$ как функции ε монотонно и непрерывно возрастают от 0 до $\bar{d}(\delta)$ и $\bar{d}(1)$ соответственно при ε, изменяющемся от 0 до $+\infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1), (2) для некоторого $0<\delta\leqslant 1$ и (5). Тогда для всех $n\geqslant 3$

$$\sup_x|x|\Delta_n(x)\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{0<d<\bar{d}(\delta)}\Big\{K_1(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}+V_{1n}(\beta_{2+\delta},\delta,d)+W_{1n}(A,\beta_{2+\delta},\delta,d)\Big\},\qquad(12)$$

где $K_1(\delta,d)$ определено в (6),

$$V_{1n}(\beta_{2+\delta},\delta,d)=\frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{\pi d\sqrt{n}}\left(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2n}+1\right)\exp\left\{-\frac{d^2n}{2(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\right\},$$

$$W_{1n}(A,\beta_{2+\delta},\delta,d)=A\sqrt{n}\left(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2n}+\frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d}\right)\times$$
$$\times\left[1-\frac{d^2}{3\pi^2A^2(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\left(1-\frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta}(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\right)^3\right]^{n-3}.$$

Если дополнительно выполнено условие (3), то для всех $n\geqslant 4$

$$\sup_x|x|^2\Delta_n(x)\leqslant\inf_{0<d<\bar{d}(1)}\left\{K_2(d)\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}+V_{2n}(\beta_3,d)+W_{2n}(A,\beta_3,d)\right\},$$

где $K_2(d)$ определено в (7),

$$V_{2n}(\beta_3,d)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2(\beta_3)^4}{d^4n^2}+\frac{3(\beta_3)^2}{d^2n}+1\right)\exp\left\{-\frac{d^2n}{2(\beta_3)^2}\right\},$$

$$W_{2n}(A,\beta_3,d)=$$
$$=A\left(\frac{2(\beta_3)^3}{d^3n}+\frac{2\beta_3}{d}+\frac{\beta_3n}{d}\right)\left[1-\frac{d^2}{3\pi^2A^2(\beta_3)^2}\left(1-\frac{8d^3}{\pi^3(\beta_3)^2}\right)^3\right]^{n-4}.$$

Замечание 1. Непосредственным вычислением можно убедиться, что величина $\bar{d}(1)$ лежит в интервале (1.17, 1.18), поэтому минимизацию в неравномерной оценке второго порядка можно проводить по множеству $d\in(0,\ 1.17]$.

Замечание 2. Для любого $\delta \in (0,1]$ суммы

$$V_{1n}(\beta_{2+\delta},\delta,d)+W_{1n}(A,\beta_{2+\delta},\delta,d) \quad \text{и} \quad V_{2n}(\beta_3,d)+W_{2n}(A,\beta_3,d)$$

убывают экспоненциально быстро с ростом n.

Поскольку основной вклад в оценки из теоремы 1 вносят первые слагаемые под знаком инфимумов в правых частях, медленнее других убывающие по n, существенную роль играют абсолютные константы в этих слагаемых. С целью сделать вид указанных постоянных более наглядным, мы приведём ещё одну, эквивалентную, но, на наш взгляд, более удобную формулировку теоремы 1. Учитывая соотношения (6)–(9), из теоремы 1 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1), (2) для некоторого $0<\delta\leqslant 1$ и (5). Тогда для всех $n\geqslant 3$

$$\sup_x |x|\Delta_n(x) \leqslant \inf_{\varepsilon>0}\Big\{(L(\delta)+\varepsilon)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}+V_{1n}(\beta_{2+\delta},\delta,d_1(\delta,\varepsilon))+ + W_{1n}(A,\beta_{2+\delta},\delta,d_1(\delta,\varepsilon))\Big\}, \quad (13)$$

где $d_1(\delta,\varepsilon)$ — корень уравнения (10), $L(\delta)$ определено в (8), а $V_{1n}(\beta_{2+\delta},\delta,d))$, $W_{1n}(A,\beta_{2+\delta},\delta,d)$ — в формулировке теоремы 1.

Если $\delta=1$, то есть выполнено условие (3), то для всех $n\geqslant 4$

$$\sup_x |x|^2\Delta_n(x) \leqslant \inf_{\varepsilon>0}\Big\{\Big(\frac{13}{3\sqrt{2\pi}}+\varepsilon\Big)\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}+V_{2n}(\beta_3,d_2(\varepsilon))+ + W_{2n}(A,\beta_3,d_2(\varepsilon))\Big\}, \quad (14)$$

где $d_1(\delta,\varepsilon)$ — корень уравнения (11), $V_{2n}(\beta_3,d)$ и $W_{2n}(A,\beta_3,d)$ определены в формулировке теоремы 1.

