



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. E. Alekseev, S. V. Sorochan, On the entropy of hereditary
classes of colored graphs,
Diskr. Mat., 2000, Volume 12, Issue 2, 99–102

<https://www.mathnet.ru/eng/dm327>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 21, 2025, 02:34:33



УДК 519.95

Об энтропии наследственных классов цветных графов

© 2000 г. В. Е. Алексеев, С. В. Сорочан

В статье обобщаются результаты, полученные ранее для наследственных классов обыкновенных графов, на наследственные классы цветных графов. Цветной граф — это полный обыкновенный граф с раскрашенными ребрами. Доказывается, что наименьшим положительным значением энтропии наследственных классов q -цветных графов является величина $(1/2) \log_q 2$, характеризуются минимальные классы с таким значением энтропии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98-01-00792.

1. Введение

Пусть Q — конечное множество, $|Q| = q > 1$, далее Q считается фиксированным. Цветным графом, или Q -графом, или q -графом с множеством вершин V будем называть пару (V, g) , где $g: V^{(2)} \rightarrow Q$, $V^{(2)}$ — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества V . Если $g(x, y) = \alpha$, то пару (x, y) будем называть ребром цвета α .

Обыкновенный граф — это 2-граф, и многие термины, применяемые для обыкновенных графов, естественным образом распространяются на цветные графы. Цветные графы $G_1 = (V_1, g_1)$ и $G_2 = (V_2, g_2)$ изоморфны, если существует биекция $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая цвета ребер, то есть $g_1(x, y) = g_2(\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $(x, y) \in V_1^{(2)}$. Подграф цветного графа $G = (V, g)$, порожденный множеством $U \subseteq V$, — это цветной граф (U, g') , где g' — ограничение g на $U^{(2)}$; этот подграф обозначается $G(U)$.

В статье рассматриваются только цветные графы, поэтому иногда будем употреблять просто термин граф вместо цветной граф. Множество графов \mathcal{X} называется наследственным классом, если всякий граф, изоморфный порожденному подграфу графа из \mathcal{X} , принадлежит \mathcal{X} .

Пусть \mathcal{X} — множество q -графов. Обозначим через \mathcal{X}_n множество всех q -графов из \mathcal{X} с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ и определим последовательность

$$h_n(\mathcal{X}) = (\log_q |\mathcal{X}_n|) / \binom{n}{2}.$$

Точно так же, как и в случае обыкновенных графов (см. [1]), доказывается, что для любого бесконечного наследственного класса q -графов существует предел $h_n(\mathcal{X})$ при $n \rightarrow \infty$. Этот предел назовем энтропией класса \mathcal{X} и обозначим $h(\mathcal{X})$.

Если \mathcal{X} — конечное множество графов, то $h(\mathcal{X}) = -\infty$ (говоря о конечном или бесконечном множестве графов, мы имеем в виду абстрактные графы, то есть отождествляем изоморфные графы). Теорема Рамсея позволяет легко охарактеризовать минимальные бесконечные наследственные классы. Обозначим через $\mathcal{O}(\alpha)$ множество всех Q -графов (V, g) с $g(V^{(2)}) = \{\alpha\}$, такие графы будем называть одноцветными. В терминах цветных графов теорема Рамсея утверждает, что для любых q и k существует такое число $R_q(k)$, что в любом q -графе с не менее чем $R_q(k)$ вершинами имеется одноцветный порожденный подграф с k вершинами. Отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Наследственный класс Q -графов бесконечен тогда и только тогда, когда в нем содержится хотя бы один из классов $\mathcal{O}(\alpha)$, $\alpha \in Q$.*

Энтропия класса $\mathcal{O}(\alpha)$ равна 0. Одна из целей настоящей работы — охарактеризовать множество всех наследственных классов с нулевой энтропией подобно тому, как теорема 1 характеризует конечные классы.

В [1] было выдвинуто предположение, а в [2] доказано, что область значений энтропии бесконечных наследственных классов обыкновенных графов является разрывным множеством: энтропия такого класса либо равна 0, либо не меньше $1/2$. В [2], кроме того, было установлено, что имеется ровно три минимальных по включению наследственных класса обыкновенных графов с положительной энтропией: класс всех двудольных графов, класс всех графов, дополнительных к двудольным, и класс всех расщепляемых графов. В [4] область значений энтропии наследственных классов обыкновенных графов была охарактеризована полностью: она состоит из 1 и всех чисел вида $1 - 1/k$, где k — натуральные числа.

