Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Лифшиц, О множестве нулей конструктивного степенного ряда в вещественной области,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1969, том 16, 114–125

https://www.mathnet.ru/znsl2343

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 декабря 2025 г., 12:16:53

В.А.ЛИФШИЦ

О МНОЖЕСТВЕ НУЛЕЙ КОНСТРУКТИВНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ*)

В настоящей заметке используются терминология и обозначения из статьи [1]. Пусть $\mathfrak{A}$ - последовательность дуплексов, $\underline{x} \nabla \overline{x}$ - интервал, f - конструктивная функция, определенная на $\underline{x} \nabla \overline{x}$. Будем говорить, что степенной ряд с последовательностью коэффициентов $\mathfrak{A}$ сходится к f на $\underline{x} \nabla \overline{x}$, если, каков бы ни был дуплекс x, принадлежащий интервалу $\underline{x} \nabla \overline{x}$, последовательность $\mathfrak{B}$ дуплексов, удовлетворяющая условию

$$\forall n \left(\mathfrak{B}(n) = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{A}(i) x^{i} \right),$$

сходится к $f(x)$.

I. Пусть f - конструктивная функция, $\underline{x} \Delta \overline{x}$ - сегмент, и пусть f является суммой некоторого степенного ряда на интервале, содержащем сегмент $\underline{x} \Delta \overline{x}$ (будем говорить в этом случае, что f разложима в степенной ряд в окрестности сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$). Что можно сказать о множестве нулей функции f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$? Предположим, что f не равна тождественно нулю. Можно, прежде всего, утверждать, что множество нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$ не может быть инфинитным**). Это

*) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 13 марта 1969 г.

**) Множество $\mathcal{M}$ дуплексов называется ф и н и т н ы м, если существует такой список $x_1, \ldots, x_N$ дуплексов, что

$$\forall x \left(x \in \mathcal{M} \equiv \bigvee_{i=1}^{N} (x = x_i) \right),$$

и и н ф и н и т н ы м в противном случае.

утверждение эквивалентно теореме 5 заметки [2] (приведенной там без доказательства). Указанная теорема носит, однако, чисто отрицательный характер. Она не отвечает на вопрос о том, можно ли (эффективно) вычислить эти нули, узнать их количество или хотя бы оценить его сверху.

Основная теорема. Каковы бы ни были сегмент $\underline{x} \Delta \bar{x}$ и конструктивная функция f, разложимая в степенной ряд в окрестности $\underline{x} \Delta \bar{x}$, если f не равна тождественно нулю, то можно построить список дуплексов

$$(x_1, \ldots, x_N), \qquad (1)$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$(a) \quad \underline{x} \leq x_1 < \cdots < x_N \leq \bar{x},$$

(b) каковы бы ни были натуральное число m и дуплекс x, принадлежащий сегменту $\underline{x} \Delta \bar{x}$, если список (1) содержит не более m членов, равных x, то кратность x как нуля функции f не превосходит m.

Заметим, что если список (1) удовлетворяет условию (b), то, каков бы ни был нуль x функции f, принадлежащий $\underline{x} \Delta \bar{x}$, не может не быть такого i $(1 \leq i \leq N)$, что $x = x_i$ (получается при $m = 0$); в этом смысле можно сказать, что список (1) содержит все нули функции f. Число N дает верхнюю оценку числа нулей f на $\underline{x} \Delta \bar{x}$ с учетом кратности.

Ниже намечен ход доказательства Основной теоремы. При этом мы рассматриваем конструктивные объекты, не являющиеся словами, и пользуемся неуточненным понятием алгорифма; не представляет труда сделать эти рассмотрения точными, например, закодировав все рассматриваемые объекты с помощью слов в подходящих алфавитах и воспользовавшись понятием нормального алгорифма.

2. Сформулируем предварительно несколько определений. Р а з б и е н и е м невырожденного сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$ мы называем произвольный список

$$(u_0, u_1, \ldots, u_h) \tag{2}$$

дуплексов $(h > 0)$, удовлетворяющий условию:

$$\underline{x} = u_0 < u_1 < \cdots < u_h = \overline{x}.$$

Д и а м е т р о м разбиения (2) называется число

$$\max_{1 \le i \le h} (u_i - u_{i-1})$$

Д р о б л е н и е м невырожденного сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$ будем называть произвольную последовательность

$$\begin{array}{c} (u_0^{(0)}, \ldots, u_{h_0}^{(0)}) \\ (u_0^{(1)}, \ldots, u_{h_1}^{(1)}) \\ \vdots \end{array} \tag{3}$$

разбиений этого сегмента, такую что последовательность диаметров этих разбиений стремится к нулю.

