С. В. Пухов, Неравенства между колмогоровскими и бернштейновскими поперечниками в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 1979, том 25, выпуск 4, 619–628

https://www.mathnet.ru/mzm10037

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ КОЛМОГОРОВСКИМИ И БЕРНШТЕЙНОВСКИМИ ПОПЕРЕЧНИКАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. Пухов

1. Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbf{R}$ с единичным шаром $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$; через L_m обозначаем подпространство в X размерности m. Для множества $M \subset X$ величины

$$d_n(M, X) = \inf_{(L_n, x)} \{d \geqslant 0 \mid M \subset x + dB + L_n\}, \quad n \geqslant 0, \quad (1)$$

$$b_n(M, X) = \sup_{(L_{n+1}, x)} \{b \geqslant 0 \mid M \supset x + bB \cap L_{n+1}\}, \quad n \geqslant 0, \quad (2)$$

называют n-поперечниками по Колмогорову и Бернштейну соответственно (см. [1, стр. 15, 17]).

В частности, если X — N-мерное пространство, а M — выпуклый компакт в X, то $d_0(M, X)$ — это радиус описанного около M шара, $2b_0(M, X)$ — диаметр множества M, $b_{N-1}(M, X)$ — радиус вписанного в M шара, а $d_{N-1}(M, X)$ — половина ширины множества M.

Соотношения между величинами (1) и (2) давно интересуют геометров. Например, если $X = \mathbf{R}^N$ — N-мерное евклидово пространство, то широко известны неравенства, имеющие место для любого выпуклого тела $M \subset X$

$$1 \leqslant d_0(M, X)/b_0(M, X) \leqslant \sqrt{2N/(N+1)}, \quad (3)$$

$$1 \leqslant \frac{d_{N-1}(M, X)}{b_{N-1}(M, X)} \leqslant \begin{cases} (N+1)/\sqrt{N+2} & N \text{ — четное}, \\ \sqrt{N}, & N \text{ — нечетное}. \end{cases} \quad (4)$$

Неравенство $b_n(M, X) \leqslant d_n(M, X)$, где X — произвольное банахово пространство, а M — алгебраическая сумма компакта и конечномерного подпространства, принадлежит В. М. Тихомирову (см., например, [1, стр. 220]). Правое неравенство в (3) называется неравенством Юнга (см. [2, стр. 28]), правое неравенство в (4) — неравенством Бляшке (см. [2, стр. 84]).

Все неравенства в (3) и (4) являются точными: левая часть достигается для шара, а правая — для правильного N-мерного симплекса.

2. Пусть X — произвольное банахово пространство. Обозначим через $\mathscr{M}_X$ совокупность всех ограниченных выпуклых множеств в X, а через $\widetilde{\mathscr{M}}_X$ — тех множеств из $\mathscr{M}X$, которые к тому же центрально-симметричны.

Следуя В. М. Тихомирову, определим для X следующие характеристики:

$$T_n(X) = \sup\left\{\frac{d_n(M, X)}{b_n(M, X)} \,\middle|\, M \in \mathscr{M}_X,\ b_n(M, X) \neq 0\right\},$$

$$\widetilde{T}_n(X) = \sup\left\{\frac{d_n(M, X)}{b_n(M, X)} \,\middle|\, M \in \widetilde{\mathscr{M}}_X,\ b_n(M, X) \neq 0\right\}.$$

Очевидно, что $T_n(X) \geqslant \widetilde{T}_n(X)$. Используя лемму 7 из работы [3] и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1 настоящей заметки, легко получить, что $T_n(X) \leqslant (n+1)(n+2)$. Поэтому $T_n(X)$ и $\widetilde{T}_n(X)$ конечны при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ясно, что $T_n(X)$ и $\widetilde{T}_n(X)$ суть наилучшие постоянные в неравенствах вида

$$d_n(M, X) \leqslant c_n b_n(M, X),\ M \in \mathscr{M}_X\ (M \in \widetilde{\mathscr{M}}_X).$$

