A. M. Kytmanov, M. Sh. Yakimenko, On a 0Phicriterion for the existence of a Phiholomorphic continuation of functions into C^2,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1994, Number 8, 39–45

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 8 (387)

УДК 517.554

А.М. КЫТМАНОВ, М.Ш. ЯКИМЕНКО

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{C}^2$ [1)]

§ 1. Постановка задачи

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с границей bD класса C^∞, а вещественнозначная функция $\rho\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ и является определяющей для области D, т.е. $D=\{z\colon \rho(z)<0\}$, $d\rho\neq 0$ на bD. Определим класс функций $G(D)$ следующим образом: функция $f\in G(D)$, если f гармонична в D и имеет конечный порядок роста вблизи bD, т.е. для любой $f\in G(D)$ найдутся такие константы $C>0$ и $m>0$, что

$$|f(z)| \leqslant C[\operatorname{dist}(z,bD)]^{-m}, \quad z\in D.$$

Как известно (см. [1], а также [2], §11), каждая функция $f\in G(D)$ определяет некоторое распределение (обозначим его снова через f) из $\varepsilon'(bD)$ следующим образом:

$$\langle f,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{bD} f(z-\varepsilon\nu(z))\varphi(z)d\sigma = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{bD_\varepsilon} f(z)\psi(z)d\sigma_\varepsilon, \tag{1.1}$$

где $\varphi\in C^\infty(bD)$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $D_\varepsilon=\{z\colon \rho(z)<-\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, а $d\sigma$ и $d\sigma_\varepsilon$ суть поверхностные меры Лебега на bD и bD_ε соответственно, $\nu(z)$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности bD в точке $z\in bD$. Более того, для каждого распределения f из $\varepsilon'(bD)$ найдется функция из $G(D)$ со свойством (1.1) (см.также [1]; [2], §11).

Рассмотрим следующую задачу. Дано векторное поле $w=w(z)=\sum\limits_{k=1}^{n} w_k(z)\dfrac{\partial}{\partial z_k}$, $w_k\in C^\infty(bD)$, такое, что

$$w(\rho) = \sum_{k=1}^{n} w_k\frac{\partial\rho}{\partial z_k} \neq 0 \quad \text{на } bD, \tag{1.2}$$

т.е. w не лежит в комплексном касательном к bD пространстве $T_z^{\mathbb{C}}(bD)$ для любой точки $z\in bD$. Покажем, что f будет голоморфной в D, если $f\in G(D)$ и

$$\overline{w}(f) = \sum_{k=1}^{n}\overline{w}_k\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_k} = 0 \quad \text{на } bD. \tag{1.3}$$

Здесь равенство (1.3) понимается в слабом смысле, т.е. в смысле формулы (1.1), т.к. $f\in G(D)$, $\dfrac{\partial\rho}{\partial z_k}\in G(D)$ и, следовательно, определяются некоторые распределения на bD.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-011-258).

Данная задача поставлена в ([2], § 23), там же содержится ее решение для отдельных частных случаев. Если $w=\overline{\operatorname{grad}}\,\rho = \sum \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial z_k}$, то (1.3) превращается в однородную $\bar{\partial}$-задачу Неймана, рассмотренную в ([2], гл. 4). Здесь мы приводим ее решение для областей из $\mathbb{C}^2$.

§ 2. Основной результат

Пусть D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}^2$, т.е. диффеоморфная шару, с C^∞-гладкой границей и определяющей функцией ρ. На границе области D зададим C^∞-гладкое векторное поле $w=w(\zeta)$ с условием (1.2).

Разложим вектор w на нормальную и касательную составляющие к поверхности bD в точке ζ

$$w(\zeta) = \overline{\operatorname{grad}}\,\rho(\zeta) + \bar{\alpha}(\zeta)\bar{\tau}(\zeta),$$

где $\alpha(\zeta)$ – некоторая гладкая функция, а вектор $\tau(\zeta)$ ортогонален вектору $\operatorname{grad}\rho(\zeta)$, т.е. лежит в $T_z^{\mathbb{C}}(bD)$. Тогда условие (1.2) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}(\zeta)\frac{\partial\rho}{\partial z_k}(\zeta) = \alpha(\zeta)\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}(\zeta)\tau_k(\zeta), \quad \zeta\in bD. \tag{2.1}$$

В качестве вектора $\bar{\tau}$ в плоскости $\overline{T}^{\mathbb{C}}_{\partial D}$ возьмем вектор