Пусть g - конструктивная функция, равномерно непрерывная и неотрицательная на $\underline{x} \Delta \overline{x}$. Вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_h \end{pmatrix}$$

будем называть g - о б р а з о м разбиения (2), если y_i есть точная нижняя грань функции g на сегменте $u_{i-1} \Delta u_i$ $(1 \leq i \leq h)$. Если g - список

$$(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

конструктивных функций, равномерно непрерывных и неотрицательных на $\underline{x} \Delta \overline{x}$, то $\overline{g}$ -о б р а з о м разбиения будем называть прямоугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} y_{10} \cdots y_{1h} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{h0} \cdots y_{hn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

столбцы которой есть g_j - образы этого разбиения $(0 \leq j \leq n)$.

Р а ц и о н а л ь н ы м $\overline{g}$ - о б р а з о м разбиения будем называть произвольную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{10} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{h0} \cdots a_{hn} \end{pmatrix}$$

с рациональными элементами, связанную с $\overline{g}$ - образом (4) этого разбиения соотношениями

$$y_{ij} - 2^{-n} \leq a_{ij} \leq y_{ij}$$

$$(1 \leq i \leq h, \ 0 \leq j \leq n).$$

3. Пусть дан невырожденный сегмент $\underline{x} \Delta \overline{x}$ и функция f,

разложимая в степенной ряд в окрестности $\underline{x} \Delta \overline{x}$. Мы поставим в соответствие каждому дроблению сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$ некоторую последовательность $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ прямоугольных матриц с рациональными элементами. Эта конструкция будет играть в доказательстве основную роль.

Построим последовательность $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ конструктивных функций, удовлетворяющую условию:

$$\forall n x \left(g_n(x) \simeq |f^{(n)}(x)| \right).$$

Построим, далее, последовательность $\{\bar{g}_n\}_{n=0}^{\infty}$ списков конструктивных функций, удовлетворяющую условию:

$$\bar{g}_n = (g_0, \ldots, g_n).$$

Последовательность $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, соответствующую данному дроблению, построим таким образом, чтобы матрица A_n была рациональным $\bar{g}_n$-образом n-го члена данного дробления.

Каждый член построенной таким образом последовательности содержит, очевидно, рациональные нижние оценки точных нижних граней модуля функции f и нескольких ее производных на каждом из нескольких прилегающих друг к другу сегментов, составляющих в совокупности весь сегмент $\underline{x} \Delta \overline{x}$. При этом, чем больше n, тем больше производных включается в рассмотрение, тем большая гарантирована точность оценок, тем более мелкие, вообще говоря, рассматриваются сегменты, заполняющие $\underline{x} \Delta \overline{x}$.

4. О множестве дуплексов $\mathcal{M}$ и дуплексе x мы говорим, что x есть т о ч к а п р и к о с н о в е н и я $\mathcal{M}$, если не существует такой окрестности точки x, которая не содержала бы элементов $\mathcal{M}$, отличных от x.

Лемма I. Если конструктивная функция f является суммой некоторого степенного ряда на интервале $\underline{x} \nabla \overline{x}$ и не равна тождественно нулю, то множество ее нулей не может иметь точек прикосновения, принадлежащих $\underline{x} \nabla \overline{x}$.

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично обычному доказательству внутренней теоремы единственности в классической теории аналитических функций.

Мы хотим теперь доказать, в предположениях Основной теоремы, что множество нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$ не может быть инфинитным. В основе нашего доказательства лежит та же идея, что и в основе упомянутого выше доказательства теоремы единственности. Однако при непосредственном перенесении этого рассуждения в конструктивную теорию мы получим только сформулированную выше лемму I, из которой не вытекает непосредственно требуемое утверждение (поскольку существуют конструктивные инфинитные подмножества сегмента, не имеющие точек прикосновения). С этой трудностью можно справиться, если ввести понятие псевдоточки прикосновения, являющееся естественным распространением понятия точки прикосновения на конструктивные псевдоточки (определение понятия псевдочисла дано в [I:8.4]).

Лемма 2. В предположениях леммы I, множество нулей функции f не может иметь псевдоточек прикосновения, условно принадлежащих*) интервалу $\underline{x} \nabla \overline{x}$.

---

*) Отношение "псевдочисло ξ условно принадлежит интервалу $\underline{x} \nabla \overline{x}$" определяется как естественное распространение отношения "число x принадлежит интервалу $\underline{x} \nabla \overline{x}$" на псевдочисла.

План доказательства леммы 2 таков. Определяются сложение и умножение псевдочисел и понятие предела последовательности псевдочисел. После этого оказывается возможным построить "переразложение" степенного ряда с центром в псевдоточке. Если построить "переразложение" степенного ряда с центром в псевдоточке прикосновения множества его нулей, то можно (совершенно так же, как в доказательстве внутренней теоремы единственности) доказать, что в некоторой окрестности этой псевдоточки функция f равна нулю, заметив, что все его коэффициенты равны нулю. Когда это доказано, остается сослаться на лемму 1.