Автору не известно ни одного точного значения величин $T_n(X)$ и $\widetilde{T}_n(X)$, кроме случаев, перечисленных в (3) и (4), т. е. при $X = \mathbf{R}^n$ и $n = 0, N-1$ (легко понять, что $\widetilde{T}_0(\mathbf{R}^N) = \widetilde{T}_{N-1}(\mathbf{R}^N) = 1$, однако для $n, 1 \leqslant n \leqslant N-2$, уже $\widetilde{T}^n(\mathbf{R}^N) > 1$). Интересно знать хотя бы $T_1(\mathbf{R}^3)$ и $\widetilde{T}_1(\mathbf{R}^3)$; по-видимому, это самый простой случай.

В этой заметке доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть X — гильбертово пространство, тогда*

а) $$n + 1 \leqslant T_n(X) \leqslant n + 2, \tag{5}$$

б) $$\sqrt{n+1} \leqslant \widetilde{T}_n(X) < \sqrt{e}\sqrt{n+1}, \tag{6}$$

где e — основание натуральных логарифмов.

З а м е ч а н и е. В работе [3] было получено неравенство $\widetilde{T}_n(X) \leqslant n+1$ и выдвигалась гипотеза о том, что $\widetilde{T}_n(X) = \sqrt{n+1}$. Эта гипотеза нашла у нас частичное подтверждение в (6).

Из доказательства леммы 2 вытекают следующие неравенства для бернштейновского поперечника правильного N-мерного симплекса σ^N с ребром $\sqrt{2}$:

$$((n+1)(n+2))^{-1/2} \leqslant b_n(\sigma^N, X) \leqslant \leqslant (1/(n+1))\sqrt{N/(N+1)}.$$

Правдоподобно, что

$$b_n(\sigma^N, X) = b_n(\sigma^{n+1}, X) = ((n+1)(n+2))^{-1/2}.$$

Это делает вероятной гипотезу о том, что

$$T_n(X) = ((n+1)(n+2))^{1/2}.$$

3. Несколько слов об обозначениях. Для множества $M \subset X$ обозначим, соответственно, через $\operatorname{lin} M$, $\operatorname{aff} M$, $\operatorname{conv} M$ линейную, аффинную, выпуклую оболочки множества M, т. е., соответственно, пересечение всех линейных подпространств, линейных многообразий, выпуклых множеств в X, содержащих M; в аффинной оболочке $\operatorname{aff} M$, если ее рассматривать как топологическое пространство с топологией, наследуемой из X, можно определить внутренность множества M, это множество называют относительной внутренностью множества M и пишут $\operatorname{ri} M$. Через $r(x, M)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества M, $x \in M$.

Прежде чем доказывать теорему, напомним, что в гильбертовом пространстве X на классе

$$\mathscr{M}_X^m = \{M \in \mathscr{M}_X, \dim \operatorname{aff} M \leqslant m\}$$

можно однозначным способом определить положительно однородную инвариантную относительно движений функцию $V_m(\cdot)$, нормированную условием $V_m(B \cap L_m) = 1$, где L_m — произвольное m-мерное подпространство в X. Эта функция называется m-объемом.

4. Доказательство пункта а) теоремы. О ц е н к а д л я $T_n(X)$ с в е р х у.

ЛЕММА 1. *Для* $M \in \mathscr{M}_X$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *выполнено неравенство*

$$d_n(M, X) \leqslant (n+2) b_n(M, X).$$

Доказательство. Фиксируем n. Поскольку M ограничено, то

$$V(M) = \sup \{V_{n+1}(\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}) \mid x_1, \ldots \\ \ldots, x_{n+2} \in M\} < \infty. \quad (7)$$

Естественно считать, что M содержит не менее чем $n+2$ аффинно независимых точек, так как в противном случае $d_n(M, X) = b_n(M, X) = 0$; поэтому $V(M) > 0$.