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}.$$

Тогда условие (2.1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_k} = \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_2} - \frac{\partial f}{\partial\bar{z}_2}\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1}\right), \quad \zeta\in bD. \tag{2.2}$$

Умножим (2.2) на $d\sigma$ и, учитывая равенства

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_k}d\sigma = C(-1)^{k-1}dz[k]\wedge d\bar{z}\big|_{bD},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_k}d\sigma = C(-1)^{n-k+1}d\bar{z}[k]\wedge dz\big|_{bD},$$

$$*\bar{\partial}f = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}dz[k]\wedge d\bar{z},$$

где $*$ – оператор Ходжа для евклидовой метрики в $\mathbb{C}^2$, получим

$$*\bar{\partial}f = adf\wedge dz \quad \text{на } bD. \tag{2.3}$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть для гармонической функции $f\in G(D)$ верно* (2.3), $a_1(\zeta)+ka_2(\zeta)\neq 0$ *для некоторого числа k и для любого $\zeta\in bD$, тогда f голоморфна в D.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим (2.3) на некоторую гармоническую в D функцию h из $C^\infty(\overline{D})$ и проинтегрируем по bD ($h(\zeta)\neq 0$ для $\zeta\in bD$)

$$\int_{bD}h(*\bar{\partial}f) - \int_{bD}ahdf\wedge dz = 0. \tag{2.4}$$

Применим формулу Стокса для обоих интегралов и, учитывая гармоничность функций f и h в D, из (2.4) получим

$$\int_{bD}f(*\partial h - d(ha)\wedge dz) = 0. \tag{2.5}$$

По теореме Гартогса–Бохнера (см., напр., [3], а также [2], §7) функция f голоморфна в D тогда и только тогда, когда

$$\int_{bD} f d\psi \wedge dz = 0 \tag{2.6}$$

для любого $\psi \in C^\infty(bD)$.

Если для любого $\psi \in C^\infty(\overline{D})$ разрешимо уравнение

$$*\partial h - d(ha) \wedge dz = d\psi \wedge dz, \quad z \in bD, \tag{2.7}$$

для некоторой функции h, то (2.6) выполняется и теорема доказана.

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы функции a и ψ, заданные исходно на границе области D, доопределить в D так, чтобы уравнение (2.7) имело решение для функции $a \in C^\infty(bD)$ и любых $\psi \in C^\infty(bD)$.

Заметим, если уравнение (2.7) имеет решение, оно гармонично на bD: необходимо применить к (2.7) оператор d, получим $d*\partial h = 0$ $(*(d*\partial h) = *\overline{\partial}*\partial h = \Delta h)$, а следовательно, функция h гармонична.

Итак, рассмотрим уравнение (2.7)

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} \frac{\partial h}{\partial z_k} d\overline{z}[k] \wedge dz - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial (ha)}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}[k] \wedge dz = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}[k] \wedge dz, \quad z \in bD, \tag{2.8}$$

которое эквивалентно системе

$$\frac{\partial h}{\partial z_1} - \frac{\partial (ha)}{\partial \overline{z}_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_2}, \qquad \frac{\partial h}{\partial z_2} + \frac{\partial (ha)}{\partial \overline{z}_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_1}, \quad z \in bD. \tag{2.9}$$

Будем искать действительнозначное решение системы (2.9), т.е. имеем дополнительное условие

$$\overline{h} = h, \quad \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_k}\right)} = \frac{\partial h}{\partial z_k}, \tag{2.10}$$

и из (2.9) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial z_1} - a\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = h\dfrac{\partial a}{\partial \overline{z}_2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_2}, \\[2ex] \overline{a}\dfrac{\partial h}{\partial z_1} + \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = -h\dfrac{\partial \overline{a}}{\partial z_1} + \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial z_1}, \quad z \in bD. \end{cases}$$

Отсюда выразим $\dfrac{\partial h}{\partial z_1}, \dfrac{\partial h}{\partial z_2}, \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_1}, \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}$ в форме системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial z_1} = A_1 h + B_1, \qquad \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_1} = \overline{A}_1 h + \overline{B}_1, \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial z_2} = A_2 h + B_2, \qquad \dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = \overline{A}_2 h + \overline{B}_2, \quad z \in bD, \end{cases} \tag{2.11}$$

