E. V. Malinnikova, V. P. Havin, Uniform approximation by harmonic differential forms. A constructive approach, *Algebra i Analiz*, 1997, Volume 9, Issue 6, 156–196

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ. КОНСТРУКТИВНЫЙ ПОДХОД

© Е. В. Малинникова, В. П. Хавин

Цель работы — дать конструктивное доказательство теорем Рунге и Гартогса–Розенталя для гармонических дифференциальных форм в евклидовом пространстве (в [7] эти теоремы были доказаны с помощью двойственности). Преобразовав (с использованием известной в геометрической теории меры „формулы коплощади") интегралы Коши и Коши–Грина, мы получаем явную конструкцию приближений

Введение

0.1. В этой работе продолжается изучение аппроксимационных свойств гармонических дифференциальных форм, начатое в [7], где были получены многомерные аналоги теорем Рунге и Гартогса–Розенталя. Классические варианты этих теорем доказываются явным построением аппроксимирующих рациональных функций. Обобщения, полученные в [7], доказаны с помощью комбинаций трех двойственностей: Хана–Банаха, Де Рама и Александера–Понтрягина. Из этих доказательств, при всей их простоте и краткости, совершенно не усматривается сколько-нибудь явная *конструкция* приближений. В настоящей работе мы даем вполне конструктивное доказательство теоремы Гартогса–Розенталя для гармонических форм. Что касается теоремы Рунге, то мы полностью избавляемся от теоремы Хана–Банаха. Наше доказательство вполне конструктивно, если приближаемая форма точна и коточна; теоремы Де Рама и Александера–Понтрягина используются только для редукции к этому частному случаю (как и в [7]).

0.2. Ключевой момент этой работы — применение формул Кронрода–Федерера, представляющих некоторые точные дифференциальные формы в виде интеграла циклов (понимаемых как дерамовские потоки). Нужные нам варианты этих замечательных формул приводятся (с доказательством) в §1 (см. также п. 4.1).

Ключевые слова: гармоническая дифференциальная форма, теорема Рунге.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 96-01-00541) и NSERC.

Как и в классическом случае (приближения рациональными дробями на компактных множествах в $\mathbb{C}$), мы исходим из интегральной формулы Коши (в теореме Рунге) и формулы Коши-Грина (в теореме Гартогса-Розенталя); об этих формулах см. [7]. Однако в размерности три и выше эти формулы непригодны для *непосредственного* использования — по той причине, что интегральные суммы, отвечающие интегралам Коши и Коши-Грина, утрачивают гармоничность. В п. 1.4 и 3.1 мы преобразуем эти интегралы с помощью формул Кронрода-Федерера, что приводит к новой записи, которая, несмотря на некоторую „неканоничность" (зависимость от систем координат и разбиений единицы), представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес. В результате этих преобразований сами собой появляются формы Кулона и Био-Савара, введенные в [7], а интегралы Коши и Коши-Грина приобретают вид, приспособленный к конструкции приближений.

0.3. В теореме Рунге, доказанной в §2, конструкция приближений довольно проста и похожа на классическую. Это же можно сказать и о теореме Гартогса-Розенталя, доказанной в §3; однако здесь значительно усложняется *оценка* точности приближения.

В §4 собраны различные дополнения к основному тексту (§1–3): мы обсуждаем вариант теоремы Рунге, доказанный Дагером и Преса [13], приводим для удобства читателя доказательство нужного нам варианта теоремы двойственности Александера-Понтрягина (средствами теории дифференциальных форм) и устанавливаем некоторое усиление теоремы Гартогса-Розенталя (конструктивным доказательством которого мы не располагаем).

0.4. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений работы [7]. В частности, буква E всегда будет обозначать вещественное евклидово ориентированное пространство размерности n; $\mathcal{H}^k$ будет обозначать k-мерную меру Хаусдорфа в E; мы часто будем писать v вместо $\mathcal{H}^n$. Символ $\mathcal{M}_r$ обозначает множество всех возрастающих мультииндексов размерности r:

$$\mathcal{M}_r := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r : \alpha_j \in \mathbb{Z}_+, 1 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leqslant n\}.$$

Через $M^r(O)$, где $O \subset E$, мы обозначаем множество всех r-(ко)векторнозначных зарядов (счетно аддитивных функций множества), заданных на системе всех ограниченных борелевских множеств A с $\operatorname{Clos} A \subset O$. Наконец, $\mathcal{D}_r(O)$ обозначает множество всех r-форм ω класса C^∞ с компактным носителем $\operatorname{spt}\omega$, содержащимся в открытом множестве $O \subset E$; $\mathcal{E}_r(O)$ — множество всех r-форм класса C^∞, заданных в O. В [7] в сжатом виде изложены все нужные нам сведения по теории потоков (основной источник—монография [10]).

0.5. Пусть $n \geqslant 3$, T — p-мерный поток в E с компактным носителем (короче, $T \in \mathcal{E}'_p$), $0 \leqslant p \leqslant n$, а $\varphi \in \mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(E)$. Положим $U^T[\varphi] := T[U^\varphi]$, где U^φ — ньютоновский потенциал формы φ (понимаемый как p-форма класса $\mathcal{E}_p := \mathcal{E}_p(E)$).

Тем самым определен p-мерный поток U^T, называемый *ньютоновским потенциалом потока* T. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{n-p}$ — *замкнутый* поток. Поток $BS^T := c_n^{-1}\delta U^T$, где δ — оператор кодифференцирования, а $c_n := \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, называется *потоком Био–Савара, отвечающим* T. Это $(n-p+1)$-мерный коточный поток, причем $dBS^T = T$, так что вне $\operatorname{spt} T$ он совпадает с некоторой гармонической $(p-1)$-формой, называемой *формой Био–Савара, отвечающей потоку* T.

Равенство $*\operatorname{Coul}^T = (-1)^{np+p}BS^T$ определяет так называемый *поток Кулона, отвечающий потоку* T. Его размерность равна $p-1$; он точен, и $\delta\operatorname{Coul}^T = T$; вне $\operatorname{spt} T$ он совпадает с гармонической формой — так называемой *формой Кулона, отвечающей потоку* T.

0.6. Пусть $1 \leqslant r < n$, γ и Γ — конечные циклы в E размерностей $n-r-1$ и $r-1$ соответственно. Потоки вида BS^γ и $\operatorname{Coul}^\Gamma$ (и r-формы $BS^\gamma|(\operatorname{spt}\gamma)'$, $\operatorname{Coul}^\Gamma|(\operatorname{spt}\Gamma)'$) называются *элементарными*. Эти понятия и их связь с рациональными функциями комплексной переменной обсуждаются в [7].

0.7. В работе [7] доказана следующая „теорема Рунге“. *Пусть $K \subset E$ — компактное множество, ω — r-форма, гармоническая вблизи K, $\varepsilon > 0$. Найдется такая элементарная r-форма Ω, что $|\Omega(x) - \omega(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in K$ ($|\omega|$ обозначает евклидову норму r-вектора ω). Пусть V — окрестность множества K, содержащаяся со своей границей в области задания формы ω, причем $\operatorname{Clos} V$ — гладкое n-мерное компактное многообразие с краем. Можно считать, что $\Omega = BS^\gamma + \operatorname{Coul}^\Gamma + \Omega_1$ вблизи $\operatorname{Clos} V$, $\gamma = \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_l\gamma_l$, $\Gamma = \beta_1\Gamma_1 + \dots + \beta_m\Gamma_m$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ и $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ суть соответственно произвольные базисы $(n-r-1)$-мерных и $(r-1)$-мерных компактных гомологий множества $E \setminus \operatorname{Clos} V$, а Ω_1 — элементарная форма, отвечающая циклу, расположенному и компактно гомологичному нулю в произвольном наперед заданном открытом множестве $O \subset (\operatorname{Clos} V)'$, пересекающемся с любой компонентой связности $(\operatorname{Clos} V)'$; в качестве Ω_1 можно выбрать как форму Кулона, так и форму Био–Савара.*

Это утверждение будет конструктивно доказано в §2 и в §4, п. 2,3.

0.8. Пусть p — целое число, $1 \leqslant p \leqslant n$, b — некоторый ортонормальный базис пространства E. Множество $A \subset E$ называется *p-невидимым в базисе b*, если его ортогональная проекция на любую p-мерную координатную плоскость базиса b имеет нулевую p-мерную меру. Множество A называется *p-невидимым*, если оно p-невидимо в некотором базисе. О связях этого понятия с другими характеристиками малости множеств см. [7].

0.9. Приведем формулировку „теоремы Гартогса–Розенталя“, доказанной в [7] и конструктивно передоказанной в §3 настоящей работы.

Пусть $1 \leqslant r < n$, а компактное множество $K \subset E$ r'-невидимо, где $r' = \min(r+1, n-r+1)$. Тогда любую r-форму, непрерывную на K, можно равномерно на K приблизить r-формами, гармоническими вблизи K. В [7, с. 144] показано, что „показатель невидимости“ r' здесь нельзя увеличить.

В п. 4 настоящей работы получено существенное усиление этой теоремы.

§1. Формулы Кронрода–Федерера и преобразование интегральной формулы Коши для гармонических форм

1. Формула Кронрода. Так называется формула

$$\int_O |\nabla F| dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(l_F(t))dt, \tag{1.1}$$

где F — гладкая вещественная функция, заданная в открытом множестве $O \subset E$, а $l_F(t) := \{p \in O : F(p) = t\}$ ([1–4]). Мы сейчас увидим, что формула (1.1) имеет потоковый смысл: дифференциальная форма dF, рассматриваемая как поток, разлагается на потоки, порождаемые поверхностями $l_F(t)$. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, а также для удобства читателя, мы приведем здесь полное доказательство потокового варианта формулы (1.1).

А) Пусть $t \in \mathbb{R}$ — некритическое значение функции F ($\nabla F(p) \neq 0$, если $t = F(p)$), и пусть $\vec{\nu}(p)(= \vec{\nu}_F(p)) := \nabla F(p)/|\nabla F(p)|$. Уровень $l(t) := F^{-1}(\{t\})$ есть гладкая гиперповерхность в O; поле $\vec{\nu}|l(t)$ определяет ее сторону. Мы будем считать, что гиперповерхность $l(t)$ ориентирована этим полем. Она порождает $(n-1)$-мерный поток в O:

$$l(t)[\alpha] := \int_{l(t)} \alpha \quad (\alpha \in \mathcal{D}_{n-1}(O)),$$

который можно отождествить с зарядом μ_t класса $M^1(O)$:

$$\mu_t(A) = \int_{A \cap l(t)} \vec{\nu} d\mathcal{H}^{n-1}$$

для любого ограниченного борелевского $A \subset O$ с замыканием, содержащимся в O.

Б) Считая по-прежнему, что t — некритическое значение функции F, определим n-мерное многообразие (с краем) $G_F(T)$:

$$G_F(t) := \begin{cases} -\{p \in O : F(p) \geqslant t\}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ \{p \in O : F(p) \leqslant t\}, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Мы рассматриваем $G_F(t)$ как n-мерный поток (в O); $l(t)$ есть его граница. Таким образом, уровни $l(t)$ (при некритических t) гомологичны нулю в O; если же носитель F компактен и лежит в O, то множества $G_F(t)$ — *компактные* многообразия с краем, а потоки $l(t)$ *компактно* гомологичны нулю в O.

В) Теперь мы можем сформулировать нужный нам результат.

Пусть $\alpha \in \mathcal{D}_{n-1}(O)$. Функция $t \mapsto l_F(t)[\alpha]$ определена и непрерывна на множестве всех некритических значений t функции F (т.е. почти везде в $\mathbb{R}$ — по лемме Сарда).

Теорема. *Функция* $t \mapsto l_F(t)[\alpha]$ *суммируема в* $\mathbb{R}$ *(по мере Лебега), и*

$$\int\limits_O dF \wedge \alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{l_F(t)} \alpha \Big) dt. \tag{1.2}$$

Иными словами, в смысле теории потоков

$$dF = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} l_F(t) dt.$$

Г) Теорема вытекает из следующего хорошо известного утверждения [1–5].

Лемма. *Пусть* p *— неотрицательная функция, заданная и измеримая по Лебегу в* O*. Тогда*

$$\int\limits_O p|\nabla F| dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{l_F(t)} p d\mathcal{H}^{n-1} \Big) dt$$

(внутренний интеграл справа определен при п. в. $t \in \mathbb{R}$ *и представляет собою измеримую функцию в* $\mathbb{R}$*). В частности,*

$$\int\limits_O |\nabla F| dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(l_F(t)) dt.$$

Доказательство. Зафиксируем такую точку $p_0 \in O$, что $\nabla F(p_0) \neq 0$, и орт $\vec{\nu_0} := \vec{\nu_F}(p_0)$; пусть $X = X_p$ — гиперплоскость в E, ортогональная $\vec{\nu_0}$. Условимся отождествлять точку $p \in E$ с парой (x, y), где x — ортогональная проекция точки p на X, а $y := \langle p, \vec{\nu} \rangle$. Положим $Z = X \times \mathbb{R}$, $R_{p_0}(p) = R_{p_0}(x, y) = (x, F(p))$ $(p \in O)$. Под действием выпрямляющего отображения $R_{p_0} : O \to Z$ уровень $l(t^*)$ $(= l_F(t^*))$ функции F переходит в часть гиперплоскости $t = t^*$ пространства Z. Точке $p_0 = (x_0, y_0)$ отвечают такая окрестность $V(p_0) \subset O$ точки p_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p) \Big(= \frac{\partial F}{\partial \nu_0}(p) \Big) \neq 0 \quad \text{при } p \in V(p_0);$$

$r = R_{p_0} | V(p_0)$ есть диффеоморфизм множества $V(p_0)$ на цилиндр $W := B(x_0, \varepsilon) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, где $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Обозначим через $\Phi (= \Phi_{p_0})$ диффеоморфизм $W \to V(p_0)$, обратный к r:

$$\Phi(x, t) := (x, \varphi(x, t)) = (x, \varphi_t(x)) \quad ((x, t) \in W).$$

Пусть функция $p \geqslant 0$ измерима по Лебегу и сосредоточена в $V(p_0)$. Перепишем интеграл $J := \int\limits_O P|\nabla F|dv$, вводя новые координаты (x,t) вместо (x,y). Очевидно, $\det \Phi'(w) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(w)$ $(w \in W)$, а из тождества $F(x,\varphi(x,t)) \equiv t$ $(w = (x,t) \in W)$ следует, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(w) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\Phi(w))\right)^{-1}$, $\nabla_x\varphi(w) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\Phi(w))\right)^{-1}\nabla_x F(\Phi(w))$ $(w \in W)$. Поэтому

$$J = \int\limits_W (p \circ \Phi) \cdot |\nabla F \circ \Phi| \cdot \left|\frac{\partial F}{\partial y} \circ \Phi\right|^{-1} dv = \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} j(t)dt,$$

$$j(t) := \int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon} p(x,\varphi_t(x))k_t(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

$$\begin{aligned} k_t(x) &:= |\nabla F(\Phi(w))| \left|\frac{\partial F}{\partial y}(\Phi(w))\right|^{-1} \\ &= \left(|\nabla_x F(\Phi(w))|^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(w)\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left|\frac{\partial F}{\partial y}(\Phi(w))\right|^{-1} \\ &= (|\nabla_x\varphi_t(x)|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (w = (x,t) \in W). \end{aligned}$$