Выберем точки $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+2}$ из M так, чтобы для фиксированного ε, $0 < \varepsilon < 1$, выполнялось неравенство

$$V_{n+1}(\operatorname{conv}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+2}\}) > (1-\varepsilon)V(M).$$

Пусть d — наименьшая высота симплекса $\operatorname{conv}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+2}\}$, $n \geqslant 1$, при $n = 0$ $d = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$. Можно считать, что $d = r(\bar{x}_{n+2}, \operatorname{aff}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}\})$.

Покажем, что для любого x из M

$$r(x, \operatorname{aff}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}\}) \leqslant d/(1-\varepsilon)$$

и, значит, $d_n(M, X) \leqslant d/(1-\varepsilon)$.

Действительно, если это не так для некоторого $\bar{x}$ из M, то из-за выпуклости M симплекс $\operatorname{conv}\{\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}\}$ лежит в M, а его $(n+1)$-объем строго больше $V(M)$, что противоречит выбору величины $V(M)$, см. (7).

Далее, так как d — наименьшая высота симплекса $\operatorname{conv}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+2}\}$, $n \geqslant 1$ (при $n = 0$ $d = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$), то для b — радиуса вписанного в этот симплекс $(n+1)$-мерного шара — имеет место неравенство

$$d/(n+2) = \\ = r((\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_{n+2})/(n+2), \operatorname{aff}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}\}) \leqslant b.$$

При $n = 0$ последнее неравенство обращается в равенство. Итак, для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1$, имеем цепочку неравенств

$$d_n(M, X) \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon} = \frac{n+2}{1-\varepsilon} \cdot \frac{d}{n+2} \leqslant \frac{n+2}{1-\varepsilon} b \leqslant \frac{n+2}{1-\varepsilon} b_n(M, X),$$

в результате чего лемма 1 доказана.

Следствием этой леммы является оценка сверху: $T_n(X) \leqslant n+2$.

Оценка для $T_n(X)$ снизу. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_1, e_2, \ldots$, через $(\cdot \mid \cdot)$ обозначим скалярное произведение в X.

Примем следующую реализацию правильного N-мерного симплекса σ^N с ребром $\sqrt{2}$:

$$\sigma^N = \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_{N+1}\}.$$

ЛЕММА 2. *При* $0 \leqslant n \leqslant N-1$

$$b_n(\sigma^N, X) \leqslant (1/(n+1))\sqrt{N/(N+1)}.$$

Основная идея доказательства этой леммы принадлежит В. М. Тихомирову.

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}^{N+1} = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_{N+1}\}$, тогда

$$b_n(\sigma^N, X) = b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1}).$$

Предположим, что выполнено включение

$$\sigma^N \supset x + bB \cap L_{n+1}, \tag{8}$$

где L_{n+1} — $(n+1)$-мерное подпространство в $\mathbf{R}^{N+1}$, параллельное $\operatorname{aff}\sigma^N$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$; b-число, $b > 0$.

Обозначим через $\Gamma_i = \{x \in \sigma^N \mid (x \mid e_i) = 0\}$ i-ю $(N-1)$-мерную грань симплекса σ^N, а через

$$S_i(L_{n+1}, b) = \operatorname{aff}\Gamma_i + bB \cap L_{n+1}$$

— соответствующий «слой», т. е. часть $\operatorname{aff}\sigma^N$, лежащую между двумя параллельными $(N-1)$-мерными линейными многообразиями, и пусть s_i — ширина этого «слоя», т. е. расстояние между упомянутыми параллельными многообразиями.

Легко подсчитать, что

$$s_i(L_{n+1}, b) = 2b\sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{n+1}(g_i \mid f_j)^2},$$

здесь g_i — единичная внутренняя нормаль к Γ_i, лежащая в $\operatorname{aff}\sigma^N$ (точное выражение для g_i приводится далее), а $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ — ортонормированный базис в L_{n+1}.