Пусть $\varepsilon>0$ и $d_1(\varepsilon)$ — единственный корень уравнения

$$K_1(1,d)=\frac{1}{\pi}+\varepsilon,$$

лежащий в полуинтервале $(0,1.17]$. Для случая $\delta=1$ (то есть при выполнении условия (3)) из теоремы 2 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (1), (3) и (5). Тогда для любого $n\geqslant 3$ справедлива оценка

$$\sup_x |x|\Delta_n(x) \leqslant \leqslant \inf_{\varepsilon>0}\Big\{\Big(\frac{1}{\pi}+\varepsilon\Big)\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}+V_{1n}(\beta_3,1,d_1(\varepsilon))+W_{1n}(A,\beta_3,1,d_1(\varepsilon))\Big\},$$

где $V_{1n}(\beta_3,\delta,d)$ и $W_{1n}(A,\beta_3,\delta,d)$ определены в формулировке теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекают оценки асимптотически наилучших (а при $\delta=1$ — асимптотически правильных) констант в неравномерных оценках скорости сходимости в ЦПТ для гладких распределений, не зависящие от A.

Следствие 2. В условиях (1), (2) и (5) для любого $\delta\in(0,1]$ справедливо соотношение

$$\sup \limsup_{n\to\infty}\frac{n^{\delta/2}}{\beta_{2+\delta}}\sup_x|x|\Delta_n(x)\leqslant L(\delta)\ \left(=\frac{2^{(3-\delta)/2}\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{\pi(1+\delta)}\right),$$

где супремум берётся по всем распределениям F, удовлетворяющим условиям (1), (2) и (5).

Значения $L(\delta)$ для некоторых δ приведены в табл. 1.

Таблица 1

δ	$L(\delta)$	δ	$L(\delta)$	δ	$L(\delta)$	δ	$L(\delta)$
0.05	1.4243	0.30	0.8644	0.55	0.5730	0.80	0.4051
0.10	1.2777	0.35	0.7913	0.60	0.5322	0.85	0.3804
0.15	1.1517	0.40	0.7267	0.65	0.4954	0.90	0.3578
0.20	1.0425	0.45	0.6695	0.70	0.4623	0.95	0.3372
0.25	0.9475	0.50	0.6185	0.75	0.4323	1.00	0.3184

Поскольку $L(1)=1/\pi$, имеет место

Следствие 3. В условиях (1), (3) и (5) справедливо соотношение

$$\sup \limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\beta_3}\sup_x|x|\Delta_n(x)\leqslant\frac{1}{\pi}<0.3184,$$

$$\sup \limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\beta_3}\sup_x|x|^2\Delta_n(x)\leqslant\frac{13}{3\sqrt{2\pi}}<1.7288,$$

где супремумы берутся по всем распределениям F, удовлетворяющим условиям (1), (3) и (5).

С другой стороны, несложно убедиться, что

$$\sup_{0<\delta\leqslant 1} L(\delta) = \lim_{\delta\to 0+} L(\delta) = \frac{2^{3/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

поэтому из следствия 2 вытекает следующий довольно неожиданный факт: вне зависимости от значения $\delta \in (0,1]$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^{\delta/2}}{\beta_{2+\delta}} \sup_x |x|\Delta_n(x) \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1.5958,$$

каким бы ни было распределение F, удовлетворяющее условиям (1), (2) и (5).

Заметим, что, поскольку значения коэффициентов $L(1)$ и $13/(3\sqrt{2\pi}\,)$ при ляпуновских дробях в неравномерных оценках первого и второго порядка сравнительно невелики, существует область значений аргумента x, в которой асимптотически (при больших n) оценки (13), (14) являются более точными, чем неравенство Бикялиса (4) с константой Михеля. А именно, существуют действительные числа $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \infty$ такие, что асимптотически (при $n \to \infty$) минимум из оценок (13), (14), (4) достигается на

$$\min\big\{(4),(13),(14)\big\} = \begin{cases} (4), & \text{при } |x| \leqslant x_0,\\ (13), & \text{при } x_0 < |x| \leqslant x_1,\\ (14), & \text{при } x_1 < |x| \leqslant x_2,\\ (4), & \text{при } |x| > x_2.\end{cases}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$x_0 = 0.01\ldots, \quad x_1 = 5.43\ldots, \quad x_2 = 17.66\ldots$$

3. Доказательство основных результатов

Лемма 1. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $G(x)$ и характеристической функцией $g(t)$. Предположим, что

$$\mathsf{E}|\xi| < \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty.$$

Тогда

$$G(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{-it}\, e^{-itx}\,dt.$$

Замечание 3. Данная лемма представляет собой незначительную переформулировку замечания к лемме 12.2 из книги Р. Н. Бхаттачария и Р. Ранга Рао [2, с. 114]. Справедливости ради, стоит заметить, что в указанной книге лемма 12.2 доказана не только для вероятностных, но и произвольных конечных мер, удовлетворяющих соответствующим условиям «гладкости», но замечание к лемме 12.2 приведено без доказательства. Ниже мы приводим полное доказательство этого утверждения для вероятностных мер.