Таким образом, $k_t(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x)$ есть элемент $dS_t(x)$ $(n-1)$-мерной меры графика Γ_t отображения φ_t или, что то же, $d\mathcal{H}^{n-1}(x)$ (см. [2, 4, 5]). Итак, $j(t) = \int\limits_{\Gamma_t} pd\mathcal{H}^{n-1}$. Заметим, что $\Gamma_t = V(p_0) \cap l(t)$ (при п. в. t, $|t-t_0| < \varepsilon$), $V(p_0) \cap l(t) = \varnothing$ $(|t-t_0| \geqslant \varepsilon)$, а $p \equiv 0$ вне $V(p_0)$. Поэтому

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{l(t)V(p_0)} pd\mathcal{H}^{n-1}\right)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{l(t)} pd\mathcal{H}^{n-1}\right)dt. \tag{1.3}$$

С помощью разбиения единицы нетрудно доказать совпадение J и последнего интеграла в (1.3) для *любой* измеримой $p \geqslant 0$. В общем случае

$$J = \int\limits_O p|\nabla F|dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{l(t)} pd\mathcal{H}^{n-1}\right)dt.$$

В первом интеграле мы фактически интегрируем по множеству $\{\nabla F \neq 0\}$, а во втором по множеству некритических значений t функции F. •

Д) Завершим доказательство теоремы. Формула (1.2) легко следует из леммы. Действительно, пусть $\alpha \in \mathcal{D}_{n-1}(O)$. Имеем

$$I := \int\limits_O dF \wedge \alpha = \int\limits_O p|\nabla F|dv, \quad p := \langle \nu, *\alpha \rangle.$$

Применяя лемму, находим

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{l(t)} p d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt.$$

Если t — некритическое значение функции F, то внутренний интеграл есть $l(t)[\alpha]$. •

E) „Потоковое" равенство (1.2) можно истолковать как равенство векторных зарядов. Оно означает, что заряд $\mu := \nabla F v$ (класса $M^1(O)$) разлагается в интеграл зарядов μ_t, см. А):

$$\int\limits_O p \nabla F dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{l(t)} p\vec{v} d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt$$

для любой ограниченной борелевской (скалярной) функции p с компактным носителем в O. В частности, если A — ограниченное борелевское множество, $\operatorname{Clos} A \subset O$, то

$$\int\limits_A \nabla F dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{l(t)\cap A} \vec{v} d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt \left(= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_t(A) dt \right).$$

Это разложение, согласно лемме, сопровождается разложением массы заряда μ в соответствующий интеграл масс:

$$\int\limits_A |\nabla F| dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mu_t|(A) dt$$

(заметим, что $|\mu_t|(A) = \mathcal{H}^{n-1}(l(t) \cap A)$).

Разложение форм в интеграл плоских циклов. Из формулы Кронрода вытекает полезная формула разложения форм вида $dF \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{r-1}$ в интеграл циклов.

А) Пусть Π — p-мерная аффинная плоскость в E, G — p-мерное гладкое подмногообразие (с краем) плоскости Π. Будем считать, что ориентации плоскости Π и многообразия G индуцированы из E; тем самым G становится p-мерным потоком:

$$G[\alpha] := \int\limits_G \alpha = \int\limits_G \alpha_\Pi \quad (\alpha \in \mathcal{D}_p),$$

где α_Π — p-форма, индуцированная на Π формой α. Мы будем называть поток G *плоским p-мерным многообразием*. Заметим, что компактное плоское p-мерное многообразие есть конечная цепь ([6]).

Б) Пусть F — функция класса $C^1(E)$ с компактным носителем, $e_1, \dots, e_{r-1}$ — попарно ортогональные орты в E $(2 \leqslant r \leqslant n)$, $\omega = dF \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{r-1}$. Положим $p := n - r$. Результаты п. 1 приводят, как мы сейчас увидим, к разложению r-формы ω (рассматриваемой как p-мерный поток) в интеграл p-циклов, ограничивающих плоские $(p+1)$-многообразия, содержащиеся в $\operatorname{spt}\omega$.

Положим $e = e_1 \wedge \dots \wedge l_{r-1}$, и пусть $e^\perp$ — ортогональное дополнение (в E) плоскости, натянутой на $e_1, \dots, e_{r-1}$. Рассмотрим $(r-1)$-параметрическое семейство $(p+1)$-мерных плоскостей $(\Pi(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}^{r-1}}$:

$$\Pi(\tau) := e^\perp + \sum_{j=1}^{r-1} \tau_j e_j, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}.$$

Точку $x \in E$ мы не будем отличать от пары $(\sigma, \tau) \in e^\perp \times \mathbb{R}^{r-1}$, где $x \in \Pi(\tau)$ и $\sigma = x - \sum\limits_{j=1}^{r-1} \tau_j e_j$. Пусть $\alpha \in \mathcal{D}_p$. Положим

$$F_\tau(\sigma) := F(x), \qquad \Phi := *(Fe \wedge d\alpha),$$

α_τ — форма в $e^\perp$, полученная из α при вложении $e^\perp$ в E, $\sigma \mapsto (\sigma, \tau)$. Заметим, что $*(Fe \wedge d\alpha)(x) = *(F(x)e \wedge (d\alpha)(x)) = F_\tau(\sigma) * (d\alpha)_\tau(\sigma) = F_\tau(\sigma) * d\alpha_\tau(\sigma)$ ($*$ и d в последних двух выражениях обозначают соответствующие операторы в евклидовом пространстве $e^\perp$). Далее,

$$(-1)^r \omega[\alpha] = \int\limits_E Fe \wedge d\alpha = \int\limits_E \Phi dv = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} j(\tau) d\mathcal{H}^{r-1}(\tau),$$

где

$$\begin{aligned} j(\tau) &:= \int\limits_{e^\perp} \Phi(\sigma, \tau) d\mathcal{H}^{p+1}(\sigma) = \int\limits_{e^\perp} F_\tau d\alpha_\tau = -dF_\tau[\alpha_\tau] \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} l_{F_\tau}(t)[\alpha] dt, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $l_{F_\tau} = bG_{F_\tau}$. Последнее равенство в (1.4) следует из формулы (1.2), примененной к евклидову пространству $e^\perp$. Положим $c = (\tau, t) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$, $G_c := G_{F_\tau}(t)$ (как множество G_c совпадает с $G_F \cap \Pi(\tau)$). Возвращаясь к (1.4), находим:

$$\begin{aligned} \omega[\alpha] &= (-1)^{r+1} \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} bG_{(\tau,t)}[\alpha] dt \right) d\mathcal{H}^{r-1}(\tau) \\ &= (-1)^{r+1} \int\limits_{\mathbb{R}^r} bG_c[\alpha] d\mathcal{H}^r(c). \end{aligned}$$

В) Возможность применить теорему Фубини вытекает из следующих оценок: при каждом $\tau \in \mathbb{R}^{r-1}$ и п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda_\alpha(c) := |bG_c[\alpha]| = \Big|\int\limits_{l_\tau(t)} \alpha\Big| \leqslant \max_{x\in E}|\alpha(x)|\zeta(c) \quad (c = (\tau, t),\ l_\tau = l_{F_\tau}),$$

где $\zeta(c) := \mathcal{H}^p(l_\tau(t))$. Далее, согласно (1.1),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r} \zeta(c)d\mathcal{H}^r(c) = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} d\mathcal{H}^{r-1}(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^p(l_\tau(t))dt = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} d\mathcal{H}^{r-1}(\tau)\int\limits_{\Pi(\tau)} |\nabla_\tau F|d\mathcal{H}^{p+1}$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} d\mathcal{H}^{r-1}(\tau)\int\limits_{\Pi(\tau)} |\nabla F|d\mathcal{H}^{p+1} = \int\limits_E |\nabla F|dv$$
$$< +\infty.$$

Эти оценки показывают, что семейство функций (λ_α), где $\alpha \in \mathcal{D}_p$, $\max_{x\in E}|\alpha(x)| \leqslant 1$, имеет мажоранту ζ, суммируемую в $\mathbb{R}^r$ (по мере $\mathcal{H}^r$).

3. Потоки, хорошо разложимые относительно многообразия. Здесь мы получим аналог формулы п. 2 для форм, точных вблизи некоторой гиперповерхности пространства E.

А) Пусть $\mathcal{M}$ — гладкое N-мерное подмногообразие в E, $\pi : B \to \mathcal{M}$ — диффеоморфизм открытого шара $B \subset \mathbb{R}^N$ на $\pi(B)$. Пусть $l+1 \leqslant N$, $g \subset B$ — компактное плоское $(l+1)$-мерное гладкое многообразие с краем. Мы будем называть многообразие вида $\pi(g)$ *элементарным* $(l+1)$-*мерным многообразием на* $\mathcal{M}$, не отличая его от $(l+1)$-мерного потока в E, заданного равенством

$$\pi(g)[\alpha] := \int\limits_{\pi(g)} \alpha = \int\limits_g \pi^*\alpha \quad (\alpha \in \mathcal{D}_{l+1}),$$

где $\pi^*\alpha$ — пересадка формы α на g посредством π.

Б) Пусть T — l-мерный поток в E, сосредоточенный на $\mathcal{M}$; $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{M}$. Предположим, что существует семейство $(G(c))_{c\in\mathbb{R}^k}$ $(l+1)$-мерных потоков в E, обладающих следующими свойствами:

(а) при $\mathcal{H}^k$ — п. в. $c \in \mathbb{R}^k$ $G(c)$ есть элементарное $(l+1)$-мерное многообразие на $\mathcal{M}$, содержащееся в $\operatorname{spt} T$;

(в) функция $c \mapsto bG(c)[\alpha]$ измерима по Лебегу в $\mathbb{R}^k$ для любой формы $\alpha \in \mathcal{D}_l$, а функция $c \mapsto \mathcal{H}^l(bG(c))$ суммируема:

$$j := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^l(bG(c))d\mathcal{H}^k(c) < +\infty;$$

(c) $T[\alpha] = \int_{\mathbb{R}^k} bG(c)[\alpha]d\mathcal{H}^k(c)$ $(\alpha \in \mathcal{D}_l)$. Тогда мы будем говорить, что поток T *хорошо разложим* (*относительно* $\mathcal{M}$).

Хорошо разложимый поток T принадлежит $\mathcal{M}^{n-l}$, а его полная масса не превышает j (т.е. $\int\limits_{\mathbb{R}^k} |bG(c)|d\mathcal{H}^k(c)$). Условие (c) можно понимать как равенство $(n-l)$-векторных зарядов T и $\int\limits_{\mathbb{R}^k} bG(c)d\mathcal{H}^k(c)$.

В) Эти термины понадобятся нам лишь в том частном случае, когда $N = n-1$, а $\mathcal{M}$ есть компактная ориентированная гиперповерхность в E. В этом случае справедлива следующая

Теорема. *Пусть O — окрестность гиперповерхности $\mathcal{M}$, $\omega \in \mathcal{E}_p(O)$. Если форма ω точна, то поток $T = \mathcal{M} \wedge \omega$ есть сумма нескольких потоков, хорошо разложимых относительно $\mathcal{M}$ (здесь $l = n-p-1$).*

Доказательство. По условию $\omega = df$, где $f \in \mathcal{E}_{p-1}(O)$. Пусть $(\alpha_q)_{q=1}^{Q}$ — гладкое разбиение единицы вблизи $\mathcal{M}$ ($\operatorname{spt}\alpha_q \subset O$, $\sum_1^Q \alpha_q \equiv 1$ вблизи $\mathcal{M}$). Имеем

$$T = \sum_{q=1}^{Q} \mathcal{M} \wedge d(\alpha_q f).$$

Выбрав функции α_q должным образом, мы сведем теорему к следующему частному случаю: $f \in \mathcal{D}_{p-1}(O)$, $\operatorname{spt} f \subset O_1$, где открытое множество $O_1 \subset O$ таково, что $O_1\mathcal{M} = \pi(B)$; здесь π — диффеоморфизм открытого шара $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ на $\pi(B)$. Имеем

$$\omega^* := \pi^*\omega = d\pi^* f, \quad \pi^* f \in \mathcal{D}_{p-1}(B), \quad \pi^* f = \sum_{|I|=p-1} F_I dx^I,$$
$$F_I \in \mathcal{D}_0(B), \quad dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}.$$

Итак, форма ω^* есть сумма форм вида $dF \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{p-1}$, рассмотренных в п. 2 ($F \in \mathcal{D}_0(B)$). Для наших целей можно считать, что ω^* *совпадает* с такой формой. В таком случае, согласно п. 2,

$$\omega^* = \int\limits_{\mathbb{R}^p} bg(c)d\mathcal{H}^p(c),$$

где $(bg(c))_{c\in\mathbb{R}^p}$ — построенное в 2Б) семейство плоских l-мерных многообразий, содержащихся в $B \cap \operatorname{spt}\omega^*$. Легко видеть, что тогда T совпадает как поток в E с $\int_{\mathbb{R}^p} bG(c)d\mathcal{H}^p(c)$, где $G(c) := \pi(g(c))$ при $\mathcal{H}^p$-почти всех $c \in \mathbb{R}^p$. В самом деле, если $\alpha \in \mathcal{D}_l$, то

$$
\begin{aligned}
T[\alpha] &= (\mathcal{M} \wedge \omega)[\alpha] = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \alpha = \int_{O_1 \cap \mathcal{M}} \omega \wedge \alpha = \int_B \pi^*(\omega \wedge \alpha) = \int_B \omega^* \wedge \pi^* \alpha \\
&= \omega^*[\pi^*\alpha] = \int_{\mathbb{R}^p} bg(c)[\pi^*\alpha]d\mathcal{H}^p(c) = \int_{\mathbb{R}^p} \pi bg(c)[\alpha]d\mathcal{H}^p(c) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} bG(c)[\alpha]d\mathcal{H}^p(c).
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

(Заметим, что эта выкладка применима к $\alpha \in \mathcal{E}_l$). Семейство $(G(c))$ обладает свойством (в) из определения Б). Действительно, отображение π удовлетворяет условию Липшица в некотором шаре B', строго содержащемся в B и содержащем $\operatorname{spt} \pi^*\omega$; в B' находятся почти все многообразия $bg(c)$. Значит,

$$
\mathcal{H}^l(bG(c)) = \mathcal{H}^l(\pi(bg(c))) \leqslant \operatorname{const} \mathcal{H}^l(bg(c))
$$

при $\mathcal{H}^p$-почти всех $c \in \mathbb{R}^p$; конечность интеграла j следует теперь из леммы п. 1Г). •

Завершим этот пункт двумя замечаниями.

Г) Свобода выбора функций α_q, участвующих в В), позволяет сделать следующий вывод. *Пусть $(O_q)_{q=1}^Q$ — покрытие многообразия $\mathcal{M}$ (относительно) открытыми множествами. Можно считать, что каждый из хорошо разложимых потоков, с суммой которых совпадает T, сосредоточен в одном из O_q.*

Д) Функции F_I (коэффициенты формы ω^*) ограничены. Поэтому интеграл $\int_{\mathbb{R}^k}$ в (1.5) можно заменить интегралом по некоторому шару пространства $\mathbb{R}^k$ (см. п. 1 и 2).

4. Преобразование интегральной формулы Коши. В этом пункте мы применим теорему 3В) к интегральной формуле Коши для точных и коточных гармонических форм. Мы выразим участвующие в этой формуле интегралы через формы Кулона и Био–Савара.

А) Пусть O — открытое множество в E, $D \subset O$ — компактное гладкое n-мерное многообразие с краем. Пусть $\vec{N}$ — поле ортов внешних нормалей на bD. Мы будем считать, что граница bD ориентирована этим полем.