Очевидно, что включение (8) выполнено тогда и только тогда, когда при всех i, $1 \leqslant i \leqslant N+1$,

$$r(x, \Gamma_i) \geqslant (1/2)s_i(L_{n+1}, b).$$

Далее, хорошо известно, что сумма расстояний от точки правильного симплекса до его граней равна высоте симплекса

$$\sum_{i=1}^{N+1} r(x,\ \Gamma_i) = h_N,$$

где h_N — высота симплекса σ^N, равная $\sqrt{1+1/N}$, и наоборот, если сумма неотрицательных чисел $r_1,\ \ldots,\ r_{N+1}$ равна h_N, то существует точка x симплекса σ^N такая, что $r(x,\ \Gamma_i) = r_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N+1$. Поэтому следующие предложения эквивалентны:

а) существует $x,\ x \in \sigma^N$, такое, что при всех $i,\ 1 \leqslant i \leqslant N+1$,

$$r(x,\ \Gamma_i) \geqslant (1/2)s_i(L_{n+1},\ b),$$

б) $$\sum_{i=1}^{N+1} (1/2)\, s_i(L_{n+1},\ b) = b\sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2} \leqslant h_N. \tag{9}$$

Итак, мы получили, что при некотором x включение (8) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (9).

Подводя итог сказанному, видим, что $b_n(\sigma^N,\ \mathbf{R}^{N+1})$ — это значение следующей экстремальной задачи — максимизировать b при следующих ограничениях на b и систему векторов $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ из $\mathbf{R}^{N+1}$: выполнено неравенство (9) и система $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ ортонормирована и ее линейная оболочка параллельна aff σ^N.

Эту экстремальную задачу можно заменить такой эквивалентной задачей:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2} \to \inf \tag{10}$$

при ограничениях

а) $$(f_k \mid f_j) = \delta_{kj},\ 1 \leqslant k,\ j \leqslant n+1; \tag{10а}$$

δ_{kj} — символ Кронекера,

б) $$\operatorname{lin}\{f_1,\ \ldots,\ f_{n+1}\} \text{ параллельна aff } \sigma^N. \tag{10б}$$

Из (9), (10), (10а), (10б) вытекает, что $b_n(\sigma^N,\ \mathbf{R}^{N+1}) = h_N/\zeta_N$, где ζ_N — значение задачи (10), (10а), (10б).

Для ζ_N мы можем указать следующую оценку. Поскольку для $i = 1,\ \ldots,\ N+1$ выполнено неравенство Бесселя

$$1 = (g_i \mid g_i) \geqslant \sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2,$$

а для α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, имеем, что $\sqrt{\alpha} \geqslant \alpha$, то

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2} \geqslant \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2.$$

Теперь выразим g_i, $1 \leqslant i \leqslant N+1$, через $e_1, \ldots, e_{N+1}$ (например, $g_1 = \sqrt{N/(N+1)}(e_1 - (1/N)(e_2 + \ldots + e_{N+1}))$ и используем условие (10б), из которого, в частности, следует, что при всех j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, $(e_1 + \ldots + e_{N+1} \mid f_j) = 0$, в результате будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (g_i \mid f_j)^2 = ((N+1)/N) \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (e_i \mid f_j)^2 =$$
$$= ((N+1)/N) \sum_{j=1}^{n+1} (f_j \mid f_j) = ((N+1)/N)(n+1),$$

оэтому справедливо неравенство

$$\zeta_N \geqslant ((N+1)/N)(n+1).$$

Окончательно

$$b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1}) = h_N/\zeta_N \leqslant (1/(n+1))\sqrt{N/(N+1)}.$$

Лемма 2 доказана.