<u>Лемма 3.</u> В предположениях Основной теоремы множество нулей f на $\underline{x} \Delta \bar{x}$ не может быть инфинитным.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что это множество инфинитно. Тогда, очевидно, сегмент $\underline{x} \Delta \bar{x}$ - невырожденный. Построим последовательность $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, как описано в п.3 (по какому-нибудь дроблению сегмента $\underline{x} \Delta \bar{x}$). Построим последовательность $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ точек сегмента $\underline{x} \Delta \bar{x}$, удовлетворяющую условию: v_n есть $u_i^{(n)}$, где i есть наибольшее не превосходящее n натуральное число, такое, что первые i строк матрицы A_n содержат по крайней мере по одному положительному элементу.

Относительно последовательности $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ может быть доказано следующее:

(a) $\forall n \neg\neg \exists n' \forall n'' (n'' \geq n' \rightarrow v_{n''} \geq v_n)$;

(b) множество нулей функции f ни на одном из сегментов $\underline{x} \Delta v_n$ не является инфинитным;

(c) $\forall n (v_n \neq \bar{x})$;

$$(d)\ \neg\exists mnn'\forall n''(n''\geq n' \rightarrow |f^{(n)}(v_{n''})| > 2^{-m}).$$

[Утверждение (b) доказывается с помощью теоремы Ролля. Утверждение (c) вытекает из (b) и предположения, что множество нулей f на $\underline{x}\Delta\overline{x}$ инфинитно. Утверждение (d) можно доказать с помощью (c)].

Из (a) вытекает, что можно построить псевдочисло, являющееся "пределом" последовательности $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$. Из (d) нетрудно вывести, что это псевдочисло есть псевдоточка прикосновения множества нулей функции f. Но такой псевдоточки, по предыдущей лемме, быть не может. Полученное противоречие доказывает лемму.

5. Пусть функция f сколь угодно много раз дифференцируема на невырожденном сегменте $\underline{x}\Delta\overline{x}$. Анализом распределения нулей функции f на сегменте $\underline{x}\Delta\overline{x}$, построенным на разбиении (2) этого сегмента, будем называть произвольное выражение вида

$$\begin{pmatrix} & k_1 & k_2 & \dots & k_h & \\ u_0 & & u_1 \dots & & u_{h-1} & u_h \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_h$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию: число нулей f на $u_{i-1}\Delta u_i$ с учетом кратности не превосходит k_i. Определение анализа естественным образом переносится с разбиений на дробления. А именно, анализом распределения нулей функции f на $\underline{x}\Delta\overline{x}$, построенным на дроблении Δ, мы называем последовательность анализов, построенных на членах этого дробления.

Ниже мы установим, что при определенных условиях можно построить список, обладающий свойствами (a) и (b) из формулиров-

ки Основной теоремы, если известен анализ распределения нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$, построенный на дроблении. После этого будет доказана возможность построения анализа, удовлетворяющего указанным условиям, в предположениях Основной теоремы, в результате чего наша цель будет достигнута. Для того, чтобы сформулировать эти условия, нам понадобятся еще некоторые определения.

Пусть, кроме анализа (5), дан еще анализ

$$\begin{pmatrix} & \kappa_1' & \kappa_2' & \dots & \kappa_{h'}' & \\ u_0' & & u_1' & \dots & u_{h-1}' & u_{h'}' \end{pmatrix} \qquad (5')$$

распределения нулей той же функции на том же сегменте (но построенный, вообще говоря, на другом разбиении). Будем говорить, что анализ (5) с о г л а с о в а н с анализом (5′), если

(a) каковы бы ни были i_1, i_2 $(1 \leq i_1, i_2 \leq h)$, если $\kappa_{i_1} \neq 0$ $\kappa_{i_2} \neq 0$, то не существует i' $(1 \leq i' \leq h')$, такого, что сегмент $u_{i'-1}' \Delta u_{i'}'$ имеет общие точки с каждым из сегментов $u_{i_1-1} \Delta u_{i_1}$, $u_{i_2-1} \Delta u_{i_2}$;

(b) каково бы ни было i' $(1 \leq i' \leq h')$, если $\kappa_{i'}' \neq 0$, то существует такое i $(1 \leq i \leq h)$, что $\kappa_i \neq 0$ и сегмент $u_{i-1} \Delta u_i$ имеет общие точки с сегментом $u_{i'-1}' \Delta u_{i'}'$;

(c) для каждого i $(1 \leq i \leq h)$ такого, что $\kappa_i \neq 0$ сумма $\kappa_{i'}'$ по всем i' $(1 \leq i' \leq h')$, для которых сегменты $u_{i-1} \Delta u_i$, $u_{i'-1}' \Delta u_{i'}'$ имеют общие точки, равна κ_i

<u>Лемма 4</u>. П у с т ь к о н с т р у к т и в н а я ф у н к-

ция f сколь угодно много раз дифференцируема на невырожденном сегменте $\underline{x} \Delta \overline{x}$. Если существует анализ распределения нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$, построенный на некотором дроблении, такой, что каждый его член согласован со всеми предыдущими, то можно построить список дуплексов (1), удовлетворяющий условиям (a) и (b) из формулировки Основной теоремы.