В настоящей работе результаты из [2] обобщаются на наследственные классы цветных графов. Мы покажем, что энтропия наследственного класса q -графов, если она положительна, не может быть меньше, чем $\frac{1}{2} \log_q 2$, и охарактеризуем минимальные классы, имеющие ненулевую энтропию. В разделе 2 излагаются некоторые вспомогательные факты, относящиеся к наследственным классам двудольных цветных графов, в разделе 3 доказывается основной результат (теорема 3).

2. Двудольные цветные графы

Пусть V и U — непересекающиеся множества. Двудольным Q -графом с долями V и U будем называть тройку (V, U, g) , где $g: V \times U \rightarrow Q$. Для $P \subset Q$ множество всех двудольных Q -графов с $g(V \times U) \subseteq P$ будем обозначать $\mathcal{B}(P)$. Определения изоморфизма, подграфа (порожденного) и наследственного класса распространяются на двудольные цветные графы очевидным образом.

Пусть \mathcal{X} — множество двудольных Q -графов. Через \mathcal{X}_n обозначим множество всех графов из \mathcal{X} , у которых $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $U = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. В [3] (в несколько иной терминологии) доказано, что для каждого наследственного класса двудольных Q -графов существует энтропия, определяемая следующим образом:

$$h(\mathcal{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_q |\mathcal{X}_n|}{n^2},$$

и охарактеризованы значения, которые она может принимать. Этот результат будет использован в следующем разделе, поэтому сформулируем его в терминах, принятых в этой статье.

Теорема 2. Если \mathcal{X} — наследственный класс двудольных Q -графов, то $h(\mathcal{X}) = \log_q p$, где p — наибольшая мощность такого множества $P \subseteq Q$, что $\mathcal{B}(P) \subseteq \mathcal{X}$.

Установим еще некоторые вспомогательные факты. Пополнением двудольного Q -графа $G = (V, U, g)$ назовем любой Q -граф $H = (V \cup U, h)$ такой, что h совпадает с g на $V \times U$. Пополнение, в котором $h(x, y) = \alpha$ для всех $(x, y) \in V^{(2)}$ и $h(x, y) = \beta$ для всех $(x, y) \in U^{(2)}$, обозначим через $G[\alpha, \beta]$.

Лемма 1. Для любого графа $G \in \mathcal{B}(P)$ существует такой граф $H \in \mathcal{B}(P)$, в любом пополнении которого имеется подграф, изоморфный $G[\alpha, \beta]$ при некоторых α, β .

Доказательство. Пусть $G = (A, B, g)$, $|A| = a$, $|B| = b$. Положим

$$k = \binom{R_q(b)}{b}, \quad p = ka, \quad m = \binom{R_q(p)}{p},$$

где R_q — функция Рамсея, упомянутая во введении. Возьмем два непересекающихся множества C и D , $|C| = R_q(p)$, $|D| = mR_q(b)$. У множества C имеется ровно m подмножеств мощности p . Обозначим их C_1, \dots, C_m . Каждое из множеств C_i разобьем на k подмножеств, по a элементов в каждом, обозначим эти подмножества $C_{i,1}, \dots, C_{i,k}$. Множество D разобьем на m подмножеств мощности $R_q(b)$ каждое, обозначим эти подмножества D_1, \dots, D_m . У множества D_i имеется ровно k подмножеств мощности b , обозначим их $D_{i,1}, \dots, D_{i,k}$.

Для каждой пары $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, k\}$ придумаем следующее. Возьмем две произвольные биекции

$$\varphi: C_{i,j} \rightarrow A, \quad \psi: D_{i,j} \rightarrow B.$$

Для всех $x \in C_{i,j}$, $y \in D_{i,j}$ положим $h(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y))$. Иначе говоря, на каждой паре множеств $C_{i,j}, D_{i,j}$ строится двудольный граф, изоморфный G . Это построение непротиворечиво, так как множества $C_{i,j} \times D_{i,j}$, соответствующие разным парам (i, j) , не пересекаются. Доопределив функцию h произвольным образом на остальных парах из $C \times D$ значениями из P , получим двудольный граф $H = (C, D, h)$.

Пусть F — пополнение графа H . По теореме Рамсея в C имеется подмножество C_i такое, что в $H(C_i)$ все ребра имеют один цвет, скажем, α , а в множестве D_i имеется подмножество $D_{i,j}$ такое, что в $H(D_{i,j})$ все ребра тоже имеют один цвет β . Но тогда $H(C_{i,j} \cup D_{i,j})$ изоморфен $G[\alpha, \beta]$. Лемма доказана.

