Теорема 4. *Пусть M — замкнутое устойчивое подмножество X. Предположим, что всякое движение $x: t \to xt$, $x \in X \setminus M$, устойчиво по Лагранжу в положительном направлении. Тогда для глобальной полуасимптотической устойчивости M необходимо и достаточно, чтобы всякое движение $x: t \to xt$, $x \in X \setminus M$, было неустойчиво по Лагранжу.*

Литература

1. Сибирский К. С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970.
2. Bhatia N. P., Szegö G. P. Stability Theory of Dynamical Systems. Berlin, 1970.
3. Seibert P. // Lecture Notes in Math. 1970. N 144. P. 185—189.
4. Калитин Б. С. // Вест. Бел. гос. ун-та. 1984. № 3. С. 61—62.
5. Калитин Б. С. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 2. С. 187—193.
6. Kalitine B. // RAIOR Automatique. Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 16, N 3. P. 275—286.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 10 сентября 1987 г.

УДК 517.927.25

Т. Б. КАСУМОВ

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРЕМЫ О БАЗИСНОСТИ

Рассматривается на отрезке $[0, 1]$ квазидифференциальное выражение

$$l(y) = y^{[n]}, \tag{1}$$

где $y^{[0]} = y$, $y^{[k]} = p_{k,k}(x) \dfrac{1}{i} \dfrac{d}{dx} y^{[k-1]} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} p_{k,j}(x) y^{[j]}$, $k = 1, \ldots, n$,

и система нормированных краевых условий

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(0) + \beta_\nu y^{[k_\nu]}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(0) + \beta_{\nu j} y^{[j]}(1) = 0, \tag{2}$$

$$\nu = 1, \ldots, n, \ 0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n \leqslant n-1, \ k_\nu < k_{\nu+2}, \ |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0.$$

Предполагается, что выполнены следующие условия: 1) $p''_{k,k}(x)$, $p'_{k,k-1}(x)$, $p_{k,j}(x)$ — суммируемые на отрезке $[0, 1]$ комплексные функции; 2) $p_{k,k}(x) \neq 0$, $\rho(x) \equiv \equiv \prod\limits_{k=1}^{n} p_{k,k}^{-1}(x) > 0$.

Квазидифференциальные выражения вида (1) изучались в [1]. В [2] доказаны теоремы равносходимости и разложения по собственным и присоединенным функциям (с. п. ф.) задачи (1), (2) в случае, когда $p_{k,k}(x) \equiv 1$, $p_{k,k-1}(x) \equiv 0$. Для обыкновенных дифференциальных операторов в [3, 4] описаны области определения дробных степеней, а в [5, 6] доказаны теоремы о базисности с. п. ф. в пространствах $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Обозначим через $W_p^{[k]}$, $1 < p < \infty$, $k = 1, \ldots, n$, совокупность функций $y(x)$ из $L_p[0, 1]$, все квазипроизводные которых до $(k-1)$-го порядка включительно абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $y^{[k]}$ принадлежит пространству $L_p[0, 1]$. Будем считать, что $W_p^{[0]} = L_p[0, 1]$. Положим $W_{p,U}^{[k]} = \{y \in W_p^{[k]} : U_\nu(y) = 0, \ k_\nu < k\}$.

Определим оператор L в $L_p[0, 1]$ следующим образом: область определения $D(L)$ оператора L есть $W_{p,U}^{[n]}$ и $Ly = y^{[n]}$ для $y \in D(L)$.

Сопряженный оператор L^* задается в $L_q[0, 1]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, квазидифференциальным выражением [1] $l^*(z) = z^{\langle n \rangle}$, где

$$z^{\langle 0 \rangle} = \overline{p_{n,n}}(x) z,$$

$$z^{\langle k \rangle} = \overline{p_{n-k,n-k}}(x) \frac{1}{i} \frac{d}{dx} z^{\langle k-1 \rangle} +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\overline{(p_{n-j,n-k}(x)\,p_{n-j,n-j}^{-1}(x)\,p_{n-k,n-k}(x))}\,z^{\{j\}},\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

и сопряженными краевыми условиями $V_\nu(z)=0$, $\nu=1,\ \ldots,\ n$, т. е. $D(L^*)=W_{q,V}^{\{n\}}$ и $L^*z=z^{\{n\}}$ для $z\in D(L^*)$.