Пусть $\omega \in \mathcal{E}_r(O)$ — форма, гармоническая в O. Тогда

$$
\begin{aligned}
\omega(q) &= -\frac{1}{c_n}\delta_q \int_{bD} \frac{\vec{N}(p) \wedge \omega(p)}{|q-p|^{n-2}} d\mathcal{H}^{n-1}(p) - \frac{\gamma_r}{c_n} d_q * \int_{bD} \frac{\vec{N}(p) \wedge *\omega(p)}{|q-p|^{n-2}} d\mathcal{H}^{n-1}(p) \\
&= -\frac{1}{c_n}\delta_q U^{bD\wedge\omega}(q) - \frac{\gamma_r}{c_n} d * U^{bD\wedge*\omega}(q) \quad (q \in D)
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

($c_n = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, $\gamma_r = (-1)^{nr+n+1}$). Это — формула Коши для гармонических дифференциальных форм; доказательство см., например, в [7, с. 128].

Положим $J(w)(q) := U^{bD\wedge w}(q)$ $(q \in D)$ и преобразуем второе слагаемое в (1.6):

$$\begin{aligned} -d * U^{bD\wedge *\omega}|D &= -d * J(*\omega) = -(-1)^{nr+r} * *d * J(*\omega) \\ &= (-1)^{nr+r+1} * (-1)^{n(n-r+1)+n+1}\delta J(*\omega). \end{aligned}$$

Поэтому $-\frac{\gamma_r}{c_n} d * U^{bD\wedge *\omega} = \frac{\alpha_r}{c_n} * \delta J(*\omega)$, $\alpha_r := (-1)^{nr+r+1}$. Формула Коши (1.6) принимает следующий вид:

$$\omega|D = \frac{1}{c_n}(-\delta J(\omega) + \alpha_r * \delta J(*\omega)).$$

Б) Предположим, что гармоническая r-форма ω точна вблизи множества $\operatorname{Clos} D : \omega = du$, $u \in \mathcal{E}_{r-1}(O')$, O' — открытое множество, содержащее $\operatorname{Clos} D$. Применим результат, полученный в 3В), к потоку $T = bD \wedge \omega$. Запишем $U^T(q) = J(\omega)(q)$ $(q \in D)$ как $\int \alpha dT$, где $\alpha(x) := |q-x|^{2-n}$ при x, близких к bD (T выступает здесь как $(n-r-1)$-векторный заряд). Из 3В) следует, что $T = \sum\limits_{j=1}^{J} T_j$, где T_j — потоки, хорошо разложимые относительно bD:

$$T_j = \int\limits_{\mathbb{R}^r} bG_j(c) d\mathcal{H}^r(c),$$

где семейства $G = G_j$ удовлетворяют условиям (а), (в) из 3Б), $j = 1, \ldots, J$. Далее, имеет место следующее равенство форм:

$$J(\omega)(q) = \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\mathbb{R}^r} U^{bG_j(c)}(q) d\mathcal{H}^r(c) \quad (q \in D)$$

и, наконец,

$$\delta J(\omega) = \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\mathbb{R}^r} \delta U^{bG_j(c)} d\mathcal{H}^r(c) = \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\mathbb{R}^r} BS^{bG_j(c)} d\mathcal{H}^r(c). \tag{1.7}$$

В) Законность применения оператора δ под знаком интеграла в (1.7) вытекает из следующих соображений. Для любого орта $\vec{e} \in E$ и для $\mathcal{H}^r$-почти всех $c \in \mathbb{R}^r$

$$\left|\frac{\partial U_j^c}{\partial \vec{e}}(q)\right| \leqslant \frac{(n-2)\mathcal{H}^{p-1}(bG_j(c))}{(\operatorname{dist}(q, bD))^{n-1}}, \quad p = n - r \;\; (q \in D)$$

(мы полагаем $U_j^c = U^{bG_j(c)}$). Поэтому п. в. в $\mathbb{R}^r$

$$\varphi_j(c,h) := \frac{1}{h}|U_j^c(q+h\vec{e}) - U_j^c(q)| \leqslant \frac{n\mathcal{H}^{p-1}(bG_j(c))}{(\operatorname{dist}(q,\partial D))^{n-1}} =: \psi(c)$$

для всех достаточно малых чисел $h > 0$, $h < h(q)$. Значит, функции $h \mapsto \varphi_j(c,h)$ имеют суммируемую мажоранту ψ (см. свойство (в) в 3Б)), откуда следует возможность дифференцирования по $\vec{e}$ под знаком интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^r} U_j^c(q)d\mathcal{H}^r(c)$.

Г) Из (1.7) вытекает следующее утверждение. *Если гармоническая r-форма ω точна вблизи* $\operatorname{Clos} D$, *то в D форма $\delta J(\omega)$ совпадает с линейной комбинацией форм вида $\int_{\mathbb{R}^r} BS^{bG(c)}d\mathcal{H}^r(c)$, где $(G(c))_{c\in\mathbb{R}^r}$ — семейство потоков, удовлетворяющих условиям* (а) *и* (в) *из* 3Б).

Д) Предположим, что r-форма ω коточна вблизи $\operatorname{Clos} D$, т.е. что $*\omega$ точна вблизи $\operatorname{Clos} D$. Применяя к ней утверждение Г), заключаем, что в D форма $*\delta J(*\omega)$ совпадает с линейной комбинацией форм вида $*\int\limits_{\mathbb{R}^p} BS^{b\widetilde{G}(c)}d\mathcal{H}^p(c)$, или, что то же, форм вида $\int\limits_{\mathbb{R}^p} \operatorname{Coul}^{b\widetilde{G}(c)}\, d\mathcal{H}^p(c)$, где $(\widetilde{G}(c))_{c\in\mathbb{R}^p}$ — семейство потоков, удовлетворяющих условиям (а), (в) из 3Б) (с $l = r-1$).

Е) Преобразование формулы Коши, выполненное в Г) и Д), неканонично — оно предполагает выбор системы координат и разбиения единицы. Отметим, что если $\deg\omega = 1$ (т.е. если ω — векторное поле), то преобразование интеграла $J(\omega)$ можно выполнить вполне канонически. Если $\omega = du$, где u — *функция*, гладкая вблизи ∂D, то для этого можно воспользоваться формулой Кронрода для потока $bD \wedge du$ (т.е. для градиента функции $u|\partial D$ — векторного поля, касательного к ∂D; мы имеем в виду „формулу коплощади“ для римановых многообразий, см. [4]). Коточная часть $\delta J(\omega)$ формы ω запишется как интеграл форм Био–Савара, отвечающих одномерным циклам, лежащим на ∂D и гомологичным нулю на ∂D (т.е. уровням функции $u|\partial D$). Это разложение будет „выпуклым“: оно сопровождается скалярным равенством типа формулы (1.1).

Что касается точной части поля ω, то она в преобразовании не нуждается, так как соответствующий интеграл изначально является интегралом полей Кулона нульмерных циклов.

Возвращаясь к коточной части, заметим, что (при $n = 3$ и $\deg\omega = 1$) ее можно канонически преобразовать в интеграл форм Био–Савара, отвечающих циклам на ∂D (не обязательно гомологичным нулю), даже не предполагая, что ω точна вблизи ∂D — достаточна лишь ее замкнутость. Действительно, тогда одномерный поток $T := bD \wedge \omega$ соленоидален ($T[\nabla\varphi] = 0$ для любой функции $\varphi \in C^\infty(E)$, так что $\operatorname{div} T = 0$), а потому, согласно результатам работы [9], разлагается в интеграл циклов, лежащих на ∂D. Эти циклы суть интегральные кривые динамической системы $\dot{v} = \omega_\tau(v)$, где ω_τ — касательная составляющая поля ω.

§2. Конструктивное доказательство теоремы Рунге

Здесь мы дадим конструктивное доказательство теоремы Рунге для вполне гармонических (т.е. точных и коточных одновременно) форм ω (см. п. 0.7). Случай произвольных гармонических форм сводится к этому с помощью теоремы двойственности Александера–Понтрягина (см. [7]). В п. 4.2 мы приводим доказательство этой теоремы в нужной нам форме. Доказательство утверждения, сформулированного в п. 0.7, полностью завершается в 4.2 Д) и 4.3 Д).

На протяжении этого параграфа буква K будет обозначать компактное множество в E, O — открытую ограниченную окрестность множества K. Пусть φ — бесконечно дифференцируемая функция, заданная в E, равная нулю вблизи K и единице на $E \setminus O$, а $c \in (0,1)$ — некоторое ее некритическое значение. Компакт K содержится во внутренности множества $D = \{p \in E : \varphi(p) \leqslant c\}$, D — гладкое компактное многообразие с краем $bD = \{p \in E : \varphi(p) = c\}$.

1. Приближение интегралов Коши интегральными суммами. Мы имеем здесь в виду интегральную формулу Коши (1.6), преобразованную в соответствии с п. 1.4.

Пусть
$$\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^r} BS^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^r(c), \quad \gamma(c) = bG(c), \tag{2.1}$$

где $(G(c))_{c\in\mathbb{R}^r}$ одно из семейств потоков, участвующих в (1.7). Проверим, что *форму ω можно с произвольной точностью приблизить равномерно на K линейной комбинацией форм вида $bS^{\gamma(c)}$*. Для этого достаточно приближенно заменить интеграл в (2.1) надлежащей интегральной суммой. Чтобы это сделать, заметим, что при $\mathcal{H}^r$-почти всех $c \in \mathbb{R}^r$ и при всех $x \in K$

$$|BS^{\gamma(c)}(x)| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{H}^{p-1}(\gamma(c))/(\mathrm{dist}(K, \partial D))^{n-1} =: \psi(c), \quad p = n - r. \tag{2.2}$$

Поскольку $\int\limits_{\mathbb{R}^r} \psi(c) d\mathcal{H}^r(c) < \infty$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое ограниченное $A \subset \mathbb{R}^r$, измеримое по Лебегу, что $\int\limits_{\mathbb{R}^r \setminus A} \psi(c) d\mathcal{H}^r(c) < \varepsilon$, и ψ ограничена на A. Понятно, что

$$\left|\omega(x) - \int\limits_A BS^{\gamma(c)}(x) d\mathcal{H}^r(c)\right| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

Очевидно, семейство форм $(BS^{\gamma(c)})_{c\in A}$ равномерно ограничено (см. (2.2)) и равностепенно непрерывно на K (это следует из конечности $\sup_A \psi$ и простой оценки градиентов коэффициентов форм $BS^{\gamma(c)}$). Пусть $\delta > 0$ — малое число, $x_1, \dots, x_p$ — δ-сеть на K. Легко построить такое измеримое разбиение $(A_q)_{q=1}^Q$ множества A, что при любых $c_q \in A_q$ $(q = 1, \dots, Q)$

$$\left|\omega(x) - \sum_{q=1}^{Q} BS^{\gamma(c_q)}(x) \cdot \mathcal{H}^r(A_q)\right| < 2\varepsilon \tag{2.3}$$

при $x = x_1, \dots, x_P$. При должном выборе числа $\delta = \delta(\varepsilon)$ неравенство (2.3) будет выполняться для всех $x \in K$ (с 3ε вместо 2ε).

Б) Точно такое же рассуждение дает возможность приближенно заменить $\int\limits_{\mathbb{R}^p} \mathrm{Coul}^{\Gamma(c)}\, d\mathcal{H}^p(c)$ ($\Gamma(c) = b\widetilde{G}(c)$) равномерно на K линейной комбинацией форм $\mathrm{Coul}^{\Gamma(c)}$.

Подведем итоги. *Любую r-форму ω, вполне гармоническую вблизи* $\mathrm{Clos}\, D$, *можно приблизить равномерно на K линейными комбинациями r-форм Кулона и Био–Савара, порождающие циклы которых расположены на поверхности bD и гомологичны нулю на ней.* Более того, можно считать, что эти циклы и ограничиваемые ими цепи целиком содержатся в множествах, образующих произвольное наперед заданное покрытие поверхности bD (см. 1.3 Г)).

2. Подготовка к „выводу полюсов".

А) Пусть M — одна из связных компонент множества bD. Она содержится в связной компоненте A множества $K' := E \setminus K$. Зафиксируем открытый шар $b \subset A$ с центром P и радиусом R. Каждую точку $x \in M$ можно соединить с P путем, расположенным в A. Точнее говоря, для любой точки $x \in M$ найдется такая непрерывная вектор-функция $l_x : [0,1] \to E$, что $l_x(0) = 0$, $l_x(1) = P - x$, $x + l_x(u) \in A$ ($0 \leqslant u \leqslant 1$). Легко видеть, что для каждой точки $x \in M$ найдется такое число $\rho(x) \in (0, R)$, что при любом $y \in B(x, \rho(x))$ все точки $y + l_x(u)$ ($u \in [0,1]$) остаются в A и удалены от K по крайней мере на расстояние $\rho(x)$. Иными словами, кусок $B(x,\rho(x)) \cap \mathcal{M}$ поверхности bD можно как единое целое непрерывно доставить в шар b, оставаясь на расстоянии $\geqslant \rho(x)$ от K. При этом в шар b автоматически будет доставлено любое элементарное многообразие $G \subset B(x,\rho(x)) \cap \mathcal{M}$ (см. 1.3 А)).

Выберем такое *конечное* $X \subset \mathcal{M}$, что семейство шаров $\big(B(x, 2\rho(x)/3)\big)_{x\in X}$ покрывает $\mathcal{M}$. Пусть G — элементарное $(n-r)$-мерное подмногообразие поверхности $\mathcal{M}$, содержащееся в одном из этих шаров, $\gamma := bG$.

Мы докажем, что *r-форму BS^γ можно приблизить равномерно на K линейными комбинациями r-форм Био–Савара, отвечающих циклам, лежащим в b.* Аналогичное утверждение верно и для форм Кулона; доказательство теоремы Рунге будет тем самым в основном завершено.

Следующие ниже рассуждения представляют собою модификацию классической процедуры „вывода полюсов". Отметим два технических отличия. Во-первых, мы „выводим" не точки, а целые куски поверхности $\mathcal{M}$ вместе с содержащимися в них циклами. Во-вторых, вместо обычного разложения ядер Коши *и их степеней* в степенные ряды мы используем (для соответствующих ядер) лагранжеву интерполяцию (см. ниже Б)). Это позволяет избежать роста порядков выводимых особенностей: на всех этапах „вывода" мы получаем формы Био–Савара (или Кулона), а не их производные произвольного порядка.

Б) Обозначим через G_M множество всех функций g комплексной переменной, аналитических в круге $\{|z| < 3\}$ и удовлетворяющих неравенству

$\sup\{|g(z)| : |z| < 3\} \leqslant M$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, $t_0, t_1, \dots, t_n$ — любой набор попарно различных точек сегмента $[0, \varepsilon]$, а $\Pi_n(g)$ — n-й многочлен Лагранжа функции g, построенный по узлам t_j. Тогда *для любой функции* $g \in G_M$

$$\max_{[0,1]} |g - \Pi_n(g)| \leqslant \frac{2M}{(2-\varepsilon)^{n+1}}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Положим $\Omega(z) = (z - t_0)\dots(z - t_n)$. Как известно (см., например, [8, с. 447]), при $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |g(x) - \Pi_n(g)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{g(\zeta)\Omega(x)}{(\zeta - x)\Omega(\zeta)} d\zeta \right| \\ &\leqslant 2M \max\left\{ \frac{|\Omega(x)|}{|\Omega(\zeta)|} : x \in [0,1], |\zeta| = 2 \right\} \end{aligned}$$

(заметим, что $|\zeta - x| \geqslant 1$). Оценка (2.4) следует теперь из того, что $|x - t_k| \leqslant 1$ (ибо x, $t_k \in [0,1]$), $|\zeta - t_k| \geqslant 2 - \varepsilon$ $(k = 0, \dots, n)$. •

В) Напомним, что

$$\Pi_n(g)(1) = \sum_{k=0}^{n} c_k^n g(t_k),$$

где коэффициенты c_k^n (значения „фундаментальных интерполяционных многочленов“ в единице) зависят лишь от узлов t_k, но не от g. Поэтому для любого $\varepsilon \in (0,1)$ можно найти такой номер $n(\varepsilon)$, что для любых попарно различных узлов $t_0, \dots, t_n \in (0, \varepsilon)$

$$\left| g(1) - \sum_{k=0}^{n(\varepsilon)} c_k^{n(\varepsilon)} g(t_k) \right| < \varepsilon$$

для любой функции $g \in G_M$.