Для $P \subseteq Q$, $\alpha, \beta \in Q$ положим

$$B(P, \alpha, \beta) = \{G[\alpha, \beta]: G \in B(P)\}.$$

Иначе говоря, $B(P, \alpha, \beta)$ — это множество всех таких Q -графов, у которых множество вершин можно разбить на две части, одна из которых порождает граф из $\mathcal{O}(\alpha)$, другая из $\mathcal{O}(\beta)$, а цвета ребер, соединяющих вершины из разных частей, принадлежат P .

Пусть \mathcal{X} — множество Q -графов. Обозначим через $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ множество всех двудольных Q -графов, имеющих пополнения, принадлежащие \mathcal{X} .

Лемма 2. Если \mathcal{X} — наследственный класс Q -графов, $P \subseteq Q$ и $\mathcal{B}(P) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X})$, то существуют такие α и β , что $\mathcal{B}(P, \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{X}$.

Доказательство. Допустим, что для любой пары $(\alpha, \beta) \in Q^{(2)}$ существует граф $L_{\alpha, \beta} \in \mathcal{B}(P, \alpha, \beta)$, не содержащийся в \mathcal{X} . Пусть $L_{\alpha, \beta} = G_{\alpha, \beta}[\alpha, \beta]$ для некоторого двудольного графа $G_{\alpha, \beta} \in \mathcal{B}(P)$. Возьмем какой-либо граф $G \in \mathcal{B}(P)$, в котором для каждой пары $(\alpha, \beta) \in Q^{(2)}$ содержится подграф, изоморфный $G_{\alpha, \beta}$ (существование такого G очевидно). По лемме 1 существует граф $H \in \mathcal{B}(P)$, для любого пополнения F которого найдутся такие α и β , что в F содержится подграф, изоморфный $G[\alpha, \beta]$. Но тогда в F имеется подграф, изоморфный $L_{\alpha, \beta}$. Отсюда следует, что ни одно пополнение графа H не принадлежит \mathcal{X} , то есть $H \notin \mathcal{C}(\mathcal{X})$, а это противоречит условию $\mathcal{B}(P) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$. Лемма доказана.

3. Основной результат

Теорема 3. Пусть \mathcal{X} — наследственный класс Q -графов. Следующие утверждения равносильны:

- (1) $h(\mathcal{X}) > 0$;
- (2) $h(\mathcal{X}) \geq \frac{1}{2} \log_q 2$;
- (3) существует такое $P \subseteq Q$, $|P| = 2$, что $\mathcal{B}(P) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$;
- (4) существует такое $P \subseteq Q$, $|P| = 2$, и такие $\alpha, \beta \in Q$, что $\mathcal{B}(P, \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{X}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{X})$. Тогда это наследственный класс двудольных графов и $|\mathcal{Y}_n| \leq |\mathcal{X}_{2n}|$ для любого n , откуда получаем, что

$$h(\mathcal{Y}) \leq 2h(\mathcal{X}).$$

С другой стороны, каждому графу $G \in \mathcal{X}_{2n}$ можно поставить в соответствие тройку (G_1, G_2, H) , где $G_1 = G(\{1, 2, \dots, n\})$, $G_2 = G(\{n+1, n+2, \dots, 2n\})$, H — двудольный граф с долями $\{1, 2, \dots, n\}$ и $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, пополнением которого является граф G . Это соответствие инъективно, следовательно, $|\mathcal{X}_{2n}| \leq |\mathcal{X}_n|^2 |\mathcal{Y}_n|$, откуда,

$$h(\mathcal{X}) \leq h(\mathcal{Y}).$$

Из полученных неравенств и теоремы 2 следует равносильность утверждений (1), (2), (3). Справедливость импликации (3) \implies (4) следует из леммы 2, а (4) \implies (1) из очевидных оценок для числа графов в множестве $\mathcal{B}_n(P, \alpha, \beta)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., Наследственные классы и кодирование графов. *Проблемы кибернетики* (1982) 39, 151–164.
2. Алексеев В. Е., Об энтропии фрагментно замкнутых классов графов. В кн.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*. Горьковский госуниверситет, Горький, 1986, с. 5–15.
3. Алексеев В. Е., Об энтропии двумерных фрагментно замкнутых языков. В кн.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*. Горьковский госуниверситет, Горький, 1987, с. 5–13.
4. Алексеев В. Е., Область значений энтропии наследственных классов графов. *Дискретная математика* (1992) 4, №2, 148–157.

Статья поступила 15.07.1999.