Доказательство леммы 1. Поскольку характеристическая функция $g(t)$ абсолютно интегрируема, по формуле обращения преобразования Фурье обобщённая плотность функции ограниченной вариации $(G-\Phi)(x) \equiv G(x) - \Phi(x)$ выражается в виде

$$q(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\big(g(t) - e^{-t^2/2}\big)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что

$$q(x) = g'(x), \text{ где } g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}(-it)^{-1}\big(g(t) - e^{-t^2/2}\big)dt.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{x} q(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} g'(y)\,dy = g(x) - g(-\infty).$$

Покажем, что постоянная интегрирования $g(-\infty) \equiv \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ равна нулю.

Из теоремы Римана–Лебега следует, что для того, чтобы $g(x) \longrightarrow 0$ при $|x| \to \infty$, достаточно потребовать, чтобы преобразование Фурье функции $g(x)$ было абсолютно интегрируемо, то есть чтобы $t^{-1}\big(g(t) - e^{-t^2/2}\big) \in L_1$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon} \left|\frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt + \int\limits_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt,$$

достаточно доказать сходимость лишь последних двух интегралов.

Сходимость первого интеграла вытекает из ограниченности подынтегральной функции: так как для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение $|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$,

$$|t|^{-1}|g(t) - e^{-t^2/2}| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1}(e^{itx} - 1)\, d(G(x) - \Phi(x))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, d\Phi(x) < \infty.$$

Сходимость второго интеграла следует из интегрируемости характеристической функции $g(t)$ с учётом того, что значения переменной интегрирования t отделены от нуля. Поскольку

$$G(x) - \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} q(y)\, dy = g(x) - g(-\infty),$$

а постоянная интегрирования $g(-\infty)$ равняется нулю, мы получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $G(x)$ и характеристической функцией $g(t)$. Предположим, что

$$\mathsf{E}\xi = 0, \quad \mathsf{E}\xi^2 < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)| dt < \infty.$$

Тогда

$$\sup_x |x||G(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{|g(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|^2} + \frac{|(g(t) - e^{-t^2/2})'|}{|t|}\right] dt.$$

Если, кроме того, $\mathsf{E}\xi^2 = 1$ и $\mathsf{E}|\xi|^3 < \infty$, а также $g''(t)$ абсолютно интегрируема, то

$$\sup_x |x|^2|G(x) - \Phi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[2\frac{|g(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|^3} + 2\frac{|(g(t) - e^{-t^2/2})'|}{|t|^2} + \frac{|(g(t) - e^{-t^2/2})''|}{|t|}\right] dt.$$

Доказательство. Из абсолютной интегрируемости характеристической функции $g(t)$ вытекает, что случайная величина ξ имеет плотность $\rho(x)$. Более того, поскольку $g'(t)$ абсолютно интегрируема, из формулы обращения преобразования Фурье следует, что

$$2\pi(ix)\rho(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g'(t)\, dt, \quad 2\pi(ix)\phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}(e^{-t^2/2})' dt.$$

Следовательно, для почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathbb{R}$, с учётом леммы 1, мы получаем

$$\frac{d}{dx}\,[x(G(x) - \Phi(x))] = G(x) - \Phi(x) + x(\rho(x) - \phi(x)) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[(g(t) - e^{-t^2/2})' - \frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right] e^{-itx}\, dt\right] \equiv q(x).$$

Легко проверить, что $q(x) = g'(x)$, где

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[(g(t) - e^{-t^2/2})' - \frac{g(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right]\frac{e^{-itx}}{-it}\, dt\right].$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{x} q(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{x} g'(y)\, dy = g(x) - g(-\infty).$$

Покажем, что постоянная интегрирования $g(-\infty) \equiv \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ равна нулю.

Из теоремы Римана–Лебега следует, что для того, чтобы $g(x) \longrightarrow 0$ при $|x| \to \infty$, достаточно потребовать, чтобы преобразование Фурье функции $g(x)$ было абсолютно интегрируемо, то есть чтобы

$$t^{-1}(g(t)-e^{-t^2/2})' + t^{-2}(g(t)-e^{-t^2/2}) \in L_1.$$

Поскольку для любого положительного ε интеграл от модуля указанной функции не превосходит суммы

$$\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon}\left|\frac{(g(t)-e^{-t^2/2})'}{t}\right|dt + \int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon}\left|\frac{g(t)-e^{-t^2/2}}{t^2}\right|dt +$$

$$+\int\limits_{|t|>\varepsilon}\left|\frac{(g(t)-e^{-t^2/2})'}{t}\right|dt + \int\limits_{|t|>\varepsilon}\left|\frac{g(t)-e^{-t^2/2}}{t^2}\right|dt,$$

достаточно доказать сходимость лишь последних четырёх интегралов.