Г) Пусть $\sigma > 0$; m, N — натуральные числа, $m < N$; $p \in E \setminus K$, причем $\operatorname{dist}(p, K) \geqslant \sigma$. Зафиксируем какой-нибудь ортонормальный базис в E. С каждой точкой $x \in K$ и с номером j, $1 \leqslant j \leqslant n$, свяжем функцию $f_{x,j}$:

$$f_{x,j}(q) := \frac{(q_j - x_j)^m}{|q - x|^N} \quad (q \in E \setminus K)$$

(x_j, q_j — j-е координаты точек x и q). Заметим, что $f_{x,j}(q) = \Phi(q - x)$, где $\Phi(\lambda) := \lambda_j^m / |\lambda|^N$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Функция Φ аналитична в множестве $\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s^2 > 0\}$, ибо такова функция $\lambda \mapsto (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{N/2}$, совпадающая с $\lambda \mapsto |\lambda|^N$ на $\mathbb{R}^n$ (при должном выборе ветви корня в правой полуплоскости, если N нечетно). Пусть $\vec{v} \in E$, $|\vec{v}| < \sigma/16$. Положим

$$g_{x,p,\vec{v},j}(t) = \Phi(p - x + (1 - t)\vec{v}) \quad (t \in \mathbb{C},\ |t| < 3).$$

Убедимся в том, что *все функции* $g_{x,p,\vec{v},j}$ *принадлежат семейству* G_M *с* $M = M(\sigma, m, N)$.

Доказательство. Положим $\tau := 1 - t$ (так что $|\tau| < 4$). При условиях, наложенных на τ, x, p, $\vec{v}$, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_s \operatorname{Re}[(p_s - x_s) + \tau v_s]^2 &= \sum_s [(p_s - x_s) + (\operatorname{Re}\tau) v_s]^2 - \sum_s (\operatorname{Im}\tau)^2 v_s^2 \\
&\geqslant |p-x|^2 + 2\operatorname{Re}\tau < p - x, \vec{v} > -(\operatorname{Im}\tau)^2 |\vec{v}|^2 \\
&\geqslant |p-x|^2 - 2\cdot 4|p-x||\vec{v}| - 16|\vec{v}|^2 \\
&= \frac{|p-x|^2}{2} + |p-x|\Big(\frac{|p-x|}{2} - 8|\vec{v}|\Big) - 16|\vec{v}|^2 \\
&\geqslant \frac{|p-x|^2}{2} - 16|\vec{v}|^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{16} = \frac{7\sigma^2}{16} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|g_{x,p,\vec{v},j}(t)| &\leqslant \frac{(|p_j - x_j| + 4|v_j|)^m}{|\sum_s \operatorname{Re}[|p_s - x_s| + \tau v_s]^2|^{N/2}} \leqslant \frac{(|p-x| + \sigma/4)^m}{(|p-x|^2/2 - 16|\vec{v}|^2)^{N/2}} \\
&\leqslant \frac{(|p-x| + \sigma/4)^m}{(|p-x|^2/2 - \sigma^2/16)^{N/2}},
\end{aligned}$$

так что в качестве M можно взять $\max_{u \geqslant \sigma}[(u + \sigma/4)^m (u^2/2 - \sigma^2/16)^{-N/2}]$. •

Д) Сопоставив В) и Г), получаем следующий результат. *Если* $\operatorname{dist}(p, K) \geqslant \sigma$, $|\vec{v}| \leqslant \sigma/16$, *то для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *можно найти такой номер* $n(\varepsilon)$, *что*

$$\sup_{x \in K} \Big| f_{x,j}(p) - \sum_{k=0}^{n(\varepsilon)} c_k^{n(\varepsilon)} f_{x,j}(p + \vec{v} - t_k \vec{v}) \Big| < \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где $c_k^{n(\varepsilon)}$ *— коэффициенты, определенные в* В), *а* t_k *— любые попарно различные точки из* $(0, \varepsilon)$.

Иными словами, действие на K „потенциала“ $(p_j - x_j)^m / |p - x|^N$ точки p можно с произвольной точностью приближенно заменить действием линейной комбинации „потенциалов“ смещенных точек $p + \vec{v} - t_k \vec{v}$, $k = 0, \ldots, n(\varepsilon)$, почти совпадающих с $p + \vec{v}$. Коэффициенты соответствующей линейной комбинации — одни и те же для всех точек p, удаленных от K по крайней мере на σ, и для всех $\vec{v}$ — при условии, что $|\vec{v}| \leqslant \sigma/16$.

3. Завершение доказательства: „вывод полюсов“.

А) Положим $\rho := \min \rho(x)$ $(x \in X)$. Зафиксируем точку $x \in X$ и элементарное $(n - r)$-мерное подмногообразие G на bD, содержащееся в $M \cap B(x, 2\rho/3)$. Положим $\gamma = bG$.

Пусть $O = u_0 < u_1 < \cdots < u_L = 1$ — разбиение отрезка $[0,1]$. Достаточно проверить, что *при любом* $k = 0, 1, \ldots, L-1$ *любую* r*-форму вида*

$$\sum_{q=1}^{Q} c_q^k BS^{\gamma + l_x(u_k) + \vec{\eta}_q^k},$$

где $\vec{\eta}_q^k \in E$, $|\vec{\eta}_q^k| \leqslant \frac{\rho k}{3L}$, *можно равномерно на* K *с произвольной точностью приблизить формами вида*

$$\sum_{q=1}^{\tilde{Q}} c_q^{k+1} BS^{\gamma + l_x(u_{k+1}) + \vec{\eta}_q^{k+1}}, \tag{2.5}$$

где $|\vec{\eta}_q^{k+1}| \leqslant \frac{\rho(k+1)}{3L}$.

Предположим, что это утверждение доказано. Начав при $k = 0$ с формы BS^γ ($c_1^0 = 1$, $Q = 1$, $\vec{\eta}_1^0 = 0$) и последовательно применяя его к $k = 1, 2, \ldots, L-1$, мы построим линейную комбинацию форм вида $BS^{\gamma + l_x(1) + \vec{\eta}}$, сколь угодно близкую к BS^γ на K, причем $|\vec{\eta}| \leqslant \rho/3$. Финальные циклы $\gamma + l_x(1) + \vec{\eta}$ находятся в шаре b, так как $l_x(1) = P - x$, $\operatorname{dist}(\gamma, x) < 2\rho/3$, $|\vec{\eta}| \leqslant \rho/3$, $\rho < R$.

Заметим, что при любом $\vec{\eta} \in E$ при условии $|\vec{\eta}| \leqslant p/3$

$$\operatorname{dist}(\gamma + l_x(u) + \eta, K) \geqslant \frac{2\rho}{3} =: \sigma \quad (0 \leqslant u \leqslant 1), \tag{2.6}$$

так как $\operatorname{dist}(\gamma + l_x(u), K) \geqslant \rho$.

Б) Убедимся в том, что утверждение, сформулированное в А), верно, если дробление $(u_k)_{k=0}^L$ отрезка $[0,1]$ достаточно мелко, а именно

$$|l_x(u_{k+1}) - l_x(u_k)| < \sigma/16, \quad k = 0, 1, \ldots, L-1.$$

Зафиксируем индекс k, вектор $\vec{\eta} \in E$, $|\vec{\eta}| \leqslant \frac{\rho k}{3L}$, и положим $\sum := \gamma + l_x(u_k) + \vec{\eta}$. Достаточно проверить, что форму BS^Σ можно сколь угодно точно приблизить на K формой вида (2.5).

Введем в E декартовы координаты и положим

$$A_{\beta(i)}(z) := \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \frac{1}{|z-y|^{n-2}} dy^{\beta \setminus \beta_i} \quad (z \in K),$$

где $\beta \in \mathcal{M}_{n-r}$ — мультииндекс, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-r})$. Коэффициент формы BS^Σ, отвечающий мультииндексу $\alpha \in \mathcal{M}_r$, имеет следующий вид:

$$(BS^\Sigma)_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{n-r} \pm A_{\beta(i)}(z), \quad (z \in K), \tag{2.7}$$

где $\beta \in \mathcal{M}_{n-r}$ — мультииндекс, дополнительный к α. К каждому слагаемому в правой части формулы (2.7) применим результат подпункта 2Д) ($m = 1$, $N = n - 1$). Напомним, что $\mathcal{H}^{n-r-1}(\Sigma) < \infty$. Поэтому, произведя равномерную по $z \in K$ оценку подынтегрального выражения, мы приближенно и сколь угодно точно заменим каждое из чисел $A_{\alpha_i}(z)$ в (2.7) на $\sum_{l=0}^{n(\epsilon)} c_l^{n(\epsilon)} A_{\beta(i)}(z - \vec{v} + t_l \vec{v})$, где $\vec{v} := l_x(u_{k+1}) - l_x(u_k)$ (так что $|\vec{v}| < \sigma/16$), и $0 < t_l\sigma/16 < \frac{\rho}{3L}$. Далее,

$$A_{\beta(i)}(z - \vec{v} + t_l\vec{v}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Sigma + \vec{v} + t_l\vec{v}} \frac{\partial}{\partial y_{\beta_i}} \frac{1}{|z - y|^{n-2}} dy^{\beta \setminus \beta_i},$$

$$\Sigma + \vec{v} + t_l\vec{v} = \gamma + l_x(u_{k+1}) + \vec{\eta} + t_l\vec{v}, \quad |\vec{\eta} + t_l\vec{v}| \leqslant |\vec{\eta}| + t_l\frac{\sigma}{16} < \frac{\rho(k+1)}{3L}.$$

В итоге мы получим приближение на K формы BS^{Σ} формой вида (2.5).

§3. Конструктивное доказательство теоремы Гартогса–Розенталя

Здесь, как и в §2, отправной точкой послужат формулы разложения форм в интегралы циклов (см. §1). На этот раз мы применим их к преобразованию „объемных" интегралов (т.е. интегралов по мере v, а не $\mathcal{H}^{n-1}$, как в п. 1.4).

1. Преобразование формулы Коши–Грина. Этот пункт аналогичен п. 1.4. Здесь мы в том же духе преобразуем формулу Коши–Грина для дифференциальных форм.

А) Пусть φ — форма класса C^∞ с компактным носителем, заданная в E. Тогда (см.[7, с. 128])

$$\varphi = \frac{1}{c_n}\delta U^{d\varphi} + \frac{1}{c_n} dU^{\delta\varphi} = \varphi_c + \varphi_e,$$

где φ_c и φ_e — коточная и точная части формы φ соответственно: если φ — форма степени p, то

$$\begin{aligned}\varphi_e &= \frac{1}{c_n} dU^{\delta\varphi} = (-1)^{np+n+1}\frac{1}{c_n} d * U^{d(*\varphi)} = (-1)^{np+n+p}\frac{1}{c_n} * \delta U^{d(*\varphi)} \\ &= (-1)^{np+n+p} * (*\varphi)_c.\end{aligned}$$

Предположим, что $\varphi = Fe_1 \wedge \dots \wedge e_p$, где F — функция класса C^∞ с компактным носителем, а векторы $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ образуют ориентированный ортнормальный базис в E. Форму

$$d\varphi = dF \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_p$$

можно разложить в интеграл циклов (см. п. 1.2):

$$d\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^{p+1}} \gamma(c) d\mathcal{H}^{p+1}(c), \quad \gamma(c) = bG(c).$$

В обеих частях равенства стоят потоки с компактными носителями. Применяя их к потенциалам пробных форм, получим следующее равенство потоков:

$$U^{d\varphi} = \int\limits_{\mathbb{R}^{p+1}} U^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{p+1}(c).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\varphi_c = \frac{1}{c_n}\delta U^{d\varphi} &= \int\limits_{\mathbb{R}^{p+1}} \frac{1}{c_n}\delta U^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{p+1}(c) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{p+1}} BS^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{p+1}(c).\end{aligned}$$

Б) Далее, $*\varphi = Fe_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n$, и для $(*\varphi)_c$ можно получить такое же представление:

$$(*\varphi)_c = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-p+1}} BS^{\widetilde{\gamma}(c)} d\mathcal{H}^{n-p+1}(c).$$

Тогда точная часть формы φ представится интегралом от потоков Кулона:

$$\begin{aligned}\varphi_e &= (-1)^{np+n+p} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-p+1}} *BS^{\widetilde{\gamma}(c)} d\mathcal{H}^{n-p+1}(c) \\ &= (-1)^{np+1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-p+1}} \mathrm{Coul}^{\widetilde{\gamma}(c)}\, d\mathcal{H}^{n-p+1}(c).\end{aligned}$$

Итак, форму $\varphi = Fe_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ можно представить как сумму интегралов от потоков Кулона и Био–Савара:

$$\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^{p+1}} BS^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{p+1}(c) + (-1)^{np+1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-p+1}} \mathrm{Coul}^{\widetilde{\gamma}(c)}\, d\mathcal{H}^{n-p+1}(c).$$

2. Формулировка основного результата. Начало доказательства.

А) Пусть $0 < r < n$, $r' = \min(r+1, n-r+1)$, и E — n-мерное ориентированное евклидово пространство.

Напомним, что множество $K \subset E$ называется *p-невидимым* $(1 \leqslant p \leqslant n)$, если в некотором ортонормальном базисе проекция K на любую p-мерную координатную плоскость имеет нулевую p-мерную меру Лебега. Если множество p-невидимо, то оно q-невидимо при $p < q \leqslant n$.

Теорема. *Если K — r'-невидимый компакт в E, то любую r-форму, непрерывную на K, можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими в окрестности множества K.*

Для доказательства теоремы достаточно научиться приближать формы класса C_0^∞. Мы рассмотрим коточную и точную части такой формы и докажем, что из $(r+1)$-невидимости множества K следует возможность приближения коточной, а из $(n-r+1)$-невидимости — возможность приближения точной части этой формы.

Б) Данную r-форму класса C_0^∞ можно представить в виде суммы форм вида $\varphi = Fe_1 \wedge \cdots \wedge e_r$, где F — функция класса C_0^∞, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — такой ориентирующий базис в E, что проекции K на $(r+1)$-мерные координатные плоскости имеют $(r+1)$-мерную меру нуль. Зафиксируем форму φ и базис $(e_1, \ldots, e_n)$; отождествим E с пространством $\mathbb{R}^n$. Положим

$$M = (3\sqrt{n} \max |\nabla F|)^{-1}$$

и выберем положительные числа ε и δ; будем считать, что $\delta < \varepsilon$.