Разобъем комплексную ρ-плоскость на $2n$ секторов $S_\gamma=\{\rho:\gamma\pi/n\leqslant\arg(i\rho)\leqslant(\gamma+1)\pi/n\}$. Обозначим через $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n$ корни n-й степени из 1. Как следует из [7, с. 64], в каждом секторе S_γ уравнение $y^{[n]}-\rho^n y=0$ имеет n линейно независимых решений $y_1,\ \ldots,\ y_n$, которые вместе со своими квазипроизводными допускают асимптотические разложения

$$y_k^{[j-1]}(x,\ \rho)=\rho^{j-1}\exp(i\rho\omega_k\alpha(x))\left[\eta_{k,j-1}(x)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\quad k,\ j=1,\ \ldots,\ n,\qquad (3)$$

где $\alpha(x)=\int\limits_0^x\sqrt[n]{\rho(t)}\,dt$, а $\eta_{k,j-1}(x)$ — некоторые отличные от нуля гладкие функции.

Положим

$$\Theta_0+s\Theta_1+\frac{1}{s}\Theta_{-1}=\begin{vmatrix}a_{1,1}\cdots a_{1,\mu-1}\ a_{1,\mu}+sb_{1,\mu}\ a_{1,\mu+1}+\frac{1}{s}b_{1,\mu+1}\ b_{1,\mu+2}\cdots b_{1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n,1}\cdots a_{n,\mu-1}\ a_{n,\mu}+sb_{n,\mu}\ a_{n,\mu+1}+\frac{1}{s}b_{n,\mu+1}\ b_{n,\mu+2}\cdots b_{n,n}\end{vmatrix},\qquad (4)$$

если $n=2\mu$, и

$$\Theta_0+s\Theta_1=\begin{vmatrix}a_{1,1}\cdots a_{1,\mu}\ a_{1,\mu+1}+sb_{1,\mu+1}\ b_{1,\mu+2}\cdots b_{1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n,1}\cdots a_{n,\mu}\ a_{n,\mu+1}+sb_{n,\mu+1}\ b_{n,\mu+2}\cdots b_{n,n}\end{vmatrix},\qquad (5)$$

если $n=2\mu+1$.

Определение 1. Краевая задача (1), (2) называется регулярной, если при $n=2\mu$ числа Θ_{-1} и Θ_1, определенные равенством (4), а при $n=2\mu+1$ числа Θ_0 и Θ_1, определенные равенством (5), отличны от нуля.

Определение 2. Регулярная задача называется усиленно регулярной в следующих двух случаях: а) $n=2\mu+1$; б) $n=2\mu$ и $\Theta_0^2-4\Theta_{-1}\Theta_1=0$.

Далее будем предполагать, что оператор $L(L_0)$ порожден регулярной (усиленно регулярной) задачей (1), (2).

Лемма 1. *Функция Грина $G(x,\ \xi,\ \rho^n)$ оператора $L-\rho^n I$ и ее квазипроизводные имеют в секторе S_γ следующие представления:*

$$n\rho^{n-k-1}G_x^{[k]}(x,\ \xi,\ \rho^n)=P_k(x,\ \xi,\ \rho)+$$

$$+\sum_{\nu,s=1}^{n}A_{\nu sk}(x,\ \xi,\ \rho)\,\sigma_\nu(x,\ \rho)\,\tau_s(\xi,\ \rho),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где $P_k(x,\ \xi,\ \rho)$ — голоморфные от $\rho\in S_\gamma$ функции;

$$\sigma_\nu(x,\ \rho)=\begin{cases}\exp(i\rho\omega_\nu\alpha(x)) & \text{при } 1\leqslant\nu\leqslant\mu,\\ \exp(i\rho\omega_\nu(\alpha(x)-h)) & \text{при } \mu+1\leqslant\nu\leqslant n;\end{cases}$$

$$\tau_s(\xi,\ \rho)=\begin{cases}\exp(-i\rho\omega_s\alpha(\xi)) & \text{при } 1\leqslant s\leqslant\mu,\\ \exp(i\rho\omega_s(h-\alpha(\xi))) & \text{при } \mu+1\leqslant s\leqslant n,\end{cases}$$

$h=\alpha(1)$; $A_{\nu sk}(x,\ \xi,\ \rho)=a_{\nu sk}(\rho)\left[\eta_{\nu,k}(x)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\left[h_{s,\nu}(\xi)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$; $\eta_{\nu,k}(x)$ введены в (3); $h_{s,\nu}(\xi)$ — отличные от нуля гладкие функции; $a_{\nu sk}(\rho)$ — мероморфные от $\rho\in S_\gamma$ функции.