Сходимость первых двух вытекает из ограниченности подынтегральных функций: так как для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ выполняются соотношения $|e^{i\alpha}-1|\leqslant|\alpha|$, $|e^{i\alpha}-1-i\alpha|\leqslant|\alpha|^2/2$,

$$|t|^{-1}|(g(t)-e^{-t^2/2})'| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1}(ix)(e^{itx}-1)(\rho(x)-\phi(x))\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\rho(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\phi(x)\,dx < \infty,$$

$$|t|^{-2}|g(t)-e^{-t^2/2}| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-2}(e^{itx}-1-itx)(\rho(x)-\phi(x))\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\rho(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\phi(x)\,dx < \infty.$$

Сходимость третьего и четвёртого интегралов следует из интегрируемости характеристической функции $g(t)$ и её производной $g'(t)$ с учётом того, что значения переменной интегрирования t отделены от нуля.

Итак, мы доказали, что для всех $x\in\mathbb{R}$

$$x(G(x)-\Phi(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{g(t)-e^{-t^2/2}}{t^2} - \frac{(g(t)-e^{-t^2/2})'}{t}\right]e^{-itx}\,dt. \quad (15)$$

Переходя к модулям и замечая, что правая часть получившегося неравенства не зависит от x, получаем первое утверждение леммы.

Второе утверждение доказывается аналогично с учётом равенства

$$\frac{d}{dx}\left[x^2(G(x)-\Phi(x))\right] = 2x(G(x)-\Phi(x)) + x^2(\rho(x)-\phi(x)),$$

а также соотношения (15) и представления $x^2\rho(x)$ и $x^2\phi(x)$ через вторые производные соответствующих характеристических функций. □

Следствие 4. Пусть выполнены условия (1) и (5). Тогда для всех $n\geqslant 3$

$$\sup_x |x|\Delta_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^2} + \frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|}\right]dt.$$

Если дополнительно выполнено условие (3), то для всех $n\geqslant 4$

$$\sup_x |x|^2\Delta_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[2\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^3} + 2\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})''|}{|t|}\right]dt.$$

Доказательство. Как легко видеть,

$$f_n'(t) = \sqrt{n}\,f^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

$$f_n''(t) = (n-1)f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 + f^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)f''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Поэтому в силу справедливого для всех $t \in \mathbb{R}$ неравенства $\left|f^{(k)}(t)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|X_1\right|^k$ и неравенства Ляпунова мы имеем

$$|f_n'(t)| = \sqrt{n}\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{n-1}\left|f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \sqrt{n}\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{n-1}, \quad (16)$$

$$|f_n''(t)| = (n-1)\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{n-2} + \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{n-1} \leqslant n\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{n-2}. \quad (17)$$

Следовательно, из формулы Планшереля вытекает справедливость соотношений

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n'(t)|\,dt \leqslant n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x)\,dx \leqslant 2\pi A n < \infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n''(t)|\,dt \leqslant n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^2 dt \leqslant 2\pi A n^{3/2} < \infty.$$

Таким образом, функции $f_n'(t)$ и $f_n''(t)$ интегрируемы при каждом $n \geqslant 3$ и 4 соответственно. Теперь осталось воспользоваться леммой 2 с $\xi = X_1$, $G(x) = F_n(x)$ и $g(t) = f_n(t)$. □

Лемма 3. Пусть выполнены условия (1) и (2) с $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\left|f(t) - 1 + t^2/2\right| \leqslant \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)},$$

$$|f'(t) + t| \leqslant \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)},$$

$$|f''(t) + 1| \leqslant 2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{\delta}.$$

Доказательство. В книге М. Лоэва [4] приведено неравенство

$$\left|e^{itx} - \left(1 + itx + \ldots + \frac{(itx)^n}{n!}\right)\right| \leqslant \frac{2^{1-\delta}\Gamma(1+\delta)|tx|^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

из которого при $n = 2, 1$ и 0 соответственно вытекают соотношения

$$e^{itx} = 1 + itx + (itx)^2/2 + R_3(t,x),$$

$$|R_3(t,x)| \leqslant \frac{2^{1-\delta}|tx|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)},$$

$$(e^{itx})_t' = (ix)e^{itx} = ix + (ix)^2 t + R_2(t,x),$$

$$|R_2(t,x)| \leqslant \frac{2^{1-\delta}|x|^{2+\delta}|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)},$$

$$(e^{itx})_{tt}'' = (ix)^2 e^{itx} = (ix)^2 + R_1(t,x),$$

$$|R_1(t,x)| \leqslant 2^{1-\delta}|x|^{2+\delta}|t|^{\delta}.$$

Для характеристической функции $f(t)$ и её производных по теореме о дифференцировании под знаком интеграла имеем

$$f(t) = \mathsf{E}(1 + itX_1 + (itX_1)^2/2 + R_3(t, X_1)) = \\ = 1 - \frac{t^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_3(t,x)p(x)\,dx,$$

$$f'(t) = \mathsf{E}(e^{itX_1})_t' = \mathsf{E}(iX_1 + (iX_1)^2 t + R_2(t, X_1)) = \\ = -t + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_2(t,x)p(x)\,dx,$$

$$f''(t) = \mathsf{E}(e^{itX_1})_{tt}'' = \mathsf{E}((iX_1)^2 + R_1(t, X_1)) = \\ = -1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1(t,x)p(x)\,dx.$$