Разложим коточную часть φ_c формы φ в интеграл потоков Био-Савара (см. 1А)):

$$\varphi_c = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c), \tag{3.1}$$

где $\gamma(c) = bG(c)$. Сохраняя обозначения п. 1.2Б) (с заменой $r-1$ на r и l на γ), напомним, что

$$G(\tau, t) = G_F(t) \cap \Pi(\tau) \quad ((\tau, t) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r+1}).$$

Обозначим буквой p проектор на r-плоскость, натянутую на векторы $e_1, \ldots, e_r$ так, что

$$\Pi(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = \tau\}.$$

Нам потребуется семейство $\{P_c(j,k)\}$ гиперплоскостей плоскости $\Pi(\tau)$, параллельных координатным плоскостям:

$$\{P_c(j,k) = \{y \in \Pi(\tau) : y_j = Mt + k\varepsilon\}, k \in \mathbb{Z}, r+1 \leqslant j \leqslant n\}, \quad c = (\tau, t) \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Семейство $\{P_c(j,k)\}$ разбивает $(n-r)$-мерную плоскость $\Pi(\tau)$ на кубики с ребром длины ε. Открытые кубики этого разбиения мы будем обозначать через $\Delta_l(c)$. Конечное их число (скажем, при $l = 1, \ldots, L(c)$) пересекает множество $G(c)$. Положим

$$A_l(c) := G(c) \cap \Delta_l(c), \quad 1 \leqslant l \leqslant L(c).$$

Мы не будем отличать множество $A_l(c)$ от соответствующего ему $(n-r)$-мерного потока. Отметим следующие равенства потоков:

$$G(c) = \sum_{l=1}^{L(c)} A_l(c), \qquad \gamma(c) = \sum_{l=1}^{L(c)} \partial A_l(c).$$

Поток $\partial A_l(c)$ соответствует интегрированию по ориентированной поверхности, в которой нам будет удобно различать „плоские" куски границы кубика Δ_l и „кривую" часть границы множества $G(c)$. Положим

$$I_l(c) := \partial A_l(c) \setminus \partial G(c), \qquad J_l(c) := \partial A_l(c) \setminus I_l(c),$$

так что

$$\gamma(c) = \sum_{l=1}^{L(c)} (I_l(c) + J_l(c)).$$

Здесь нам удобно будет считать, что потоки Био–Савара BS^T и Кулона Coul^T определены для *любого* (не обязательно замкнутого) потока T с компактным носителем:

$$BS^T := \frac{1}{c_n}\delta U^T, \qquad \mathrm{Coul}^T := \frac{1}{c_n} dU^{*T}.$$

Заметим, что поток $\partial A_l(c) = I_l(c) + J_l(c)$ замкнут, а потоки $I_l(c)$ и $J_l(c)$ — вообще говоря, незамкнуты.

3. Выделение гармонической части формы φ_c. Перепишем формулу (3.1):

$$\varphi_c = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{\gamma(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l=1}^{L(c)} BS^{\partial A_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c).$$

Выделим из последнего интеграла часть, гармоническую вблизи K. Для этого отметим те потоки $\partial A_l(c)$, носители которых не задевают δ-окрестность K_δ множества K ($K_\delta := \{x \in E : \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$). Положим

$$Q(c) := \{l \in \mathbb{N} : 1 \leqslant l \leqslant L(c),\ \partial A_l(c) \cap K_\delta = \varnothing\},$$
$$R(c) := \{l \in \mathbb{N} : 1 \leqslant l \leqslant L(c),\ \partial A_l(c) \cap K_\delta \neq \varnothing\}.$$

Тогда

$$\gamma(c) = \sum_{l \in Q(c)} \partial A_l(c) + \sum_{l \in R(c)} \partial A_l(c).$$

Каждая из этих двух сумм зависит (как поток) от c измеримым образом. В открытом множестве K_δ каждый поток $BS^{\partial A_l(c)}$, $c \in Q(c)$, совпадает с гармонической формой; поэтому поток

$$T_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in Q(c)} BS^{\partial A_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c)$$

гармоничен в K_δ и, следовательно, совпадает там с гладкой гармонической формой, которую мы обозначим через $\widetilde{\varphi}$. Нашей задачей будет оценить $|\varphi_c - \widetilde{\varphi}|$ на компакте K.

4. План оценки $|\varphi_c - \widetilde{\varphi}|$.

А) Используя введенные обозначения, имеем

$$\begin{aligned}\varphi_c &= T_1 + \textstyle\int_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R(c)} BS^{I_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) + \int_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R(c)} BS^{J_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) \\ &=: T_1 + T_2 + T_3.\end{aligned}$$

Считая фиксированными числа n и r, компакт K и функцию F, докажем, что *существуют такие числа $c(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, зависящие лишь от ε, и такое число $a(\delta)$, зависящее лишь от δ, что неравенства*

$$(a) \quad |T_3[\psi]| \leqslant c(\varepsilon)\|\psi\|_1, \qquad (b) \quad |T_2[\psi]| \leqslant c(\varepsilon)\|\psi\|_1 + b(\varepsilon)a(\delta)\|\psi\|_1 \tag{3.2}$$

выполняются для всякой формы $\psi \in \mathcal{D}_{n-r}(\mathbb{R}^n)$, где $\|\psi\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |\psi| dv$. При этом $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = 0$ и $\lim\limits_{\delta \to 0} a(\delta) = 0$.

Б) Предположим, что неравенства (3.2) доказаны. Тогда для произвольной точки $x \in K$ можно выбрать такую последовательность функций $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\psi_j \geqslant 0$, $\operatorname{spt}\psi_j \subset K_\delta \cap B(x, 1/j)$ и $\|\psi_j\|_1 = 1$.

Не отличая формы φ_c и $\widetilde{\varphi}$ от соответствующих им потоков, имеем

$$\begin{aligned}|\varphi_c(x) - \widetilde{\varphi(x)}| &\leqslant \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_r} |(\varphi_c)_\alpha(x) - \widetilde{\varphi}_\alpha(x)| = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_r} \lim_{j \to \infty} (|\varphi_c[\psi_j dx^\beta] - \widetilde{\varphi}[\psi_j dx^\beta]|) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_r} \lim_{j \to \infty} (|\varphi_c[\psi_j dx^\beta] - T_1[\psi_j dx^\beta]|).\end{aligned}$$

Здесь $\beta \in \mathcal{M}_{n-r}$ — мультииндекс, дополнительный к α. Используя пока еще не доказанные неравенства (3.2), получим

$$\begin{aligned}|\varphi_c(x) - \widetilde{\varphi}(x)| &\leqslant \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_r} \lim_{j \to \infty} (|T_2[\psi_j dx^\beta] + T_3[\psi_j dx^\beta]|) \\ &\leqslant C_n^r(2c(\varepsilon) + b(\varepsilon)a(\delta)).\end{aligned}$$

Ясно, что выбрав ε, а затем δ, мы построим форму $\widetilde{\varphi}$, гармоническую в некоторой окрестности множества K и приближающую φ_c равномерно на K с заданной точностью.

Осталось доказать неравенства (3.2).

5. Две вспомогательные оценки. При рассмотрении потоков T_2 и T_3 мы несколько раз воспользуемся двумя оценками, изложенными соответственно в подпунктах А) и Б).

А) *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное измеримое множество, $y \in \mathbb{R}^n$. Существует константа $\alpha(n)$, зависящая только от размерности пространства, для которой верно неравенство*

$$\int\limits_A \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dv(x) \leqslant \alpha(n)(v(A))^{1/n}.$$

Доказательство хорошо известно и приводится лишь для удобства читателя:

$$\int\limits_A \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dv(x) \leqslant \int\limits_{B(y,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dv(x) + \int\limits_A \frac{1}{R^{n-1}} dv(x) = c_n R + \frac{v(A)}{R^{n-1}},$$

при любом $R > 0$. Положив $R = (v(A))^{1/n}$, получим требуемое неравенство с $\alpha(n) = c_n + 1$. •

Б) Допустим, что кроме натуральных чисел n и r, $(0 < r < n)$, заданы целые числа k и j, $(r < j \leqslant n)$ и семейство множеств $\{N(c)\}_{c \in \mathbb{R}^{r+1}}$. Пусть $N(c)$ — измеримое (относительно $(n-r-1)$-мерной меры Лебега) подмножество плоскости $P_c(j,k)$; с ним мы свяжем $(n-r-1)$-мерный поток, который будем обозначать тем же символом. Далее, предположим, что $\bigcup\limits_{c \in \mathbb{R}^{r+1}} N(c) \subset A$, где A — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, и что $N(c)$ измеримым образом зависит от c, т.е. для каждой $(n-r+1)$-формы ψ класса C^∞ функция $c \mapsto N(c)[\psi]$ измерима. Рассмотрим поток

$$F = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c).$$

Существует постоянная $\beta(n)$, зависящая только от n, и такая, что для произвольной формы $\psi \in D_{n-r+1}(\mathbb{R}^n)$ верно неравенство

$$|F[\psi]| \leqslant M^{-1}\beta(n)(v(A))^{1/n}\|\psi\|_1. \tag{3.3}$$

Доказательство. По определению потока F

$$|F[\psi]| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c) \right| = \frac{1}{c_n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} N(c)[U^{\delta\psi}] d\mathcal{H}^{r+1}(c) \right|.$$

Далее,

$$|N(c)[U^{\delta\psi}]| \leqslant \int\limits_{N(c)} |U^{\delta\psi}| d\mathcal{H}^{n-r-1}.$$

Множество $N(c)$ лежит в плоскости $P(c) = P_c(j,k)$ (см. 2Б), так что его точки можно записывать в виде:

$$x(c,\eta) = \sum_{l=1}^{r} \tau_l e_l + (Mt + k\varepsilon)e_j + \sum_{\substack{r<l\leqslant n \\ l\neq j}} \eta_l e_l,$$

где $c = (\tau, t)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ и $\eta = (\eta_{r+1}, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^{n-r-1}$.

Последнее неравенство можно переписать так:

$$|N(c)[U^{\delta\psi}]| \leqslant \int\limits_{N(c)} |U^{\delta\psi}(x(c,\eta))| d\mathcal{H}^{n-r-1}(\eta).$$

Подставим эту оценку в определение потока F:

$$|F[\psi]| \leqslant \frac{1}{c_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \int\limits_{N(c)} |U^{\delta\psi}(x(c,\eta))| d\mathcal{H}^{n-r-1}(\eta) d\mathcal{H}^{r+1}(c).$$

Потенциал гладкой финитной формы $\delta\psi$ оценим следующим образом:

$$|U^{\delta\psi}(x)| = \left|\delta U^{\psi}(x)\right| = \left|\delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-2}} dv(y)\right| \leqslant k(n) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dv(y) \qquad (3.4)$$

Продолжим оценивать $|F[\psi]|$, пользуясь неравенством (3.4) и меняя порядок интегрирования:

$$|F[\psi]| \leqslant \frac{k(n)}{c_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \int\limits_{P(c)} \frac{\chi_{N(c)}(x(c,\eta))}{|x(c,\eta) - y|^{n-1}} d\mathcal{H}^{n-r-1}(\eta) d\mathcal{H}^{r+1}(c) dy.$$

Преобразуем внутренний двойной интеграл, переходя к переменной $x = x(c,\eta) = (\tau_1, \ldots, \tau_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_{j-1}, Mt + k\varepsilon, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_n)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \int\limits_{P(c)} \frac{\chi_{N(c)}(x(c,\eta))}{|x(c,\eta) - y|^{n-1}} d\mathcal{H}^{n-r-1}(\eta) d\mathcal{H}^{r+1}(c) = \frac{1}{M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{N(p(x),(x_j - r\varepsilon)M^{-1}(x)}}{|x-y|^{n-1}} dv(x)$$
$$\leqslant \frac{1}{M} \int\limits_{A} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dv(x).$$

Подставим это неравенство в предыдущее:

$$|F[\psi]| \leqslant \frac{k(n)}{Mc_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)| \int\limits_{A} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dv(x) dv(y). \qquad (3.5)$$

Воспользуемся неравенством из А) и продолжим оценку:

$$|F[\psi]| \leqslant \frac{k(n)}{c_n M} \alpha(n) (v(A))^{1/n} \|\psi\|_1.$$

Мы получили требуемое неравенство с $\beta(n) = k(n)\alpha(n)/c_n$. •

6. Оценка потока T_3. Пусть $\psi \in \mathcal{D}_{n-r}$. В этом пункте мы получим оценку (3.2(a)) для

$$|T_3[\psi]| = \Bigl| \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R(c)} BS^{J_l(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c) \Bigr|.$$

Мы можем, как и выше, оценить модуль интеграла

$$|T_3[\psi]| \leqslant \frac{1}{c_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R(c)} \int\limits_{J_l(c)} |U^{\delta\psi}(x)| d\mathcal{H}^{n-r-1}(x) d\mathcal{H}^{r+1}(c). \tag{3.6}$$

Вспомним, что $J_l(c) \subset \gamma(c)$, а $R(c)$ состоит из тех индексов l, для которых $\partial A_l(c) \cap K_\delta \neq \varnothing$. Это, в частности, означает, что $\partial A_l(c) \subset K_{\delta+\sqrt{n}\varepsilon} \subset K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}$ (мы договорились, что $\delta < \varepsilon$). Значит, сумму под первым знаком интеграла можно оценить следующим образом:

$$\sum_{l \in R(c)} \int\limits_{J_l(c)} |U^{\delta\psi}(x)| d\mathcal{H}^{n-r-1}(x) \leqslant \int\limits_{\gamma(c)} \chi_{K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}}(x) |U^{\delta\psi}(x)| d\mathcal{H}^{n-r-1}(x).$$

Определим в $\mathbb{R}^n$ неотрицательную функцию p: $p(x) := \chi_{K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}}(x)|U^{\delta\psi}(x)|$.

Зафиксируем временно $\tau \in \mathbb{R}^r$ и рассмотрим заданные в $\mathbb{R}^{n-r}$ функции F_τ и p_τ (см. 1.2Б)). Применяя формулу п. 1.1Г) к функции F_τ и неотрицательной функции p_τ, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\gamma(\tau,t)} p_\tau(\sigma) d\mathcal{H}^{n-r-1}(\sigma) dt = \int\limits_{\Pi(\tau} |\nabla F_\tau(\sigma)| p_\tau(\sigma) d\mathcal{H}^{n-r}(\sigma).$$

Разделяя в (3.6) интегрирования по t и τ, используя последнее равенство и неравенство: $|\nabla F_\tau(\sigma)| \leqslant |\nabla F(\tau,\sigma)| \leqslant M^{-1}$, оценим поток T_3:

$$\begin{aligned} |T_3[\psi]| &\leqslant \frac{M^{-1}}{c_n} \int\limits_{\mathbb{R}^r} \int\limits_{\Pi(\tau)} p_\tau(\sigma) d\mathcal{H}^{n-r}(\sigma) d\mathcal{H}^r(\tau) \\ &= \frac{M^{-1}}{c_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x) dx = \frac{M^{-1}}{c_n} \int\limits_{K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}} |U^{\delta\psi}(x)| dx. \end{aligned}$$

Еще раз воспользуемся неравенством (3.4) и оценкой из 5А):

$$\begin{aligned} |T_3[\psi]| &\leqslant \frac{k(n)}{Mc_n} \int\limits_{K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy dx \\ &\leqslant \frac{\beta(n)}{M} (v(K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}))^{1/n} \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

Заглядывая вперед, положим $c(\varepsilon) = 2(n-r)\beta(n)M^{-1}(v(K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}))^{1/n}$; тогда неравенство (3.2(a)) выполнено, и $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = 0$, так как $v(K) = 0$. Пока что мы не пользуемся невидимостью множества K как таковой, а пользуемся лишь грубым ее следствием.