При помощи леммы 1 доказывается

Теорема 1. *С. п. ф. оператора L_0, занумерованные по возрастанию модулей собственных значений, образуют базис пространства $L_p[0,\ 1]$, причем в $L_2[0,\ 1]$ они образуют безусловный базис.*

Теорема 1 позволяет строить дробные степени L_0^α, $0<\alpha<1$, оператора L_0 (см. [5]).

Если задача (1), (2) не усиленно регулярна, т. е. $n=2\mu$ и $\Theta_0^2-4\Theta_{-1}\Theta_1=0$, то можно указать такие $t_0\geqslant0$ и $C_0>0$, что $\|(L+tI)^{-1}\|\leqslant C_0(1+t)^{-1}$ при $t\geqslant t_0$. Положим $t_0=0$; этим общность не ограничивается, так как можно сдвинуть спектральный параметр. Тогда L—позитивный оператор, следовательно, и в этом случае определены его дробные степени (см., например, [8, с. 274]).

Лемма 2. *Пусть* $f\in L_p[0, 1]$ *и* $y=L^{-k/n}f$. *Тогда* $y\in W_{p,U}^{[k]}$ *и верно неравенство* $\|y^{[k]}\|_{L_p}\leqslant C_1\|f\|_{L_p}$.

Лемма 3. *Пусть* $y\in W_{p,U}^{[n]}$ *и* $z\in W_{q,V}^{\{k\}}$. *Тогда выполняется неравенство* $|(y^{[n]}, z)|\leqslant C_2\|y\|_{W_p^{[n-k]}}\|z\|_{W_q^{\{k\}}}$, *где* $\|y\|_{W_p^{[m]}}=\|y\|_{L_p}+\|y^{[m]}\|_{L_p}$, $\|z\|_{W_q^{\{k\}}}=\|z\|_{L_q}+\|z^{\{k\}}\|_{L_q}$.

Из лемм 1 и 2 следует, что справедлива

Теорема 2. $D(L^{k/n})=W_{p,U}^{[k]}$, $D((L^*)^{k/n})=W_{q,V}^{\{k\}}$, $k=0, 1, \ldots, n$.

Следующая теорема вытекает из теорем 1 и 2 с последующим применением результатов [9, 10].

Теорема 3. *С. п. ф. оператора* L_0 (L), *занумерованные по возрастанию модулей собственных значений, образуют базис (базис со скобками) пространств* $W_{p,U}^{[k]}$, $k=0$, $1, \ldots, n$, *причем в* $W_{2,U}^{[k]}$, $k=0, 1, \ldots, n$, *они образуют безусловный базис (базис Рисса со скобками).*

Автор выражает благодарность В. А. Садовничему за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Шин Д. // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 3. С. 523—526.
2. Рыхлов В. С. // Дифференц. уравнения и теория функций. Саратов, 1977. Вып. 1. С. 151—169.
3. Евзеров И. Д., Соболевский П. Е. // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 2. С. 228—240.
4. Евзеров И. Д. // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 4. С. 509—518.
5. Turner R. E. L. // Quart. J. Math. Oxford (2). 1968. Vol. 19. P. 193—211.
6. Benzinger H. E. // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 174. P. 333—344.
7. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пг., 1917.
8. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
9. Фридлендер Л. Ф. // Функц. анализ. 1977. Т. 11, вып. 4. С. 94—95.
10. Шкаликов А. А. // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 5. С. 235—236.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 11 мая 1987 г.

Технический редактор С. А. Курган

Сдано в набор 17.01.89. Подписано в печать 27.03.89. Формат 70×108 1/16. Бум. тип. № 2. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,10. Усл. кр.-отт. 16,62. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 1269 экз. Зак. № 158. Цена 1 р. 90 к.

Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220072. Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска Скорины издательства «Наука и техника». 220072. Минск, Ленинский проспект, 68.