в обозначениях

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1+a\overline{a}}\left(\frac{\partial a}{\partial \overline{z}_2} - \frac{\partial \overline{a}}{\partial z_1}\right), \quad B_1 = \frac{1}{1+a\overline{a}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_2} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z_1}\right), \\ A_2 &= \frac{1}{1+a\overline{a}}\left(-\frac{\partial a}{\partial \overline{z}_1} - \overline{a}\frac{\partial a}{\partial z_2}\right), \quad B_2 = \frac{1}{1+a\overline{a}}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_1} - a\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z_2}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Однородная система, полученная из (2.11) отбрасыванием свободных членов, имеет решение, если существует решение системы ($e^g=h$):

$$\frac{\partial g}{\partial z_1} = A_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar z_1} = \bar A_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial z_2} = A_2, \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar z_2} = \bar A_2. \tag{2.13}$$

Покажем, что для (2.13) существует решение g, если найдется такое продолжение функций $A_1(\zeta)$ и $A_2(\zeta)$ в D, что

$$\frac{\partial A_1}{\partial \bar z_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \bar z_2} + \frac{\partial \bar A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \bar A_2}{\partial z_2} = 0 \tag{2.14}$$

верно для каждого $z\in\bar D$.

Действительно, для дифференциальной формы

$$\varphi = A_1{*}dz_1 + A_2{*}dz_2 + \bar A_1{*}d\bar z_1 + \bar A_2{*}d\bar z_2, \quad z\in D,$$

условие (2.14) означает, что $d\varphi=0$ в $\bar D$. Тогда по лемме Пуанкаре существует такая форма φ_1, что $\varphi=d\varphi_1$ в $\bar D$. Найдем форму χ, для которой

$$\chi = \varphi_1, \quad z\in bD; \quad d{*}d\chi = 0, \quad \zeta\in D. \tag{2.15}$$

Задача Дирихле (2.15) для формы χ разрешима по теореме Спенсера–Даффа [4] на классе C^∞. Тогда из (2.15) следует, что $dg\big|_{bD} = {*}d\chi\big|_{bD}$, а $d{*}d\chi=0$ в $\bar D$.

Таким образом, по лемме Пуанкаре система (2.13) имеет решение, если верно (2.14).

Обозначим через $h_0=e^g$ решение однородной системы, тогда решение системы (2.11) будет иметь вид $h_0\beta$, где β – действительнозначная функция, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} h_0\dfrac{\partial\beta}{\partial z_1} = B_1, & h_0\dfrac{\partial\beta}{\partial \bar z_1} = \bar B_1, \\[2mm] h_0\dfrac{\partial\beta}{\partial z_2} = B_2, & h_0\dfrac{\partial\beta}{\partial \bar z_2} = \bar B_2, \quad z\in bD. \end{cases} \tag{2.16}$$

Аналогично системе (2.13) с учетом того, что h_0 – решение однородной системы (2.11), нетрудно доказать, что система (2.16) имеет решение, если найдутся такие продолжения функций B_1, B_2 в D, что верно

$$\frac{\partial B_1}{\partial \bar z_1} + \frac{\partial \bar B_1}{\partial z_1} + \frac{\partial B_2}{\partial \bar z_2} + \frac{\partial \bar B_2}{\partial z_2} - B_1\bar A_1 - \bar B_1 A_1 - B_2\bar A_2 - \bar B_2 A_2 = 0. \tag{2.17}$$

Итак, решение системы (2.11) существует, если существуют такие гладкие продолжения функций a и ψ, для которых верно (2.14) и (2.17).

Выпишем уравнения (2.14) и (2.17)

$$-\Delta(\ln(1+a\bar a)) + \frac{1}{1+a\bar a}\left(\frac{\partial a}{\partial z_1}\frac{\partial \bar a}{\partial \bar z_1} - \frac{\partial a}{\partial \bar z_1}\frac{\partial \bar a}{\partial z_1} + \frac{\partial a}{\partial z_2}\frac{\partial \bar a}{\partial \bar z_2} - \frac{\partial a}{\partial \bar z_2}\frac{\partial \bar a}{\partial z_2}\right) = 0 \tag{2.18}$$