7. Оценка потока T_2. Напомним, что (см. 4А))

$$T_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R(c)} BS^{I_l()} d\mathcal{H}^{r+1}(c).$$

А) Разобьем сумму под интегралом на две следующим образом: вспомним, что

$$R(c) = \{l \in \mathbb{N}, 1 \leqslant l \leqslant L(c) : \partial A_l(c) \cap K_\delta \neq \varnothing\},$$

а $\partial A_l(c) = J_l(c) \cup I_l(c)$, и введем множества $R_1(c) = \{l \in R(c) : J_l(c) \cap K_\delta \neq \varnothing\}$, $R_2(c) = R(c) \setminus R_1(c)$. Тогда потоки $\sum_{l \in R_1(c)} I_l(c)$, $\sum_{l \in R_2(c)} I_l(c)$ зависят от c измеримым образом, и

$$T_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R_1(c)} BS^{I_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) + \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l \in R_2(c)} BS^{I_l(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) =: T_4 + T_5.$$

Мы увидим, что поток T_4 оценивается почти так же, как T_3; условие невидимости компакта K сыграет свою роль при оценке потока T_5.

Б) Множество $I_l(c)$ есть объединение множеств $I_l^j(c) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_l^{j,k}(c)$, где $I_l^{j,k}(c) = I_l(c) \cap P_c(j,k)$. При разных j множества $I_l^j(c)$ могут пересекаться лишь по множеству нулевой $(n-r-1)$-мерной меры Лебега. Поэтому имеет место следующее равенство $(n-r-1)$-мерных потоков: $I_l(c) = \sum_{j=r+1}^n I_l^j(c)$. Соответственно потоки T_2, T_4, T_5 разлагаются в суммы потоков T_2^j, T_4^j, T_5^j. Зафиксируем j $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ и оценим поток T_4^j. Сначала докажем, что при нашем выборе константы M, см. 2Б), верно следующее утверждение: *если $c, c_1 \in \mathbb{R}^{r+1}$, $c \neq c_1$ и $l \in R_1(c)$, $l_1 \in R_1(c_1)$, то множества $I_l^j(c)$ и $I_{l_1}^j(c_1)$ не пересекаются.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $y \in I_l^j(c) \cap I_{l_1}^j(c_1)$. Тогда, во-первых, $p(y) = \tau = \tau_1$, а, во-вторых, существуют целые числа k и k_1, для которых $y_j = Mt + k\varepsilon = Mt_1 + k_1\varepsilon$, где $c = (\tau, t)$ и $c_1 = (\tau_1, t_1)$. Из предположения $c \neq c_1$ следует, что $t \neq t_1$ и, следовательно, $k \neq k_1$. Два различных целых числа отличаются хотя бы на единицу, так что $|t - t_1| = \varepsilon M^{-1}|k_1 - k| \geqslant \varepsilon M^{-1}$.

С другой стороны, условия $l \in R_1(c)$ и $l_1 \in R_1(c_1)$ означают непустоту множеств $K_\delta \cap J_l(c)$ и $K_\delta \cap J_{l_1}(c_1)$. Пусть x и x_1 — некоторые точки этих множеств. Тогда $F(x) = t$ и $F(x_1) = t_1$, так как $J_l(c) \subset \gamma(c)$, $J_{l_1}(c_1) \subset \gamma(c_1)$. Далее, точка y находится в одном ε-кубике с каждой из точек x и x_1, поэтому $|x - x_1| \leqslant 2\sqrt{n}\varepsilon$. Теперь мы можем оценить $|t - t_1|$ сверху:

$$|t - t_1| = |F(x) - F(x_1)| \leqslant \max|\nabla F||x - x_1| \leqslant \max|\nabla F| 2\sqrt{n}\varepsilon < \varepsilon M^{-1}.$$

(Напомним, что $M^{-1} = 3\sqrt{n}\max|\nabla F|$). Предположив, что множества $I_l^j(c)$ и $I_{l_1}^j(c_1)$ пересекаются, мы получили два противоречащих друг другу неравенства. •

В) Перейдем к непосредственной оценке потока T_4^j. Зафиксируем целое число k и рассмотрим множества $I_l^{j,k}(c)$, лежащие в плоскостях $P_c(j,k) = \{y \in \Pi(\tau) : y_j = Mt + k\varepsilon\}$. Введем $(n-r)$-мерные полуплоскости

$$P_c^+(j,k) = \{y \in \Pi(\tau) : y_j \geqslant Mt + k\varepsilon\},$$
$$P_c^-(j,k) = \{y \in \Pi(\tau) : y_j \leqslant Mt + k\varepsilon\}.$$

Далее, из множеств $I_l^{j,k}(c)$ выделим те, чьи кубики $\Delta_l(c)$ лежат в одной полуплоскости. Положим

$$S^+(c) = \{l \in R_1(c) : \Delta_l(c) \subset P_c^+(j,k)\}$$

и

$$S^-(c) = \{l \in R_1(c) : \Delta_l(c) \subset P_c^-(j,k)\}.$$

Множества S^+ и S^- зависят от j и k, которые пока фиксированы. Рассмотрим объединения

$$N_k^+(c) = \bigcup_{l \in S^+(c)} I_l^{j,k}(c), \qquad N_k^-(c) = \bigcup_{l \in S^-(c)} I_l^{j,k}(c).$$

Это объединения попарно непересекающихся множеств, и равенства можно воспринимать как равенства сумм потоков. Тогда

$$T_4^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N_k^+(c)} d\mathcal{H}^{r+1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N_k^-(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c). \tag{3.7}$$

Посмотрим на первое слагаемое. Множества $N_k^+(c)$ лежат на плоскостях $P_c(j,k)$; пусть $N_k^+ := \bigcup_{c \in \mathbb{R}^{r+1}} N_k^+(c)$. Заметим, что если $l \in R(c)$, то $I_l(c) \subset K_{\delta+\sqrt{n}\varepsilon} \subset K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}$, так что $N_k^+ \subset K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}$ — ограниченное измеримое множество. Действие потока

$$\int_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N_k^+(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c)$$

на пробную форму можно оценить по неравенству (3.5):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N_k^+(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c) \right| \leqslant \frac{k(n)}{c_n M} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{N_k^+} \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dv(x) dv(y).$$

Множества N_k^+ попарно не пересекаются. В самом деле, если $y \in N_k^+ \cap N_{k_1}^+$, $(k \neq k_1)$, то при некоторых $c, c_1 \in \mathbb{R}^{r+1}$ и некоторых l, l_1, $(l \in R_1(c),\ l_1 \in R_1(c_1))$, $y \in I_l^{j,k}(c) \cap I_{l_1}^{j,k}(c_1)$. Тогда $y_j = Mt + k\varepsilon = Mt_1 + k_1\varepsilon$ и $t \neq t_1$, так как $k \neq k_1$, но мы доказали в Б), что при разных c и c_1 множества $I_l^j(c)$ и $I_{l_1}^j(c_1)$ не пересекаются, если $l \in R_1(c)$ и $l_1 \in R_1(c_1)$. Кроме того, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} N_k^+ \subset K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}$; поэтому

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N_k^+(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c)| \leqslant \frac{k(n)}{c_n M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}} \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dv(x) dv(y)$$
$$\leqslant \beta(n) M^{-1} (v(K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}))^{1/n} \|\psi\|_1.$$

Точно так же оценивается второе слагаемое в (3.7). Складывая оценки для потоков T^j, $r+1 \leqslant j \leqslant n$, получим:

$$|T_4[\psi]| \leqslant 2(n-r)\beta(n) M^{-1} (v(K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}))^{1/n} \|\psi\|_1 = c(\varepsilon)\|\psi\|_1.$$

Г) Осталось оценить поток T_5, точнее, его действие на форму ψ:

$$T_5[\psi] = \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} \sum_{l\in R_2(c)} BS^{I_l(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c),$$

где $R_2(c) \subset \{l \in \mathbb{R} : 1 \leqslant l \leqslant N(c),\ I_l(c) \cap K_\delta \neq \varnothing\}$. Посмотрим, какая именно грань множества $I_l(c)$ пересекает K_δ. Положим $R_2^m(c) := \{l \in R_2(c) : m = \min\{s : I_l^s(c) \cap K_\delta \neq \varnothing\}\}$; ясно, что $R_2(c) = \bigcup\limits_{m=r+1}^{n} R_2^m(c)$ — объединение попарно не пересекающихся множеств. Зафиксируем тройку чисел (j,k,m) и, как и при оценке потока T_4, введем множества

$$S^+(c) := \{l \in R_2^m(c) : \Delta_l(c) \subset P_c^+(j,k)\},$$
$$S^-(c) := \{l \in R_2^m(c) : \Delta_l(c) \subset P_c^-(j,k)\}.$$

Рассмотрим потоки

$$N^+(c) = \sum_{l\in S^+(c)} I_l^{j,k}(c), \qquad N^-(c) = \sum_{l\in S^-(c)} I_l^{j,k}(c).$$

Тогда поток T_5 представится в виде суммы потоков вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N^+(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c) + \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N^-(c)} d\mathcal{H}^{r+1}(c),$$

по всем возможным наборам (j,k,m). Положим $N^+ = \bigcup_{c\in\mathbb{R}^{r+1}} N^+(c)$ и оценим первый интеграл, пользуясь неравенством (3.3):

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N^+(c)}[\psi]d\mathcal{H}^{r+1}(c)\right| \leqslant \beta(n)M^{-1}(v(N^+))^{1/n}\|\psi\|_1. \tag{3.8}$$

Ясно, что $N^+ \subset K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon}$, и множество N^+ измеримо и ограничено. Нам нужно оценить $v(N^+)$. Оценка $v(N^+) \leqslant v(K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon})$ в данном случае не достаточна, так как количество слагаемых, на которые мы разбили поток T_5, зависит от ε.

Д) Рассмотрим $(r+1)$-мерную плоскость $\{y\in\mathbb{R}^n : y_i = 0, r < i \leqslant n, i \neq j\}$; проектор на нее будем обозначать буквой π. Оценим для начала меру множества $\pi(N^+)$. Допустим, что $K_{(1+\sqrt{n})\varepsilon} \subset B(0,d)$. Если $x \in N^+$, то найдется такое $c\in\mathbb{R}^{r+1}$, что $x \in I_l^{j,k}(c)$ при некотором $l \in R_2^m(c)$. Тогда $p(x) = \tau$, $x_j = Mt + k\varepsilon$ и $I_l^m(c)\cap K_\delta \neq \varnothing$. Рассмотрим точку $\widetilde{x} \in I_l^m(c)\cap K_\delta$; очевидно, $p(\widetilde{x}) = \tau$, $\widetilde{x}_m = Mt + \widetilde{k}\varepsilon$. Введем изоморфизм $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, меняющий местами координаты с номерами j и m, т.е. $(\lambda(y))_i = y_i$ при $i\neq j$, $i \neq m$ и $(\lambda(y))_m = y_j$, $(\lambda(y))_j = y_m$. Он переводит точку $\widetilde{x}$ окрестности K_δ компакта K в точку $\lambda(\widetilde{x})$, „похожую“ на x. Точнее, $\pi(x) = \pi(\lambda(\widetilde{x}) + (k-\widetilde{k})\varepsilon e_j)$. Следовательно,

$$\pi(N^+) \subset \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \pi(\lambda(K_\delta) + z\varepsilon e_j),$$

где e_j — орт j-й оси. Кроме того, $N^+ \subset B(0,d)$, поэтому объединение можно брать лишь по тем $z\in\mathbb{Z}$, для которых

$$\operatorname{dist}(\pi(\lambda(K_\delta) + z\varepsilon e_j), 0) \leqslant d. \tag{3.9}$$

Заметим, что $\lambda(K_\delta) \subset B(0,d)$, поэтому, если $|z\varepsilon| > 2d$, то неравенство (3.9) не выполняется. Итак,

$$\pi(N^+) \subset \bigcup_{z\in\mathbb{Z}, |z|\leqslant 2d\varepsilon^{-1}} \pi(\lambda(K_\delta) + z\varepsilon e_j).$$

Теперь мы можем оценить меру $\pi(N^+)$:

$$\mathcal{H}^{r+1}(\pi(N^+)) \leqslant (4d\varepsilon^{-1} + 1)\mathcal{H}^{r+1}(\pi\circ\lambda(K_\delta)).$$

Положим $a_0(\delta) = \max\{\mathcal{H}^{r+1}(\mathrm{pr}(K_\delta))\}$, где максимум берется по всем проекторам pr на координатные $(r+1)$-мерные плоскости. Опять воспользуемся тем, что N^+ содержится в шаре $B(0,d)$, получим

$$m_n(N^+) \leqslant (2d)^{n-r-1}(4d\varepsilon^{-1} + 1)a_0(\delta).$$

Теперь мы можем переписать оценку (3.8) для одного из слагаемых, на которые мы разбили поток T_5:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{r+1}} BS^{N^+(c)}[\psi] d\mathcal{H}^{r+1}(c) \right| \leqslant \beta(n) M^{-1} (2d)^{\frac{n-r-1}{n}} (4d\varepsilon^{-1} + 1)^{1/n} (a_0(\delta))^{1/n} \|\psi\|_1.$$

Положим $a(\delta) = (a_0(\delta))^{1/n}$. Чтобы получить оценку для потока T_5, посмотрим, сколько ненулевых слагаемых участвует в разбиении. Слагаемое определялось тройкой чисел j, k и m и знаком $+$ или $-$. Числа j и m изменяются от $r+1$ до n. Если тройка (j,k,m) отвечает ненулевому слагаемому, то хотя бы одно множество $I_l^{j,k}(c)$ не пусто. По определению $I_l^{j,k}(c) = I_l(c) \cap P_c(j,k)$, а $I_l(c) \subset \mathrm{Clos}(G(c)) \subset \mathrm{spt}(F)$; кроме того, $G(c) \neq \varnothing$, только если $|t| \leqslant \max|F|$, где $c = (\tau, t)$. Выберем положительное D, для которого $\mathrm{spt}(F) \subset B(0,D)$. Тогда $\mathrm{spt}(F)$ пересекается с $P_c(j,k)$, только если $|Mt + k\varepsilon| \leqslant D$. Таким образом, если $|k| > \varepsilon^{-1}(D + M\max|F|)$, то все слагаемые, отвечающие тройкам (j,k,m) — нулевые. Окончательно получаем следующую оценку потока T_5:

$$|T_5[\psi]| \leqslant 2(n-r)^2 \beta(n) M^{-1} (2\varepsilon^{-1} D + 2\varepsilon^{-1} M \max|F| + 1) b_0(\varepsilon) a(\delta) \|\psi\|_1, \tag{3.10}$$

где $b_0(\varepsilon) = (2d)^{\frac{n-r-1}{n}} (4d\varepsilon^{-1} + 1)^{1/n}$. Обозначая через $b(\varepsilon)$ произведение всех сомножителей в правой части в (3.10), кроме двух последних, получим оценку (3.2(в)). Осталось заметить, что $\lim\limits_{\delta \to 0} a(\delta) = 0$ в силу $(r+1)$-невидимости компакта ($a(\delta) = \max(\mathcal{H}^{r+1}(\mathrm{pr}(K_\delta)))^{1/n}$).

8. О приближении точной части формы φ. Возможность приближения точной части следует из формулы, полученной в 1A):

$$\varphi_e = (-1)^{nr+n+r} * (*\varphi)_c.$$

Степень формы $*\varphi$ равна $n-r$, поэтому из $(n-r+1)$-невидимости компакта следует возможность приближения на K формы $(*\varphi)_c$ формой, гармонической в окрестности множества K. Обозначим эту форму через ω; тогда форма $\widetilde{\omega} = (-1)^{nr+n+r} * \omega$ гармонична там же, где ω и приближает φ_e на K.