С учётом оценок для $|R_k(t,x)|$, $k = 1, 2, 3$, получаем

$$\left|f(t) - 1 + \frac{t^2}{2}\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2^{1-\delta}|tx|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}p(x)\,dx = \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}|t|^{\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)},$$

$$|f'(t) + t| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2^{1-\delta}|x|^{2+\delta}|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)}p(x)\,dx = \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)},$$

$$|f''(t) + 1| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2^{1-\delta}|x|^{2+\delta}|t|^{\delta}p(x)\,dx = 2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{\delta},$$

что и требовалось доказать. □

Следующие две леммы дают оценку для модуля разности допредельной и предельной характеристических функций, а также их производных, которые фигурируют в правых частях неравенств из леммы 2.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (1) и (2) для некоторого $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда для любого $n \geqslant 1$ и для любого $d \in (0, \sqrt{2}\,)$ при $|t| \leqslant T_n \equiv d\sqrt{n}\,/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}$ справедлива оценка

$$\left|f_n(t) - e^{-t^2/2}\right| \leqslant a(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\,|t|^{2+\delta}\exp\left\{-b(\delta,d)t^2\right\}.$$

Доказательство приведено в работе В. Ю. Королева и И. Г. Шевцовой [3].

Лемма 5. Пусть выполнены условия (1) и (2) при $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда для любого $d \in (0, \sqrt{2}\,)$ и любого $n \geqslant 1$ при $|t| \leqslant T_n \equiv d\sqrt{n}\,/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}$ справедливы оценки

$$\left|\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)'\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\left[a(\delta,d)|t|^{3+\delta}e^{-b(\delta,d)t^2} + v_1(\delta,d)|t|^{1+\delta}e^{-\widetilde{b}(\delta,d)t^2}\right],$$

$$\left|\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)''\right| \leqslant \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\Big[a(\delta,d)|t|^{2+\delta}(t^2+1)e^{-b(\delta,d)t^2} +$$
$$+ \left(v_2(\delta,d)|t|^{2+\delta} + v_3(\delta,d)|t|^{\delta}\right)e^{-\widetilde{b}(\delta,d)t^2}\Big].$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 4, представим

$$f_n(t) - e^{-t^2/2} = e^{-t^2/2}(e^{h(t)} - 1), \quad \text{где} \;\; h(t) = \frac{t^2}{2} + n\ln f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Тогда интересующие нас разности можно записать в виде

$$\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)' = \exp\{h(t) - t^2/2\}(h'(t) - t) + te^{-t^2/2},$$

$$\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)'' =$$
$$= \exp\{h(t) - t^2/2\}\left((h'(t) - t)^2 + h''(t) - 1\right) + \left(1 - t^2\right)e^{-t^2/2},$$

откуда для модулей получаем

$$\left|\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)'\right| \leqslant |\exp\{h(t)\} - 1|\,|t|e^{-t^2/2} +$$
$$+ |\exp\{h(t)\}|\,|h'(t)|\,e^{-t^2/2}, \quad (19)$$

$$\left|\left(f_n(t) - e^{-t^2/2}\right)''\right| \leqslant |\exp\{h(t)\} - 1|\left(t^2+1\right)e^{-t^2/2} +$$
$$+ |\exp\{h(t)\}|\left(\left|h'(t)\right|^2 + 2\,|t|\,|h'(t)| + |h''(t)|\right)e^{-t^2/2} \quad (20)$$

(когда идёт речь о третьих производных, мы подразумеваем, что $\delta = 1$). Итак, нам необходимо оценить $|h'(t)|$, $|h'(t)|^2$, $|h''(t)|$, $|\exp\{h(t)\}|$, $|\exp\{h(t)\} - 1|$. Оценка величины $|\exp\{h(t)\} - 1|$ мгновенно вытекает из леммы 4. Из леммы 3 и неравенства $|t|^\delta \leqslant d^\delta n^{\delta/2}/\beta_{2+\delta}$, верного для всех рассматриваемых значений t, следует, что

$$|\exp\{h(t)\}| = e^{t^2/2}\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \leqslant$$
$$\leqslant e^{t^2/2}\left|1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{(2+\delta)/2}}\right|^n \leqslant$$
$$\leqslant e^{t^2/2}\exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)n^{\delta/2}}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{2^{1-\delta}d^\delta|t|^2}{(1+\delta)(2+\delta)}\right\}.$$