Если обозначим через $\mathcal{O}^N = \operatorname{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_N\}$ правильный N-мерный октаэдр, то при $\varkappa > 1$ имеем следующую оценку:

$$d_n(\sigma^{[\varkappa n]}, X) \geqslant d_{n+1}(\mathcal{O}^{[\varkappa n]+1}, X) = d_{n+1}(\mathcal{O}^{[\varkappa n]+1}, \mathbf{R}^{[\varkappa n]+1}) =$$
$$= \sqrt{1 - (n+1)/([\varkappa n]+1)},$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Здесь мы воспользовались теоремой В. М. Тихомирова (см. [4]) о неизменности n-поперечника по Колмогорову при расширении гильбертова пространства и формулой С. Б. Стечкина (см. [5] или [1, стр. 237]):

$$d_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = \sqrt{1 - n/N}.$$

Тогда

$$T_n(X) \geqslant \frac{d_n(\sigma^{[\varkappa n]}, X)}{b_n(\sigma^{[\varkappa n]}, X)} > (n+1)\sqrt{1 - \frac{n+1}{[\varkappa n]+1}},$$

и так как последнее выполнено при всех $\varkappa \geqslant 1 + 1/n$, $n \geqslant 1$, то $T_n(X) \geqslant n+1$, $n \geqslant 1$. Неравенство $T_0(X) \geqslant 1$ очевидно: для любого множества $M \subset X$ $d_0(M, X) \geqslant b_0(M, X)$, т. е. диаметр описанного около M шара не меньше диаметра множества M. Пункт а) теоремы доказан.

5. Доказательство пункта б) теоремы. Оценка для $\widetilde{T}_n(X)$ сверху.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — набор линейно независимых векторов из X. Множество

$$Э(x_1, \ldots, x_m) = \left\{x = \sum_{i=1}^m \xi_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \leqslant 1\right\}$$

назовем m-мерным эллипсоидом.

ЛЕММА 3. *Если $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — набор линейно независимых векторов из X, а $x \in X$ такой, что*

$$r(x, L_n) \geqslant r(x_{n+1}, L_n),$$

где $L_n = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, тогда во множество

$$\operatorname{conv}\{\pm(1 + 1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}\,x,\ Э(x_1, \ldots, x_n)\}$$

можно поместить $(n + 1)$-мерный эллипсоид с $(n + 1)$-объемом не меньшим, чем $V_{n+1}(Э(x_1, \ldots, x_{n+1}))$.

Доказательство. Действительно, имеет место включение

$$\operatorname{conv}\{\pm(1 + 1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}\,x_{n+1},\ Э(x_1, \ldots, x_n)\} \supset$$
$$\supset (1 + 1/n)^{-1/2}Э(x_1, \ldots, x_n, (1 + 1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1}).$$

Оно проверяется несложным прямым подсчетом, когда $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — ортонормированный набор. Общий случай сводится к этому с помощью любого линейного отображения $\lambda\colon X \to X$, которое переводит ортонормированный набор $x_1', \ldots, x_{n+1}'$ в $x_1, \ldots, x_{n+1}$: $\lambda x_i' = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

Далее, для любого линейного отображения $\lambda\colon X \to X$ такого, что λ действует на элементы подпространства L_n тождественно и $\lambda x_{n+1} = x$, имеем

$$\operatorname{conv}\{\pm(1 + 1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}\,x,\ Э(x_1, \ldots, x_n)\} =$$
$$= \lambda \operatorname{conv}\{\pm(1 + 1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}\,x_{n+1},\ Э(x_1, \ldots, x_n)\},$$

$$Э(x_1, \ldots, x_n, (1 + 1/n)^{(n+1)/2}x) =$$
$$= \lambda Э(x_1, \ldots, x_n, (1 + 1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1}),$$

$$V_{n+1}(Э(x_1, \ldots, x_n, (1 + 1/n)^{(n+1)/2}x)) \geqslant$$
$$\geqslant V_{n+1}(Э(x_1, \ldots, x_n, (1 + 1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1})).$$

Отсюда получаем утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. *Для* $M \in \widetilde{\mathscr{M}}_X$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *выполнено неравенство*

$$d_n(M, X) \leqslant \sqrt{e}\sqrt{n+1}\, b_n(M, X),$$

где e *— основание натуральных логарифмов.*

Доказательство. Можно считать, что центр симметрии множества M является нулем пространства X, и тогда в определениях (1) и (2) n-поперечников вектор x можно считать равным нулю.