и

$$\frac{1}{1+a\bar a}[-a\Delta\psi-\bar a\Delta\psi] - \frac{2}{1+a\bar a}\left[\frac{\partial a}{\partial \bar z_1}\frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \frac{\partial \bar a}{\partial z_1}\frac{\partial \psi}{\partial \bar z_1} + \frac{\partial a}{\partial \bar z_2}\frac{\partial \psi}{\partial z_2} + \frac{\partial \bar a}{\partial z_2}\frac{\partial \psi}{\partial \bar z_2}\right] -$$

$$- \frac{1}{(1+a\bar a)^2}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \bar z_1}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_2}(a\bar a)+\bar a\frac{\partial}{\partial z_1}(a\bar a)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \bar z_2}\left(-\frac{\partial}{\partial \bar z_1}(a\bar a)+\bar a\frac{\partial}{\partial z_2}(a\bar a)\right) +\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial \psi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}(a\bar a)+a\frac{\partial}{\partial \bar z_1}(a\bar a)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial z_2}\left(-\frac{\partial}{\partial z_1}(a\bar a)+a\frac{\partial}{\partial \bar z_2}(a\bar a)\right)\right] + \gamma\left(a, \frac{\partial a}{\partial z_k}, \frac{\partial a}{\partial \bar z_k}\right) = 0. \tag{2.19}$$

Если $\operatorname{Re}\psi=\psi_1$, $\operatorname{Im}\psi=\psi_2$, а $\operatorname{Re}a=a_1$, $\operatorname{Im}a=a_2$, то квадратичная часть уравнения (2.19) примет вид $\frac{2}{1+a\bar{a}}(a_1\Delta\psi_1+a_2\Delta\psi_2)$. Таким образом, если для некоторого действительного числа k функция $a_1+ka_2\neq 0$ на bD и мы можем продолжить $\psi_1-k\psi_2$ в D до функции класса $C^\infty(\overline{D})$, то в этом случае (2.19) представляет собой линейное эллиптическое уравнение второго порядка относительно ψ_1 и разрешимость задачи Дирихле для него доказана, напр., в ([5], гл. 3). Уравнение (2.18) является квазилинейным уравнением второго порядка, для его разрешимости воспользуемся теоремой 42.VIII из ([5], с.175), но применимость ее к уравнению (2.18) необходимо обосновать.

§ 3. Вспомогательные результаты

Доказательство всех вспомогательных результатов идет по схемам из ([5], гл. 1).

Пусть D – некоторая область в $\mathbb{R}^m$ с границей класса $C^{1,\lambda}$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$MU = M_2U+M_1U+C(x,U)U = f(x), \quad U|_{bD} = \varphi, \tag{3.1}$$

где

$$M_1U = \sum_{k=1}^{m} b_k(x,U)\frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad M_2U = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j},$$

функции a_{ij} непрерывны в $\overline{D}$, b_k, C непрерывны и ограничены по совокупности переменных в $\overline{D}\times\mathbb{R}$, а квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{3.2}$$

положительно определена для всех $x\in\overline{D}$.

ЛЕММА 3.1. *Если в области D $C\leqslant 0$, $f<0$ $[f>0]$ или $C<0$, $f\leqslant 0$ $[f\geqslant 0]$, то дважды гладкое решение уравнения* (3.1) *не имеет в D точек отрицательного локального минимума [положительного локального максимума].*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – точка локального минимума, тогда $\frac{\partial U}{\partial x_k}(x_0)=0$ для любого $k=\overline{1,m}$, квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\lambda_i\lambda_j\geqslant 0$ и, следовательно,

$$M_2U = MU-M_1U-CU = MU-CU \geqslant 0.$$

Действительно, квадратичная форма (3.2) всегда может быть представлена в виде суммы квадратов m линейных форм

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m} g_{rs}\lambda_s\right)^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{j,k,s=1}^{m} g_{sk}g_{sj}\lambda_k\lambda_j > 0,$$

тогда $a_{ij} = \sum_{s=1}^{m} g_{si}g_{sj}$ и

$$MU-CU = M_2U = \sum_{s,j,k}^{m} g_{sk}g_{sj}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_j} = \sum_s\left(\sum_{j,k} g_{sk}g_{sj}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\partial x_k}\right) \geqslant 0.$$