Вычислим производные $h(t)$:

$$h'(t) = t + \sqrt{n}\,\frac{f'(t/\sqrt{n}\,)}{f(t/\sqrt{n}\,)},$$

$$h''(t) = 1 + \frac{f''(t/\sqrt{n}\,)}{f(t/\sqrt{n}\,)} - \left(\frac{f'(t/\sqrt{n}\,)}{f(t/\sqrt{n}\,)}\right)^2.$$

Как несложно видеть, для рассматриваемых значений t справедливо неравенство $|f(t/\sqrt{n}\,)| \geqslant 1 - d^2/2$. С учётом этого соотношения, а также леммы 3, мы имеем

$$|h'(t)| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{|f(t/\sqrt{n}\,)|}\left[\frac{|t|}{\sqrt{n}}\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right| + \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)n^{(1+\delta)/2}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{-1}\left[\frac{|t|^3}{2n} + \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)n^{\delta/2}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{d^2}{2}\right)^{-1}\left[\frac{d^{2-\delta}|t|^{1+\delta}}{2(\beta_{2+\delta})^{(2-\delta)/\delta}n^{\delta/2}} + \frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)n^{\delta/2}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{d^2}{2}\right)^{-1}\left(\frac{d^{2-\delta}}{2}+\frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\right)\frac{\beta_{2+\delta}|t|^{1+\delta}}{n^{\delta/2}} \equiv v_1(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}|t|^{1+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, для $|h'(t)|^2$ получаем

$$|h'(t)|^2 \leqslant v_1^2(\delta,d)\frac{(\beta_{2+\delta})^2|t|^{2+2\delta}}{n^{\delta}} \leqslant d^{\delta}v_1^2(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Модуль второй производной функции $h(t)$ оценивается аналогично $|h'(t)|$:

$$|h''(t)| \leqslant \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{-1}\left[\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-1\right|+\frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{\delta}}{n^{\delta/2}}\right]+$$

$$+\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^{-2}\left[\frac{|t|}{\sqrt{n}}+\frac{2^{1-\delta}\beta_{2+\delta}\,|t|^{1+\delta}}{(1+\delta)n^{(1+\delta)/2}}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(1-\frac{d^2}{2}\right)^{-1}\left(\frac{d^{2-\delta}}{2}+2^{1-\delta}\right)+d^{2-\delta}\left(1-\frac{d^2}{2}\right)^{-2}\left(1+\frac{d^{\delta}2^{1-\delta}}{1+\delta}\right)^2\right]\times$$

$$\times\frac{\beta_{2+\delta}|t|^{\delta}}{n^{\delta/2}} \equiv v_3(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}|t|^{\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Подставляя найденные мажоранты для $|h'(t)|$, $|h'(t)|^2$, $|h''(t)|$, $|\exp\{h(t)\}|$ и $|\exp\{h(t)\}-1|$ в соотношения (19) и (20), мы получаем утверждение леммы. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. На основании следствия 4 мы имеем

$$2\pi\sup_x |x|\Delta_n(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^2}+\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|}\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant I_1'+I_2'+I_3', \quad (21)$$

$$2\pi\sup_x |x|^2\Delta_n(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[2\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^3}+2\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})''|}{|t|}\right]dt \leqslant I_1''+I_2''+I_3'', \quad (22)$$

где

$$I_1' = \int\limits_{|t|\leqslant T_n}\left[\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^2}+\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|}\right]dt,$$

$$I_2' = \int\limits_{|t|>T_n}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)e^{-t^2/2}\,dt,$$

$$I_3' = \int\limits_{|t|>T_n}\left[\frac{|f_n(t)|}{|t|^2}+\frac{|f_n'(t)|}{|t|}\right]dt,$$

$$I_1'' = \int\limits_{|t|\leqslant T_n}\left[2\frac{|f_n(t)-e^{-t^2/2}|}{|t|^3}+2\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})'|}{|t|^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{|(f_n(t)-e^{-t^2/2})''|}{|t|}\right]dt,$$

$$I_2'' = \int\limits_{|t|>T_n}\left(\frac{2}{|t|^3}+\frac{3}{|t|}+|t|\right)e^{-t^2/2}\,dt,$$

$$I_3'' = \int\limits_{|t|>T_n}\left[2\frac{|f_n(t)|}{|t|^3}+2\frac{|f_n'(t)|}{|t|^2}+\frac{|f_n''(t)|}{|t|}\right]dt,$$

$$T_n = \frac{d\sqrt{n}}{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}, \quad d\in(0,\sqrt{2}\,).$$