Можно еще заметить, что построенная в п. 3 приближающая форма представима в виде

$$\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-r+1}} \sum_{l \in D(a)} BS^{T_l(a)} d\mathcal{H}^{n-r+1}(a),$$

и тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega} &= (-1)^{nr+n+r} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-r+1}} \sum_{l \in \mathcal{D}(a)} *BS^{T_l(a)} d\mathcal{H}^{n-r+1}(a) \\ &= (-1)^{nr+1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-r+1}} \sum_{l \in \mathcal{D}(a)} \mathrm{Coul}^{T_l(a)}\, d\mathcal{H}^{n-r+1}(a). \end{aligned}$$

Результаты настоящего параграфа существенно усилены в п. 4.4 (к сожалению, неконструктивными средствами).

§4. Дополнения

1. О формулах разложения форм в интеграл циклов. Назовем *вполне точной* r-форму ω, заданную в открытом множестве $O \subset E$ и представимую в виде $\omega = df_1 \wedge \dots \wedge df_r$, где $f_1, \dots, f_r$ — функции класса $C^1(O)$. Формулы (1.), (1.2), а также формулы п. 1.2 суть частные случаи формулы Федерера (известной также как „формула коплощади") для вполне точной r-формы ω:

$$\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^r} l(c) d\mathcal{H}^r(c), \tag{4.1}$$

где $l(c)$ обозначает c-уровень отображения $f : O \to \mathbb{R}^r$ с координатными функциями $f_1, \dots, f_r, (l(c) := f^{-1}(c))$. Формула (4.1) есть равенство потоков; оно сопровождается скалярным равенством

$$\int\limits_O |\omega| dv = \int\limits_{\mathbb{R}^r} \mathcal{H}^{n-r}(l(c)) d\mathcal{H}^r(c) \tag{4.2}$$

($|\omega(x)| := |df_1(x) \wedge \dots \wedge df_r(x)|$ есть евклидова норма r-вектора $\omega(x)$). Формулы (4.1) и (4.2) допускают обобщение и на некоторые негладкие формы ω ([2, 5]), а также на формы на римановом многообразии [4]. Формула Кронрода есть частный случай формулы Флеминга–Ришеля для градиентов BV-функций [2]. Аналог формул (4.1)–(4.2) для соленоидальных векторных мер получен в [9]; там же обсуждаются связи таких формул с теорией Крейна–Мильмана–Шоке крайних точек выпуклых компактов.

2. О двойственности Александера–Понтрягина. Доказательство теоремы Рунге в §2 (а также в [7]) мы начали с того, что заменили r-форму ω, гармоническую в окрестности W компакта K, на котором осуществляется приближение, некоторой вполне гармонической (т.е. точной и коточной) r-формой. Это достигалось вычитанием из ω подходящей линейной комбинации форм Био–Савара и Кулона, порождающие циклы которых лежат вне W и правильно сцеплены с базисными циклами r-мерных и $(n-r)$-мерных гомологий множества W ([7, с. 138]). Коэффициенты этих линейных комбинаций подбираются так, чтобы уничтожить периоды и копериоды формы ω. Эта конструкция основана на теореме двойственности Александера–Понтрягина о правильно сцепленных системах циклов (соответственно в W и в $E \setminus \operatorname{Clos} W$). Ради замкнутости изложения мы приведем в этом пункте короткое (с точностью до основных положений теории Де Рама) доказательство нужного нам частного случая этой теоремы. Основной его элемент — это представление коэффициента зацепления циклов в виде периода формы Био–Савара [7, с. 125]. Значительно более общие формулировки и топологические доказательства теоремы двойственности Александера–Понтрягина можно найти в [10] и [11].

Через $H^r(G)$ мы будем обозначать пространство r-мерных гомологий открытого множества $G \subset E$ (факторпространство r-мерных замкнутых потоков в G по подпространству r-мерных потоков, точных в G). Символ $H^r_c(G)$ будет обозначать пространство r-мерных компактных гомологий множества G (определяемое так же, как $H^r(G)$ с заменой произвольных замкнутых потоков в G на потоки с компактным носителем в G). Через $S[T]$ мы будем обозначать индекс Кронекера потоков S и T, а через $v(\gamma, \Gamma)$ — коэффициент зацепления циклов γ и Γ [10, 7].

А) Пусть компактное множество $K \subset E$ совпадает с замыканием своей внутренности $\overset{\circ}{K} =: G$ и удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любой окрестности V множества $G' := E \setminus G$ найдутся открытое множество O, $G' \subset O \subset V$, и отображение $f : O \to K'$ класса C^∞, гладко гомотопное тождественному отображению множества O;

2) пространство $H^r_c(G)$ конечномерно.

Мы будем говорить, что K есть *правильный компакт*. Примером может служить гладкое компактное n-мерное многообразие с краем.

Пусть, далее, ρ — неотрицательная функция класса $C_0^\infty(E)$, c — ее некритическое положительное значение. Тогда $K_c := \{x \in E : \rho(x) \geqslant c\}$ есть правильный компакт. Для произвольного компактного $\widetilde{K} \subset E$ и для произвольной его окрестности U найдется такой правильный компакт K, что $\widetilde{K} \subset \overset{\circ}{K} \subset K \subset U$. В самом деле, взяв C^∞-функцию $\rho : E \to [0,1]$ с компактным носителем в U, равную единице на K, можно положить $K := K_c$, где $c \in (0,1)$ — ее некритическое значение.

Б) В §2 (и в работе [7]) использовался лишь следующий очень частный случай теоремы Александера–Понтрягина.

Пусть K — правильный компакт, $1 \leqslant r \leqslant n-1$; $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — конечные r-мерные циклы в $G := \overset{\circ}{K}$, классы эквивалентности которых линейно независимы в $H^r_c(G)$. Существуют такие конечные $(n-r-1)$-мерные циклы $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в K', что

$$v(\lambda_i, \gamma_j) = (-1)^{n-r} \int_{\gamma_j} BS^{\lambda_i} = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N.$$

Доказательство. Пусть O — открытое множество, содержащее G', удовлетворяющее условию 1) из А) и не пересекающееся с носителями циклов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Поток BS^{λ_i} совпадает в O с замкнутой C^∞-формой, которую мы обозначим через $\varphi_i (i = 1, \dots, N)$. На первом шаге доказательства мы проверим, что формы φ_i (точнее, их классы эквивалентности) линейно независимы в $H^{n-r}(O)$.

Допустим, что найдутся такие числа α_i, что форма $\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_N\varphi_N$ гомологична нулю в O, т.е. что существует форма ψ класса $C^\infty(O)$ такая, что

$$\theta := \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_N\varphi_N = d\psi.$$

Пусть $\beta \in C^\infty(E)$ — функция с носителем в O, равная единице вблизи G'. Произведения $\beta\theta$, $\beta d\psi$ и $d\beta \wedge \psi$ можно трактовать как потоки в E, причем

$$\eta := \alpha_1 BS^{\lambda_1} + \cdots + \alpha_N BS^{\lambda_N} = \beta\eta + (1-\beta)\eta = \beta\theta + (1-\beta)\eta = \beta d\psi + T, \quad (4.3)$$

где $T := (1-\beta)\eta$ — поток, сосредоточенный в G. Применяя к (4.3) оператор d, найдем

$$\begin{aligned}\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_N\lambda_N &= d(\beta d\psi) + dT = d\beta \wedge d\psi + dT \\ &= -d(d\beta \wedge \psi) + dT = d(T - d\beta \wedge \psi)\end{aligned}$$

(мы воспользовались потоковыми равенствами $dBS^{\lambda_i} = \lambda_i$ (см. [7, с. 123]). Далее, $T - d\beta \wedge \psi$ есть поток с компактным носителем в G, так как

$$\operatorname{spt}(T - d\beta \wedge \psi) \subset \operatorname{spt} T \cup \operatorname{spt} \beta \subset G;$$

следовательно, поток $\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_N\lambda_N$ компактно гомологичен нулю в G, и равенства $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$, следуют из линейной независимости циклов λ_i в $H_c^r(G)$.

В) Продолжим доказательство. Из линейной независимости форм φ_i в $H^r(O)$ и из теоремы Де Рама (о двойственности форм и циклов) следует, что существуют такие конечные $(n-r-1)$-мерные циклы в O, что $\int_{\Gamma_j} \varphi_i = \delta_{ij}$. Пусть $f : O \to K'$ — отображение, гладко гомотопное тождественному отображению множества O (см. условие 1) в А)). Будучи гомотопными в O, циклы $f_\#\Gamma_j$ и Γ_j компактно гомологичны в O:

$$f_\#\Gamma_j - \Gamma_j = dS_j,$$

где S_j — некоторый поток с компактным носителем в O. Носители замкнутых потоков $f_\#\Gamma_j$ компактны и находятся в K'. По теореме Де Рама найдется конечный цикл γ_j в K', которому поток $f_\#\Gamma_j$ компактно гомологичен в K'. Итак, $\gamma_j - \Gamma_j = dS'_j$, где S'_j — поток с компактным носителем в O. Далее,

$$v(\lambda_i, \gamma_j) = BS^{\lambda_i}[\gamma_j] = BS^{\lambda_i}[\Gamma_j] + BS^{\lambda_i}[dS'_j].$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\operatorname{spt} S'_j \subset O, dBS^{\lambda_i} = 0$ в O, и $BS^{\lambda_i}[dS'_j] = dBS^{\lambda_i}[S'_i] = 0$. Наконец, поток BS^{λ_i} совпадает вблизи $\operatorname{spt}\Gamma_j$ с формой φ_i, и потому

$$v(\lambda_i, \gamma_j) = BS^{\lambda_i}[\Gamma_j] = \varphi_i[\Gamma_j] = \int_{\Gamma_j} \varphi_i = \delta_{ij}.$$

Система циклов $\gamma_j, j = 1, \dots, N$ — требуемая. •

Г) Для наших целей вполне достаточно утверждение, сформулированное в Б). Нетрудно, однако, получить более законченную и симметричную формулировку, подчинив множество G некоторому дополнительному условию.

Пусть $N = \dim H_c^r(G)$, так что циклы $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, о которых шла речь в Б) и В), образуют базис пространства $H_c^r(G)$. В этом случае рассуждения подпункта Б) определяют взаимнооднозначный линейный оператор $A : H_c^r(G) \to H_c^{n-r-1}(K')$ ($A(\dot{\lambda}_i) := \dot{\gamma}_i, i = 1, \dots, N$; $\dot{T}$ обозначает класс компактных гомологий, содержащий замкнутый поток T).

Итак, $\dim H_c^{n-r-1}(K') \geqslant \dim H_c^r(\overset{\circ}{K}) = N$. Подчиним K дополнительному условию:

1′) Для любой окрестности U множества K найдутся открытое множество O, $K \subset O \subset U$, и отображение $f : O \mapsto \overset{\circ}{K}$, гладко гомотопное тождественному отображению множества O.

При условии 1′), рассуждая так же, как в Б) и В), мы покажем, что $\dim H_c^{n-r-1}(K) \leqslant N$. Таким образом, числа Бетти $\dim H_c^{n-r-1}(K')$ и $\dim H_c^r(\overset{\circ}{K})$ равны, и оператор A есть линейный изоморфизм пространства $H_c^r(\overset{\circ}{K})$ на $H_c^{n-r-1}(K')$.

Д) Теперь мы дадим доказательство той части утверждения, сформулированного в 0.7, которая относится к свободе выбора базисов (γ_j) и (Γ_j) (мы ограничимся первым базисом; для второго все следует из связи форм Био–Савара и Кулона). Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ — *какой-нибудь* базис пространства $H_c^{n-r-1}((\operatorname{Clos} V)')$ (мы пользуемся обозначениями п. 0.7). Каждый $(n-r-1)$-мерный цикл γ в $(\operatorname{Clos} V)'$ компактно гомологичен некоторой линейной комбинации σ циклов $\sigma_1, \dots, \sigma_l$. Но тогда в окрестности компакта $\operatorname{Clos} V$ форма BS^γ равна $BS^\sigma + \eta$, где η — r-форма, вполне гармоническая вблизи $\operatorname{Clos} V$ (и ее равномерно на K можно приблизить гармоническими формами с особенностями в предписанной открытой части множества $(\operatorname{Clos} V)'$ — как в §2). В самом деле, если $T \in \mathcal{E}'_{n-r-2}$, то $c_n BS^{dT} = \delta U^{dT} = \delta d U^T = -d\delta U^T$ вне $\operatorname{spt} T$.

3. Теорема Рунге и простейшие гармонические формы. В этом пункте мы обсудим конструктивный вариант теоремы Рунге для гармонических форм, доказанный в работе [13], и его связь с конструкцией §2. Кроме того, мы дадим конструктивное доказательство взаимозаменяемости форм Кулона и Био–Савара при приближении вполне гармонических форм, отмеченной в [7] (см. также формулировку теоремы Рунге в п. 0.7).

А) Пусть w – r-вектор, $a \in E$. Форма $\omega := w/|x-a|^{n-2}$ слабо гармонична в $E \setminus \{a\}$ (т.е. $\Delta\omega = 0$; см. [7, с. 123]). Поэтому форма $d\delta\omega$ гармонична в $E \setminus \{a\}$ и совпадает там с $-\delta d\omega$. Форму $d\delta\omega$ мы будем называть *простейшей* (*с полюсом* а). Простейшие формы вполне гармоничны. Если $\dim E = 3$, то простейшую

1-форму с полюсом a можно записать так:

$$d\delta\omega = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\vec{w}}{|x-a|} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\vec{w}}{|x-a|}.$$

Б) Предположим, что r-форма u вполне гармонична вблизи $\operatorname{Clos} V$, где V — правильная окрестность компактного множества $K \subset E$. Представим u в V по формуле Коши ([7, с. 127]):

$$c_n u = -\delta U^{\partial V \wedge u} - \gamma_r dU^{*(\partial V \wedge * u)}.$$

Воспользуемся тем, что $u = d\xi = \delta\eta$, где ξ и η — формы степеней, соответственно $r-1$ и $r+1$, гладкие вблизи $\operatorname{Clos} V$:

$$c_n u = \pm\delta U^{d(\partial V\wedge\xi)} \pm dU^{*d(\partial V\wedge *\eta)} = \pm\delta dU^{\partial V\wedge\xi} \pm d\delta * U^{\partial V\wedge *\eta}. \tag{4.1}$$

Это преобразование формулы Коши есть отправная точка работы [13]. Далее в этой работе потенциалы $U^{\partial V\wedge\xi}$ и $U^{\partial V\wedge *\eta}$ в (4.1) заменяются интегральными суммами, что дает линейные комбинации простейших r-форм, приближающие u равномерно на K; затем следует процедура „вывода полюсов“ полученных простейших форм в предписанное множество, вездесущее в K'. В результате получается еще одна „теорема Рунге“, в которой гарантируется возможность равномерного приближения на K любой r-формы u, гармонической вблизи K, линейной комбинацией элементарных и простейших r-форм (сведение к случаю вполне гармонической формы u производится так же, как в [7]).

Мы покажем, что этот результат *равносилен* теореме Рунге, доказанной в [7] и в §2.