Анализ (5) будем называть совершенным, если ни одно из чисел $u_i (0<i<h)$ не является нулем f, каждый интервал $u_{i-1} \nabla u_i$ содержит не более одного нуля f, и каждое k_i равно кратности нуля, принадлежащего $u_{i-1} \nabla u_i$, если такой существует, и равно 0 в противном случае. Анализ, построенный на дроблении, будем называть совершенным, если совершенны все его члены, начиная с некоторого, и квазисовершенным, если неверно, что он не является совершенным.

Дробление (3) будем называть дизъюнктным, если, каковы бы ни были n_1, n_2, i_1, i_2, если $n_1 \neq n_2$, $0 < i_1 < h_{n_1}$, $0 < i_2 < h_{n_2}$, то $u_{i_1}^{(n_1)} \neq u_{i_2}^{(n_2)}$.

С помощью леммы 4 можно доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 5</u>. В предположениях леммы 4, если существует квазисовершенный анализ распределения нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$, построенный на дизъюнктном дроблении, то можно построить список дуплексов (1), удовлетворяющий условиям (a) и (b) из формулировки Основной теоремы.

6. Лемма 6. Каковы бы ни были невырожденный сегмент $\underline{x} \Delta \overline{x}$ и конструктивная функция f, разложимая в степенной ряд в окрестности $\underline{x} \Delta \overline{x}$, существует квазисовершенный анализ распределения нулей f на $\underline{x} \Delta \overline{x}$, построенный на дизъюнктном дроблении.

Доказательство. Рассмотрим произвольное дизъюнктное дробление Δ сегмента $\underline{x} \Delta \overline{x}$. С помощью леммы 3 можно доказать, что существует подпоследовательность Δ_1 последовательности Δ (которая также, очевидно, является дизъюнктным дроблением), такая что каждый член соответствующей подпоследовательности $\{An_p\}_{p=0}^{\infty}$ последовательности $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, построенной, как описано в п.3, содержит в каждой строке по крайней мере по одному положительному элементу. Построим последовательность разбиений, p-й член которой

$$\begin{pmatrix} & k_1^{(p)} & k_2^{(p)} & \dots & k_{h_p}^{(p)} & \\ u_0^{(p)} & u_1^{(p)} & \dots & u_{h_p-1}^{(p)} & & u_{h_p}^{(p)} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет следующим условиям: его нижняя строка

$$\left(u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \dots, u_{h_p-1}^{(p)}, u_{h_p}^{(p)} \right)$$

есть p-й член дробления Δ_1, k_i $(1 \leq i \leq h)$ есть номер столбца, в котором расположен первый слева положительный элемент i-й строки матрицы An_p (элементы в строке нумеруются, как в (4), начиная с 0). С помощью леммы (3) нетрудно показать, что построенная последовательность есть квазисовершенный анализ рас-

пределения нулей f на $\underline{x} \Delta \bar{x}$, построенный на Δ_1.

Лемма доказана.

Из лемм 5 и 6 вытекает Основная теорема при дополнительном предположении, что сегмент $\underline{x} \Delta \bar{x}$ - невырожденный. От этого предположения нетрудно избавиться.

7. Основную теорему нельзя усилить, потребовав, чтобы число членов списка (I), равных дуплексу x, было в точности равно кратности x как нуля f; нельзя даже потребовать, чтобы список (I) не содержал чисел, не являющихся нулями f. Неверно, что в предположениях Основной теоремы можно построить натуральное число N, в точности равное числу нулей f на $\underline{x} \Delta \bar{x}$. Все эти теоремы о невозможности алгорифмов можно доказать применительно даже не к степенным рядам, а к полиномам с вещественными коэффициентами.

В заключение автор выражает благодарность участникам Ленинградского семинара по конструктивной математике за обсуждение полученных результатов. Автор весьма признателен Б.А.Кушнеру за замечания, позволившие повысить ясность изложения.

Литература

1. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 15-294.

2. Лифшиц В.А. О конструктивных аналитических функциях одной вещественной переменной. "Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР", 1968, 8, 121-131.