Интегралы I_1', I_1'' оцениваются с помощью лемм 4 и 5:

$$I_1' \leqslant \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[a(\delta,d)|t|^{\delta}e^{-b(\delta,d)t^2}+a(\delta,d)|t|^{2+\delta}e^{-b(\delta,d)t^2}+\right.$$

$$\left.+v_1(\delta,d)|t|^{\delta}e^{-\widetilde{b}(\delta,d)t^2}\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\left[\frac{a(\delta,d)\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{[b(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}+\frac{a(\delta,d)\Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)}{[b(\delta,d)]^{(3+\delta)/2}}+\frac{v_1(\delta,d)\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{[\widetilde{b}(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}\right]=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}\left[\frac{a(\delta,d)}{[b(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}+\frac{(1+\delta)a(\delta,d)}{2[b(\delta,d)]^{(3+\delta)/2}}+\frac{v_1(\delta,d)}{[\widetilde{b}(\delta,d)]^{(1+\delta)/2}}\right]\equiv$$

$$\equiv K_1(\delta,d)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}},$$

$$I_1'' \leqslant \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[2(1+t^2)a(1,d)e^{-b(1,d)t^2} + 2v_1(1,d)e^{-\widetilde{b}(1,d)t^2} +$$

$$+ a(1,d)t^2(1+t^2)e^{-b(1,d)t^2} + \big(v_2(1,d)|t|^2 + v_3(1,d)\big)e^{-\widetilde{b}(1,d)t^2}\Big]dt =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\left[\frac{2a(1,d)}{[b(1,d)]^{1/2}} + \frac{a(1,d)}{[b(1,d)]^{3/2}} + \frac{2v_1(1,d)}{[\widetilde{b}(1,d)]^{1/2}} + \frac{3a(1,d)}{4[b(1,d)]^{5/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a(1,d)}{2[b(1,d)]^{3/2}} + \frac{v_2(1,d)}{2[\widetilde{b}(1,d)]^{3/2}} + \frac{v_3(1,d)}{[\widetilde{b}(1,d)]^{1/2}}\right] \equiv 2\pi K_2(d)\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

При этом область возможных значений параметра d сужается до интервала $\big(0,\ \bar{d}(\delta)\}\big)$ (для I_1'' — до интервала $(0,\ \bar{d}(1))$), определяющего область сходимости указанных выше интегралов.

Интегралы I_2' и I_2'' оцениваются непосредственно:

$$I_2' = 2\left(\frac{1}{T_n^3} + \frac{1}{T_n}\right)\int\limits_{T_n}^{\infty} |t|e^{-t^2/2}\,dt \leqslant \frac{2}{T_n}\left(\frac{1}{T_n^2} + 1\right)e^{-T_n^2/2} =$$

$$= \frac{2(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d\sqrt{n}}\left(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2 n} + 1\right)\exp\Big\{-\frac{d^2 n}{2(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\Big\} \equiv$$

$$\equiv 2\pi V_{1n}(\beta_{2+\delta}, \delta, d),$$

$$I_2'' = 2\Big(\frac{2}{T_n^4} + \frac{3}{T_n^2} + 1\Big)\int\limits_{T_n}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt = 2\Big(\frac{2}{T_n^4} + \frac{3}{T_n^2} + 1\Big)e^{-T_n^2/2} =$$

$$= 2\Big(\frac{2(\beta_{2+\delta})^{4/\delta}}{d^4 n^2} + \frac{3(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2 n} + 1\Big)\exp\Big\{-\frac{d^2 n}{2(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\Big\} \equiv$$

$$\equiv 2\pi V_{2n}(\beta_{2+\delta}, \delta, d).$$

Поскольку $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}\,))^n$, с учётом (16) и (17) имеем

$$I_3' = \int\limits_{|t|>d/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}} \left[\frac{|f(t)|^n}{|t|^2 n} + \frac{|f(t)|^{n-1}}{|t|}\right]\sqrt{n}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n}\left(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2 n} + \frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d}\right)\int\limits_{|t|>d/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}} |f(t)|^{n-1}dt,$$

$$I_3'' = \int\limits_{|t|>d/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}} \left(\frac{2|f(t)|^n}{|t|^3 n^{3/2}} + \frac{2|f(t)|^{n-1}}{|t|\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,|f(t)|^{n-2}}{|t|}\right)\sqrt{n}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2(\beta_{2+\delta})^{3/\delta}}{d^3 n} + \frac{2(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d} + \frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}n}{d}\right)\int\limits_{|t|>d/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}} |f(t)|^{n-2}dt.$$

Оценим подынтегральную функцию, воспользовавшись следствием 2.5.1 из книги Н. Г. Ушакова [12], согласно которому, если при некотором $s > 0$ существует $\mathsf{E}\,|X_1|^s \equiv \beta_s$ и $\sup\limits_x p(x) = A < \infty$, то для любого $\gamma \in (0,1)$

$$|f(t)| \leqslant 1 - \frac{(1-\gamma)^3}{3\pi^2 A^2}\,t^2, \quad \text{если } |t| \leqslant \frac{\pi\gamma^{1/s}}{2(\beta_s)^{1/s}} \equiv t_\gamma,$$

$$|f(t)| \leqslant 1 - \frac{(1-\gamma)^3\gamma^{2/s}}{12A^2(\beta_s)^{2/s}}, \quad \text{если } |t| > \frac{\pi\gamma^{1/s}}{2(\beta_s)^{1/s}}. \tag{23}$$