Случай $n = 0$ тривиален, так как $d_0(M, X)$ — радиус описанного около M шара, а $b_0(M, X)$ — половина диаметра множества M. Но в силу центральной симметрии диаметр множества M равен диаметру описанного шара.

Пусть целое $n \geqslant 1$. Естественно считать, что множество M содержит не менее чем $n+1$ линейно независимых векторов, так как в противном случае $d_n(M, X) = b_n(M, X) = 0$.

Поскольку M ограничено, то

$$V(M) = \sup\{V_{n+1}(\mathcal{Э}_{n+1}) \mid \mathcal{Э}_{n+1} \subset M\} < \infty, \tag{11}$$

где $\mathcal{Э}_{n+1}$ — произвольный $(n+1)$-мерный эллипсоид.

Фиксируем ε, $0 < \varepsilon < 1$, выберем $\mathcal{Э}_{n+1} \subset M$ так, что

$$V_{n+1}(\mathcal{Э}_{n+1}) > (1-\varepsilon)V(M).$$

Для некоторого набора $x_1, \ldots, x_{n+1}$ попарно ортогональных векторов имеем

$$\mathcal{Э}_{n+1} = \mathcal{Э}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Пусть $\|x_{n+1}\| \leqslant \|x_i\|$, $1 \leqslant i \leqslant n$, значит,

$$b_n(M, X) \geqslant \|x_{n+1}\|. \tag{12}$$

Тогда для любого $x \in M$

$$r(x, L_n) \leqslant (1 + 1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}\,(\|x_{n+1}\|/(1-\varepsilon)), \tag{13}$$

где $L_n = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Действительно, в противном случае множество

$$\operatorname{conv}\{\pm x, \mathcal{Э}(x_1, \ldots, x_n)\}$$

по лемме 3 содержит $(n+1)$-мерный эллипсоид $(n+1)$-объема $(1/(1-\varepsilon))V_{n+1}(\mathcal{Э}_{n+1})$, что строго больше $V(M)$, а это противоречит определению постоянной $V(M)$, см. (11).

Из неравенств (12) и (13) получаем, что при любом ε, $0 < \varepsilon < 1$, справедливо неравенство

$$d_n(M, X) \leqslant (1 + 1/n)^{n/2} \sqrt{n+1} \, (1/(1-\varepsilon)) b_n(M, X),$$

которое доказывает лемму 4, так как для $n = 1, 2, \ldots$

$$(1 + 1/n)^n < e.$$

Следствием этой леммы является оценка для $\widetilde{T}_n(X)$ сверху: $\widetilde{T}_n(X) < \sqrt{e}\sqrt{n+1}$.

Оценка для $\widetilde{T}_n(X)$ снизу. Как и выше, пусть $e_1, \ldots, e_N$ — ортонормированный базис в N-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^N$, пусть также $\mathcal{O}^N = \operatorname{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_N\}$ — N-мерный правильный октаэдр в $\mathbf{R}^N$. По формуле С. Б. Стечкина (см. [5] или [1, стр. 237]) при $0 \leqslant n \leqslant N$

$$d_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = \sqrt{1 - n/N},$$

а в работе [6] доказано, что

$$b_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = 1/\sqrt{n+1}.$$

Отсюда имеем оценку для $\widetilde{T}_n(X)$ снизу: $\widetilde{T}_n(X) \geqslant \sqrt{n+1}$. Пункт б) теоремы доказан.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя В. М. Тихомирова за полезные обсуждения задачи и постоянное внимание.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 13.IV.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., Изд-во МГУ, 1976.

[2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли, М., «Мир», 1968.

[3] Митягин Б. С., Хенкин Г. М., Неравенства между n-поперечниками, Тр. семинара по функциональному анализу, **7**, Воронеж, 1963, 97—103.

[4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, Докл. АН СССР, **160**, № 4 (1965), 774—777.

[5] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении заданных классов любыми полиномами, Успехи матем. наук, 9, № 1 (1954), 133—134.

[6] Стесин М. И., О поперечниках по Александрову конечномерных октаэдров, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., № 3 (1973), 30—35.