В) Проверим, что *любая простейшая r-форма с полюсом a есть предел линейных комбинаций r-форм Био-Савара, отвечающих бесконечно малым сферам размерности $r-1$ с центром a.* Для этого нам понадобится следующее простое утверждение. Пусть $B = B(a,R)$ — *p-мерный замкнутый шар* ($p := n-r$) *с центром a и радиусом R, расположенный в p-мерной плоскости $\Pi \subset E$, а φ — гладкая функция, заданная в открытом множестве $O \subset E$, содержащем B. Тогда*

$$\int_{\partial B} \varphi(y) y\, d\mathcal{H}^{p-1}(y) = R\int_B \nabla_\Pi\varphi(y)\, d\mathcal{H}^p(y), \tag{4.2}$$

где $\nabla_\Pi\varphi(y)$ — составляющая вектора $\nabla\varphi(y)$, параллельная Π (градиент функции $\varphi|\Pi$). В самом деле, y/R есть орт внешней нормали (по отношению к Π) к ∂B в точке $y \in \partial B$. Введя в Π декартовы координаты и применив формулу Гаусса-Остроградского покоординатно, получим (4.2). Из (4.2) следует, что

$$\lim_{R\to 0}\frac{p}{c_p R^{p+1}}\int_{\partial B}\varphi(y) y\, d\mathcal{H}^{p-1}(y) = \nabla_\Pi\varphi(a), \quad c_p := \mathcal{H}^{p-1}(\mathbb{S}^{p-1}). \tag{4.3}$$

Г) Рассмотрим r-форму $\omega := (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)/|x-a|^{n-2}$, где $e_1, \dots, e_r$ — попарно ортогональные орты. Пусть П — проходящая через a p-мерная плоскость, ортогональная всем ортам e_k, $k = 1, \dots, r = n - p$. Базисом подпространства (в E), нормального к сфере ∂B (см. В)), в точке $y \in \partial B$, служат орты $y/R, e_1, \dots, e_r$.

Положим $\varphi_x(y) := |x-y|^{2-n}$. Ньютоновский потенциал этой сферы (рассматриваемый как $(p-1)$-мерный поток в E, см. [7]) в $E \setminus \partial B$ совпадает с $(r+1)$-формой

$$U^{bB}(x) = \int\limits_{\partial B} \varphi_x(y) \cdot \left(\frac{y}{R} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\right) d\mathcal{H}^p(y)$$
$$= \left(\int\limits_{\partial B} \varphi_x(y) \frac{y}{R} d\mathcal{H}^{p-1}(y)\right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_r.$$

Согласно (4.3),

$$\lim_{R \to 0} \frac{p}{c_p R^p} U^{bB}(x) = \nabla_\Pi \varphi_x(a) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$$
$$= \nabla \varphi_x(a) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = d\varphi_x(a) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$$
$$= -d_x \frac{e_1 \wedge \cdots \wedge e_r}{|x-a|^{n-2}}$$

равномерно относительно x из дополнения любого n-мерного шара с центром a. Далее, $BS^{\partial B}(x) = \frac{1}{c_n} \partial U^{\partial B}(x)$. Легко видеть, что

$$-BS^{\partial B}(x) \sim \frac{R^p c_p}{c_n p} \delta_x d_x \frac{e_1 \wedge \cdots \wedge e_r}{|x-a|^{n-2}} \quad (R \to 0) \tag{4.4}$$

равномерно относительно точек x, удаленных от a на любое положительное расстояние. Из (4.4) следует утверждение, сформулированное в начале подпункта В).

Д) Форму Био–Савара в (4.4) можно заменить некоторой формой Кулона. Действительно, пусть $B^\perp = B^\perp(a, R)$ — r-мерный шар с центром a и радиусом R, расположенный в r-мерной плоскости $\Pi^\perp$, параллельной векторам $e_1, \dots, e_r$. Из равенства $(-1)^r \operatorname{Coul}^{\partial B^\perp} = *BS^{\partial B^\perp}$, мы получим следующую формулу:

$$(-1)^{nr+1} \operatorname{Coul}^{\partial B^\perp} \sim \frac{R^r c_n}{c_n r} d\delta \frac{e_1 \wedge \cdots \wedge e_r}{|x-a|^{n-2}} \quad (R \to 0) \tag{4.5}$$

равномерно относительно точек x, удаленных от a на любое положительное расстояние.

Если $n = 3$, $r = 1$, $p = 2$, то $B^\perp$ есть отрезок длины $2R$ с центром a, ортогональный плоскости П, а $\partial B^\perp$ есть „диполь“ (ориентированное двоеточие). Вытекающее из (4.4) и (4.5) соотношение

$$-\frac{1}{Rc_1} \operatorname{Coul}^{\partial B^\perp}(x) \sim \frac{2}{R^2 c_n} BS^{\partial B}(x) \quad (R \to 0)$$

имеет следующий физический смысл: „магнитное поле, создаваемое небольшой петлей с током, имеет в удаленных точках такую же форму, как электрическое поле , создаваемое двумя разделенными зарядами" ([14, с. 361]).

Е) Пусть γ — конечный $(r-1)$-мерный цикл, лежащий в дополнении компактного множества $K \subset E$ и компактно гомологичный нулю в $E \setminus K = K'$: $\gamma = b\widetilde{\gamma}$, где $\widetilde{\gamma}$ — конечная r-мерная цепь в K'.

Тогда $BS^{\gamma} = \pm\delta dU^{\widetilde{\gamma}}$; заменяя потенциал $U^{\widetilde{\gamma}}$ интегральной суммой, мы приблизим BS^{γ} равномерно на K линейной комбинацией простейших r-форм с полюсами в $\operatorname{spt}\widetilde{\gamma}$. Из (4.5) видно, что каждая из них, в свою очередь, есть равномерный на K предел линейных комбинаций r-форм Кулона, отвечающих сколь угодно малым $(r-1)$-мерным сферам.

Точно так же r-форму Кулона, отвечающую циклу, компактно гомологичному нулю в K', можно равномерно на K приблизить r-формой Био–Савара, отвечающей линейной комбинации малых сфер.

Из этих замечаний следует вариант теоремы Рунге, сформулированный на с. 136 работы [7] и доказанный там с помощью двойственности: *любую r-форму, гармоническую вблизи правильного компакта $K \subset E$, можно равномерно на E приблизить линейными комбинациями элементарных r-форм, отвечающих базисным циклам пространств гомологий $H_c^{r-1}(K')$ и $H_c^{p-1}(K')$ и r-форм Кулона (или Био–Савара), отвечающих циклам, компактно гомологичным нулю в заданном открытом множестве $O \subset K'$, пересекающемся с любой компонентой связности множества K'.*

4. Обобщение теоремы Гартогса–Розенталя.

А) Множество $K \subset E$, представимое в виде конечного объединения p-невидимых множеств, мы будем называть *p-почти невидимым*. Из примера на с. 140 работы [7] следует существование p-почти невидимых множеств, не являющихся p-невидимыми. В этом пункте мы покажем, что возможность приближения, гарантируемая теоремой Гартогса–Розенталя для r'-невидимых компактов (см. п. 0.8 и 3.1), сохраняется и для r'-почти невидимых компактов. Более того, *если компактное множество $K \subset E$ локально диффеоморфно r'-почти невидимому множеству, то любая r-форма, непрерывная на K, допускает равномерное на K приближение r-формами, гармоническими вблизи K.*

Упомянутая в этой формулировке „локальная диффеоморфность" означает, что для любой точки $x \in K$ найдутся такая ее окрестность V и диффеоморфизм f_x этой окрестности на n-мерный шар $B \subset E$, что множество $f_x(V_x \cap K)$ r'-почти невидимо.

Б) Символом L^1_{loc} мы будем обозначать множество всех дифференциальных форм, локально суммируемых в E (по мере v). В отличие от предыдущего текста в этом пункте мы введем специальное обозначение $\bar{d}$ для внешнего дифференциала *потоков*, а буква d будет обозначать классическое внешнее дифференцирование гладких форм. Мы будем называть форму $\psi \in L^1_{\text{loc}}$ точной в открытом множестве G, если $\psi = \bar{d}T$ в G, где T — некоторый поток в G.

В [7] доказательство теоремы Гартогса–Розенталя сводилось к исследованию компактных множеств $K \subset E$ нулевого объема v, обладающих так называемым „свойством (d_r)":

любая r-форма $\psi \in L^1_{\text{loc}}$, бесконечно дифференцируемая и точная в $K' := E \setminus K$, замкнута, (и, следовательно, точна) как поток в E. (d_r)

В [7] было показано, что любой $(n-r)$-невидимый компакт обладает свойством (d_r), откуда с помощью двойственности легко выводилась теорема Гартогса–Розенталя ([7, с. 142–143]).

В) Мы сейчас увидим, что $(n-r)$-невидимый компакт обладает следующим более сильным свойством:

каково бы ни было открытое $G \subset E$, любая r-форма $\psi \in L^1_{\text{loc}}$, точная в $G \setminus K$, точна в G. (sd_r)

Доказательство. По теореме Де Рама точность r-формы $\psi \in L^1_{\text{loc}}$ в открытом множестве $O \subset E$ равносильна следующему утверждению: $\psi[\varphi](:= \int \psi \wedge \varphi) = 0$ для любой замкнутой в O формы $\varphi \in \mathcal{D}_{n-r}(O)$ ([10, с. 154]). Поэтому точность в G r-формы $\psi \in L^1_{\text{loc}}$, точной в $G \setminus K$, будет следовать из точности всех форм $\psi | G_\sigma$ $(\sigma > 0)$, где $G_\sigma := \{x \in G : \operatorname{dist}(x, G') > \sigma\}$. Пусть $0 < \varepsilon < \sigma$, $\alpha \in C_0^\infty(E)$, $\alpha(x) \equiv \alpha(|x|)$, $\alpha(x) \equiv 1$ при $|x| \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, $\int \alpha = 1$, $\alpha_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\alpha(x/\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon := \psi * \alpha_\varepsilon$.

Зафиксируем ортонормальный базис b, в котором K — $(n-r)$-невидимое множество. Мы будем рассматривать множество Ch^b_r r-мерных цепей, представляющих собою линейные комбинации r-мерных ориентированных прямоугольников со сторонами, параллельными осям; через Z^b_r мы будем обозначать множество всех циклов, содержащихся в Ch^b_r. Для почти всех (в естественном смысле) цепей $C \in \mathrm{Ch}^b_r$ существует период формы ψ:

$$\operatorname{per}_C \psi := \int_C \psi.$$

Из равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_E |\psi_\varepsilon - \psi| dv = 0 \tag{4.6}$$

нетрудно заключить, что для некоторой бесконечно малой последовательности (ε_j)

$$\operatorname{per}_C \psi = \lim_{j \to \infty} \operatorname{per}_C \psi_j, \quad \psi_j := \psi_{\varepsilon_j} \tag{4.7}$$

для п. в. $C \in \mathrm{Ch}^b_r$ ([15, с. 24, 54]). Пусть открытое множество g компактно содержится в $O := G \setminus K$. Гладкие формы ψ_j точны в g при $j > j(g)$. В самом деле, $\psi = \bar{d}T$ в O, $T \in \mathcal{D}'_{n-r-1}(O)$. Поток T совпадает в окрестности множества $\operatorname{Clos} g$ с некоторым потоком $S \in \mathcal{E}'_{n-r-1}(E)$. Если номер j достаточно велик, а φ — пробная $(n-r)$-форма, сосредоточенная в g, то $\psi_j[\varphi] = \bar{d}T[\varphi * \alpha_j] = d(S * \alpha_j)[\varphi]$, так что $\psi_j = d(S * \alpha_j)$ в g. Следовательно, $\operatorname{per}_C \psi_j = 0$, если $C \in Z^b_r$, $C \subset G \setminus K$, а $j > j(C)$. Из (4.7) следует, что $\operatorname{per}_C \psi = 0$ *для почти всех* $C \in Z^b_r$, $C \subset G \setminus K$.

Вернемся к множеству G_σ. Пусть $C \in \mathrm{Ch}^b_r$; v-почти все сдвиги цепи C не пересекают K (именно здесь используется $(n-r)$-невидимость, см. [7, с. 141]). Если $C \subset G_{2\sigma}$, то при $\varepsilon < \sigma$, $|y| < \varepsilon$ цепь $C + \varepsilon$ остается в G_σ; применяя теорему Фубини, находим: $\operatorname{per}_C \psi_\varepsilon = 0$ ([7, с. 142]). Значит, форма ψ_ε замкнута в $G_{2\sigma}$. Более того, ψ_ε точна в $G_{2\sigma}$, ибо любая замкнутая в $G_{2\sigma}$ форма $\varphi \in \mathcal{D}_{n-r}(G_{2\sigma})$ компактно гомологична в $G_{2\sigma}$ некоторому r-мерному циклу подразделения множества $G_{2\sigma}$ на кубы со сторонами, параллельными осям ([10, с. 154]), и $\psi_\varepsilon[\varphi] = 0$. Из (4.6) и теоремы Де Рама, цитированной в начале доказательства, следует, что ψ точна в $G_{2\sigma}$. •

Г) Теперь мы можем в теореме Гартогса–Розенталя заменить условие r'-невидимости условием r'-почти невидимости. Это следует из В) и из того, что класс компактов, удовлетворяющих условию (sd_r), замкнут относительно конечных объединений. Действительно, если r-форма $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ точна в $G \setminus (K_1 \cap K_2)$, где K_j – (sd_r)-компакты, то она точна в $G \setminus K_1$, а потому и в G.

Д) Завершим доказательство утверждения, сформулированного в А). Для этого достаточно (в силу В), Г) и [7]) проверить, что *если компакт K локально диффеоморфен (sd_r)-множеству, то он обладает свойством (d_r).*

Доказательство. Пусть $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ — r-форма, точная в K'. Достаточно проверить, что $d\psi = 0$ вблизи любой точки $x \in K$. Пусть f_x — диффеоморфизм окрестности V_x точки x на шар $B \subset E$, причем $\operatorname{Clos}(K \cap V_x) =: k_x$ удовлетворяет условию (sd_r). Форма $f^*(\psi|V_x)$ точна в $B \setminus k_x$, а потому и в B; следовательно, ψ замкнута в B. •

Список литературы

[1] Кронрод А. С., *О функциях двух переменных*, Успехи мат. наук **5** (1950), № 1, 24–134.

[2] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.

[3] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

[4] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., *Геометрические неравенства*, Наука, Л., 1980.

[5] Иванов Л. Д., *Интегрирование в многомерном пространстве*, КГУ, Калинин, 1984.

[6] Манкрс Дж., *Элементарная дифференциальная топология*, Милнор Дж., Сташев Дж., Характеристические классы, Мир, М., 1979, сс. 270–358.

[7] Преса Саге А., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 6, 104–152.

[8] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*. Т. 1, Наука, М., 1967.

[9] Смирнов С. К., *Разложение соленоидальных векторных зарядов на элементарные соленоиды и структура нормальных одномерных потоков*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 4, 206–238.

[10] Рам Ж. де, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956.

[11] Понтрягин Л. С., *К теореме двойственности Александера,* Избранные научные труды. Т. 1, Наука, М., 1988, сс. 45–51.

[12] Хьюзмоллер Д., *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970.

[13] Дагер С. Р., Преса С. А., *Об одном аналоге теоремы Рунге для гармонических дифференциальных форм*, Зап. науч. семин. ПОМИ **232** (1996), 109–117.

[14] Парселл Э., *Электричество и магнетизм,* Берклеевский курс физики. Т. 2, Наука, М., 1971.

[15] Fuglede B., *Extremal length and closed extensions of partial differential operators*, Jul. Gjellerups Bodhandel, Copenhagen, 1960.

198004, Санкт-Петербург
Математико-механический факультет
С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 9 декабря 1996 г.

Department of Mathematics and Statistics,
McGill University Montreal, QC, Canada
H3A 2K6