В нашем случае $s = 2+\delta$. Так как $\beta_{2+\delta} \geqslant 1$ и $d < \sqrt{2}$, а следовательно, $2d/\pi < 1$, то в качестве γ можно взять

$$\gamma = \left(\frac{2d}{\pi}\right)^{2+\delta}(\beta_{2+\delta})^{-2/\delta} \leqslant \left(\frac{2d}{\pi}\right)^{2+\delta} < 1.$$

При таком выборе γ граница интегрирования $d/(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}$ совпадает с t_γ, и с учётом (23) оценка для I_3' примет вид

$$I_3' \leqslant \sqrt{n}\Big(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2 n} + \frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d}\Big) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{(1-\gamma)^3\gamma^{2/(2+\delta)}}{12A^2(\beta_{2+\delta})^{2/(2+\delta)}}\right)^{n-3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi A\sqrt{n}\left(\frac{(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}{d^2 n} + \frac{(\beta_{2+\delta})^{1/\delta}}{d}\right) \times$$

$$\times\left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\Big(1 - \frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta}(\beta_{2+\delta})^{2/\delta}}\Big)^3\right]^{n-3} =$$

$$= 2\pi W_{1n}(A, \beta_{2+\delta}, \delta, d),$$

$$I_3'' \leqslant 2\pi A\left(\frac{2(\beta_3)^3}{d^3 n} + \frac{2\beta_3}{d} + \frac{\beta_3 n}{d}\right) \times \\ \times\left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2(\beta_3)^2}\left(1 - \frac{8d^3}{\pi^3(\beta_3)^2}\right)^3\right]^{n-4} = \\ = 2\pi W_{2n}(A, \beta_3, d).$$

Подставляя оценки для интегралов I_1', I_2', I_3' и I_1'', I_2'', I_3'' в (21) и (22) соответственно, получаем утверждение теоремы. □

Список литературы

1. *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Литовкий математический сборник. 1966. Т. VI, вып. 3. С. 323–346.
2. *Бхаттачария Р.Н.*, *Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением. — М.: Наука, 1982.
3. *Королев В.Ю.*, *Шевцова И.Г.* О точности нормальной аппроксимации. I // Теория вероятн. и её примен. 2005. Т. 50, вып. 3. С. 353–366.
4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972.
6. *Прохоров Ю.В.* Об одной локальной теореме // Предельные теоремы теории вероятностей. — Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963. С. 75–80.
7. *Michel R.* On the Constant in the Nonuniform Version of the Berry–Esseen Theorem // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1981. V. 55. P. 109–117.
8. *Paditz L.* Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. 1976. V. 25. P. 1169–1177.
9. *Paditz L.* Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // Wiss. Z. der TU Dresden. 1979. V. 28. P. 1197–1200.
10. *Paditz L.* On the Analitical Structure of the Constant in the Nonuniform Version of the Esseen Inequality // Statistics. 1989. V. 20. No. 3. P. 453–464.
11. *Paditz L.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen Abschätzungen. — Dissertation, Wuppertal, 1983.
12. *Ushakov N.G.* Selected Topics in Characteristic Functions. — VSP, Utrecht, 1999.

УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ БАЙЕСОВСКИХ КРИТЕРИЕВ

В.Е. Бенинг

В работе рассматривается задача проверки простой гипотезы об одномерном параметре против односторонних альтернатив по независимым одинаково распределённым случайным величинам. Для асимптотически эффективных байесовских критериев, основанных на байесовском отношении правдоподобия, получена формула для предельного отклонения функции мощности от огибающей функции мощности. Эта формула позволяет находить асимптотический дефект в смысле Ходжеса–Лемана.

1. Введение

В работе рассматривается задача проверки простой гипотезы об одномерном параметре против односторонних альтернатив по независимым одинаково распределённым случайным величинам. Для асимптотически эффективных байесовских критериев, основанных на байесовском отношении правдоподобия, получена формула для предельного отклонения функции мощности от огибающей функции мощности. Эта формула позволяет находить асимптотический дефект в смысле Ходжеса–Лемана. Метод доказательства, предложенный в [1], не требует построения асимптотических разложений и основан на свойствах отношения правдоподобия. При этом в отличии от работ [2] и [3] (главы 1 и 2) исследование байесовского отношения правдоподобия основано не на свойствах отношения правдоподобия, рассматриваемого как случайный процесс, а на локальной технике, развитой в работе [4]. Это позволяет ослабить необходимые условия регулярности (см. [2, 3, 7]). С целью демонстрации этой техники в работе рассматривается простейший одномерный случай и случай фиксированного равномерного априорного распределения. Конечномерный случай при наличии мешающих параметров на эвристическом уровне рассмотрен в [5]. Здесь приведена лишь схема доказательства, подробные доказательства будут даны