Но если $U(x_0)<0$, то $(M-C)U=f-CU<0$. Получаем противоречие: $M_2U\geqslant 0$, $M_2U<0$. Таким образом, лемма 3.1 доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть коэффициенты уравнения* (3.1) *ограничены в* D *и дискриминант квадратичной формы* (3.2) *имеет в* D *положительную нижнюю грань. Если* $C \leqslant 0$, $f \leqslant 0$ $[f \geqslant 0]$, *то никакое гладкое решение уравнения* (3.1) *не может иметь в точке* $x_0 \in D$ *отрицательного локального минимума [положительного локального максимума], если оно не обращается в постоянную в любой содержащей* x_0 *области* D, *в которой* $U(x) \geqslant U(x_0)$ $[U(x) \leqslant U(x_0)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – точка локального отрицательного минимума. Обозначим через J множество точек из D_0, для которых $U(x)=U(x_0)$. Множество J замкнуто в D_0. Если докажем, что множество $bJ \cap D_0$ пусто, то тем самым докажем, что $J \equiv D_0$. Пусть $bJ \cap D_0$ не пусто, тогда существует точка x на bJ, принадлежащая D_0, расстояние δ от которой до bD_0 положительно. Если x' – такая точка из D_0-J, для которой $\rho(x, x') < \delta/2$, то все сферы $S(x', \rho)$ с центром в x' и радиусом $\rho < \delta/2$ содержатся в D_0. Пусть r' – верхняя грань значений ρ, для которых $S(x', \rho)$ содержится в D_0-J. На $bS(x', r')$ найдется хотя бы одна точка x_2 из J. Если обозначить через x_1 произвольную точку на радиусе $x'x_2$, отличную от x', и положить $\rho(x_1, x_2)=\rho$, то $U(x)>U(x_0)$ для $x \in S(x_1, \rho) \setminus \{x_2\}$, $U(x_2)=U(x_0)$.

Выберем такое $\rho_1 < \rho$, что $S(x_2, \rho_1) \subset D_0$ и, положив $r=\rho(x_2, x_1)$,

$$v(x) = \exp(-k\rho^2) - \exp(-kr^2), \tag{3.3}$$

возьмем k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $Mv<0$ для $x \in S(x_2, x_1)$. Это возможно, т.к. $\exp(kr^2)MU$ – квадратный трехчлен относительно k, в котором коэффициент при k^2 имеет отрицательную нижнюю грань, коэффициент при k ограничен и свободный член, зависящий от k, ограничен сверху. В таком случае для $\lambda>0$ имеем $M(U+\lambda v)<0$ в $S(x_2, \rho_1)$, что противоречит лемме 3.1, т.к. для λ достаточно малых $U+\lambda v > U(x_0)$ на $bS(x_2, \rho_1)$ и, кроме того, $U(x_2)+\lambda v(x_2)=U(x_0)$, т.е. функция U имеет в $S(x_2, \rho_1)$ отрицательный минимум.

Таким образом, теорема 3.1 доказана от противного.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ и $U(x)$ – дважды гладкое решение однородного уравнения $MU=0$, не равное тождественной константе и непрерывное в $\overline{D}$.

Если $C \leqslant 0$, то во всей области D

$$|U| \leqslant \max_{bD} |\varphi|.$$

Если же $C \equiv 0$, то во всей области

$$\min_{bD} \varphi < U < \max_{bD} \varphi.$$

Частным случаем следующей теоремы является теорема существования и единственности решения задачи Дирихле (3.1).

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть функции* a_{ij} *непрерывны в* $\overline{D}$, b_k, C *непрерывны и ограничены по совокупности переменных в* $D \times \mathbb{R}$ *и дискриминант квадратичной формы*

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

имеет положительную нижнюю грань в D.

Тогда решение задачи

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \alpha\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\left(x, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial x_k} + C\left(x, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right)U\right) = 0, \quad U|_{bD} = \varphi \tag{3.4}$$

существует и единственно для любой функции $\varphi\in C^{k,\lambda}$ *и любых действительных* α.

Доказательство легко следует из теоремы, приведенной в ([5], с.175).

ТЕОРЕМА 3.3. *Какова бы ни была функция* $\varphi\in C^{k,\lambda}$, $k\geqslant 2$, *решение задачи Дирихле* (3.4) *существует и единственно, если выполнены следующие условия:*

а) *для произвольного решения уравнения* (3.4), *принадлежащего классу* $C^{k,\lambda}$, *задача Дирихле для соответствующего уравнения в вариациях безусловно разрешима;*

б) *для любого* $\alpha\in\mathbb{R}$ *решения уравнения* (3.4) *равномерно ограничены;*

в) *для некоторой функции* φ *и некоторого* α *решение задачи существует и единственно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Straube E.J. *Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value* // Ann. scuola norm. super. Pisa. Cl. sci. – 1984. – V.11. – № 4. – P.559–591.

2. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применение.* – Новосибирск, 1992. – 240 с.

3. Чирка Е.М. *Аналитическое представление CR-функций* // Матем. сб. – 1975. – Т.98. – № 4. – С.591–623.

4. Duff G.F.D., Spencer P.C. *Harmonic tensors on Riemann manifolds with boundary* // Ann. Math. – 1952. – V.56. – № 1. – P.128–159.

5. Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа.* – М.: Ин. лит., 1957. – 256 с.

Красноярский государственный университет

Поступила
21.12.1993